1節　三角形の性質

1　三角形と比

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

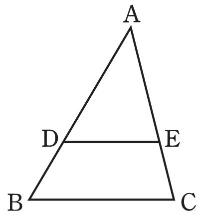
三角形と比

定理　$\triangle ABC$ の辺 AB，AC 上に，それぞれ点 D，E があるとき

$\boxed{1}$　$DE \parallel BC \iff AD : AB = AE : AC$

$\boxed{2}$　$DE \parallel BC \iff AD : DB = AE : EC$

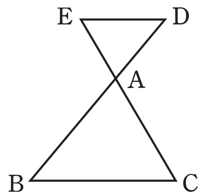
$\boxed{3}$　$DE \parallel BC \Longrightarrow AD : AB = DE : BC$



注意　$\boxed{3}$ において，その逆は成り立たない。

上の定理は，点 D，E が辺 AB，AC の延長上にあるときでも成り立つ。

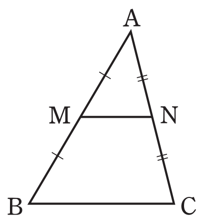
また，とくに，D と E がそれぞれ AB，AC の中点であるときには，次の中点連結定理が成り立つ。



中点連結定理

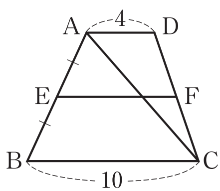
定理　$\triangle ABC$ の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

$$MN \parallel BC,\qquad MN = \frac{1}{2}BC$$



問 1　$AD = 4$，$BC = 10$，$AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ において，辺 AB の中点 E から辺 BC に平行な直線を引き，辺 CD との交点を F とする。EF の長さを求めよ。

→ p.114 問題1, 2



内分と外分

m，n は正の数とする。

線分 AB 上に点Pがあり

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

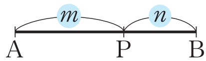
が成り立つとき，P は AB を $m : n$ に **内分** するという。

また，線分 AB の延長上に点Qがあり

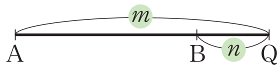
$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

が成り立つとき，Q は AB を $m : n$ に **外分** するという。

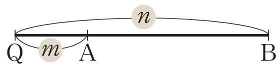
内分



外分　$m>n$ のとき



外分　$m<n$ のとき

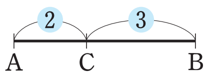


外分の場合，m と n の大小関係により，Q の位置は上の図のようになる。

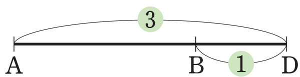
なお，線分を 1：1 に外分する点はない。

例 1　線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

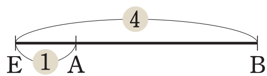
(1)　AB を 2：3 に内分する点C



(2)　AB を 3：1 に外分する点D



(3)　AB を 1：4 に外分する点E



問 2　線分 AB を引き，その線分について次の点を図示せよ。

(1)　AB を 3：1 に内分する点C

(2)　BA を 3：1 に内分する点D

(3)　AB を 5：1 に外分する点E

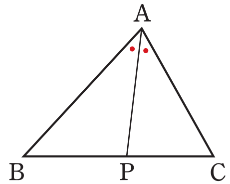
(4)　AB を 2：3 に外分する点F

三角形の内角と外角の二等分線

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB：AC に内分する。

すなわち　　BP：PC ＝ AB：AC



証明　頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

∠ACD ＝ ∠CAP　　◀錯角

∠ADC ＝ ∠BAP　　◀同位角

ここで，∠BAP ＝ ∠CAP であるから

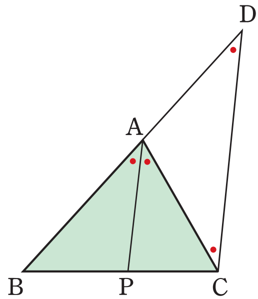
∠ACD ＝ ∠ADC

よって，△ACD は二等辺三角形であるから

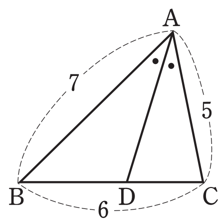
AC ＝ AD　　……①

また，PA // CD より　　BP：PC ＝ BA：AD　　……②

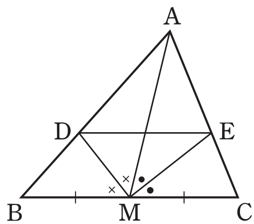
①，② より　　BP：PC ＝ AB：AC



問 3　△ABC において，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を D とする。AB ＝ 7，AC ＝ 5，BC ＝ 6 のとき，BD の長さを求めよ。



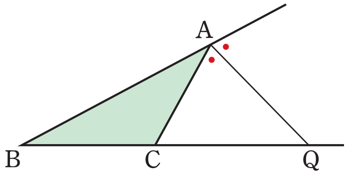
問 4　△ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線と辺 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，DE // BC であることを証明せよ。



外角の二等分線と比

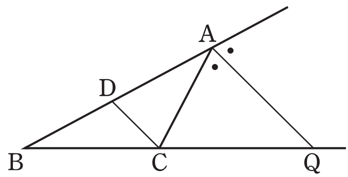
定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB：AC に外分する。

すなわち　　BQ：QC＝AB：AC

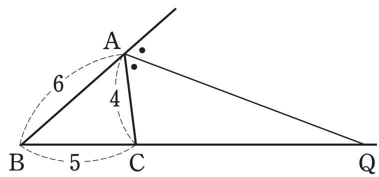


注意　AB＝AC のときは，外角の二等分線は辺 BC と平行になる。

問 5　上の図において，頂点 C を通って AQ に平行な直線を引き，AB との交点を D とする。これを利用して，上の定理を証明せよ。



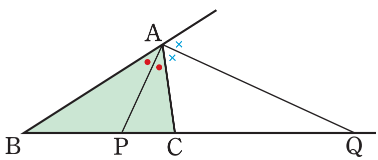
問 6　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



前ページの定理と上の定理は，その逆も成り立つことが知られている。

角の二等分線と比の定理の逆

定理　△ABC において，辺 BC を AB：AC に内分，外分する点をそれぞれ P，Q とすると



1　AP は頂点 A における内角を 2 等分する。

2　AQ は頂点 A における外角を 2 等分する。

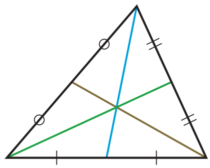
2 三角形の重心・外心・垂心・内心

三角形の重心

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を **中線** という。

三角形の重心

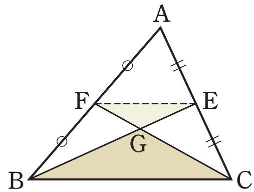
定理　三角形の3本の中線は1点で交わる。その交点は，それぞれの中線を2：1に内分する。



証明　$\triangle ABC$ において，2本の中線 BE と CF の交点をGとする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから

$EF \parallel BC$　かつ　$BC = 2EF$

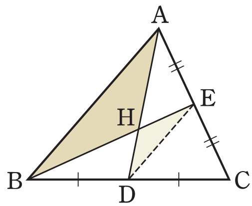
よって　　$BG : GE = CG : GF = 2 : 1$



一方，2本の中線 BE と AD の交点をHとすると，同様に

$DE \parallel AB$　かつ　$AB = 2DE$

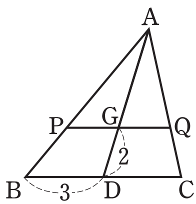
であるから　　$BH : HE = AH : HD = 2 : 1$



よって，GとHはともに中線 BE を2：1に内分するから一致する。
したがって，3本の中線は1点Gで交わり，Gはそれぞれの中線を2：1に内分する。

三角形の3本の中線の交点を，その三角形の **重心** という。

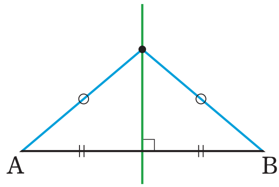
問7　右の図において，点Gは $\triangle ABC$ の重心で，線分 PQ はGを通り辺 BC に平行である。
$BD = 3$，$GD = 2$ のとき，AG，GQ の長さをそれぞれ求めよ。



三角形の外心

線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。逆に，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の外心

定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

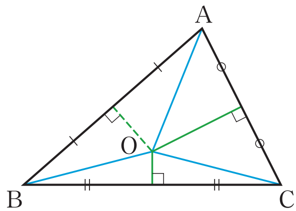
証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

$$OB = OC \quad かつ \quad OC = OA$$

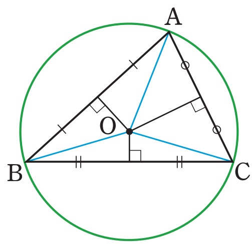
であるから　　$OA = OB$

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

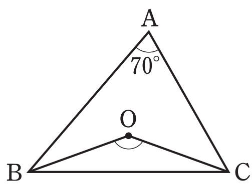
したがって，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



上の証明より，$OA = OB = OC$ であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の **外接円** といい，その中心 O を三角形の **外心** という。



問 8　右の図において，点 O は △ABC の外心である。このとき，∠BOC の大きさを求めよ。



問 9　∠A が直角の直角三角形 ABC の外心の位置はどこか。

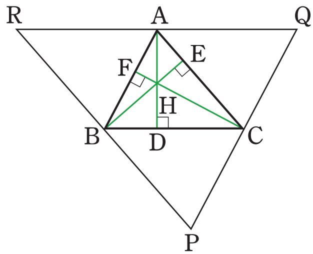
三角形の垂心

前ページの三角形の外心の定理を用いると，次の定理が成り立つことがわかる。

三角形の垂心

定理 三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。

証明 △ABC の頂点 A，B，C から対辺，またはその延長にそれぞれ垂線 AD，BE，CF を下ろす。



また，頂点 A，B，C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の各交点を，右の図のように P，Q，R とする。

BC // RA，AC // RB より，

四角形 ARBC は平行四辺形であるから　　BC = RA

同様に，四角形 ABCQ は平行四辺形であるから　　BC = AQ

よって　　RA = AQ　　…… ①

また，BC // RQ，AD ⊥ BC より

AD ⊥ RQ　　…… ②

①，② より，AD は △PQR の辺 QR の垂直二等分線である。

同様に，BE，CF は，それぞれ辺 RP，PQ の垂直二等分線である。

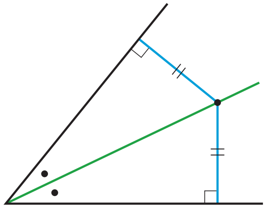
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わるから，3本の垂線 AD，BE，CF は1点Hで交わる。

三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線の交点を，その三角形の **垂心** という。

問10 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

三角形の内心

角の二等分線上の点は，角をつくる2辺から等距離にある。逆に，2辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。



このことを用いて，次の定理を導いてみよう。

三角形の内心

定理　三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

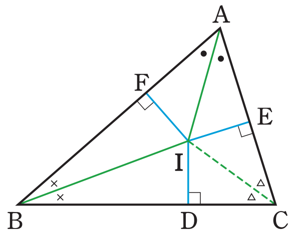
証明　△ABCにおいて，∠Aと∠Bの二等分線の交点をIとする。Iから辺BC，CA，ABにそれぞれ垂線ID，IE，IFを下ろすと

IE＝IF　かつ　IF＝ID

であるから　　ID＝IE

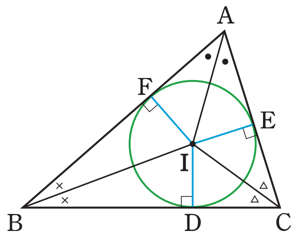
よって，Iは∠Cの二等分線上にある。

したがって，3つの内角の二等分線は1点Iで交わる。



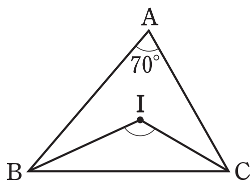
上の証明より，ID＝IE＝IF　であるから，点Iは3点D，E，Fから等距離にある。

よって，Iを中心としてD，E，Fを通る円をかくことができる。この円は三角形の3辺に接しているから，三角形の **内接円** といい，その中心Iを三角形の **内心** という。



内心は3辺からの距離が等しい点である。

問11　右の図において，点Iは△ABCの内心である。このとき，∠BICの大きさを求めよ。



参考　三角形の傍心

三角形の1つの内角の二等分線と，他の2つの頂点における外角の二等分線は1点で交わる。このことを証明してみよう。

証明　右の図のように，頂点B，Cにおける外角の二等分線の交点をJとするとき，AJが∠Aの二等分線であることを示す。

Jから辺BC，さらに辺AC，ABの延長にそれぞれ垂線JD，JE，JFを下ろす。

このとき

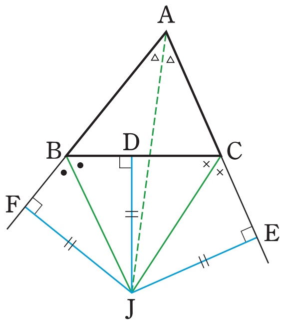
$$JF = JD \quad かつ \quad JE = JD$$

であるから

$$JF = JE$$

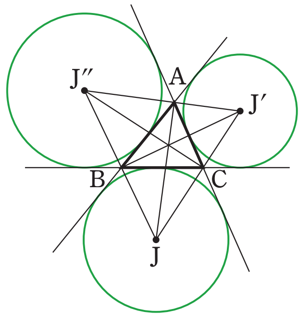
よって，Jは∠Aの二等分線上にある。

∠B，∠Cについても同様に証明できる。



上の証明における交点Jを△ABCの∠Aに対する **傍心**（ぼうしん）という。この傍心Jは，頂点B，Cにおける外角の二等分線上にあるから，Jを中心にしてBCおよびAB，ACの延長線に接する円をかくことができる。この円を，△ABCの∠Aに対する **傍接円**（ぼうせつえん）という。

右の図のように，△ABCの∠B，∠Cに対する傍心と傍接円もそれぞれ1つずつある。



注意　三角形の重心，外心，垂心，内心，傍心を合わせて **三角形の五心** という。

問1　△ABCの3つの傍心をそれぞれJ，J′，J″とするとき，△JJ′J″の垂心は，△ABCの内心と一致することを示せ。

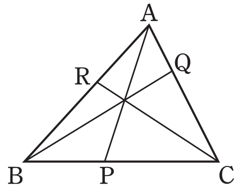
3　三角形の比の定理

三角形の頂点から対辺に引いた 3 直線について，次の **チェバの定理** が成り立つ。[(*)]

チェバの定理

定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき

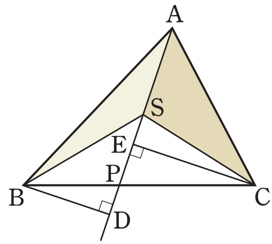
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



証明　3 直線の交点を S とする。B，C から直線 AP に垂線 BD，CE を下ろし，△ABS と △ACS において，AS を底辺と考えると

$$\frac{\triangle ABS}{\triangle ACS}=\frac{BD}{CE}$$

一方，BD // CE より，$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{BP}{CP}$ であるから，$\dfrac{\triangle ABS}{\triangle ACS}=\dfrac{BP}{CP}$ が成り立つ。

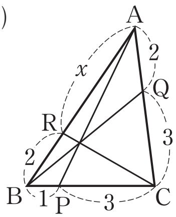


同様に，$\dfrac{\triangle BCS}{\triangle ABS}=\dfrac{CQ}{QA}$，$\dfrac{\triangle CAS}{\triangle BCS}=\dfrac{AR}{RB}$ が成り立つから

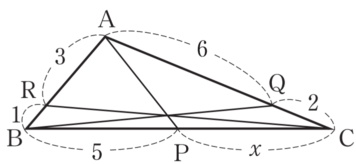
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{\triangle ABS}{\triangle CAS}\cdot\frac{\triangle BCS}{\triangle ABS}\cdot\frac{\triangle CAS}{\triangle BCS}=1$$

問12　下の図において，x を求めよ。

(1)



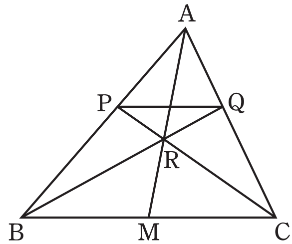
(2)



(*) チェバの定理は，P，Q，R のうちのいずれか 2 点がそれぞれ辺 BC，CA，AB の延長上にある場合にも成り立つ。

例題 1 チェバの定理の利用

$\triangle$ABC において，PQ $/\!/$ BC となるように点 P，Q をそれぞれ辺 AB，AC 上にとり，線分 PC と QB の交点を R とする。線分 AR の延長と辺 BC との交点を M とするとき，M が BC の中点であることを証明せよ。



証明 $\triangle$ABC の辺上の点 M，Q，P について，チェバの定理を用いると

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1 \quad\cdots\cdots ①$$

また，PQ $/\!/$ BC より $\quad \dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC} \quad\cdots\cdots ②$

② を ① に代入して $\quad \dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AQ}{QC}=1$

よって $\quad \dfrac{BM}{MC}=1$

したがって，BM = MC となり，M は BC の中点である。

問13 $\triangle$ABC の辺 BC の中点を M とする。線分 AM 上に点 R をとり，CR の延長と辺 AB との交点を P，BR の延長と辺 AC との交点を Q とする。このとき，PQ $/\!/$ BC であることを証明せよ。 → p.114 問題4

チェバの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

チェバの定理の逆

定理 $\triangle$ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

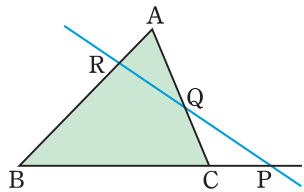
が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

一直線上の 3 点について，次の **メネラウスの定理** が成り立つ。

メネラウスの定理

定理　ある直線が△ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

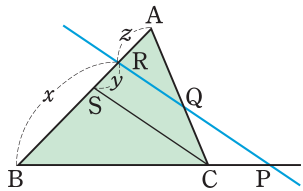


証明　点 C を通って PQ に平行な直線を引き，AB との交点を S とする。

RB $= x$，RS $= y$，AR $= z$ と表すと

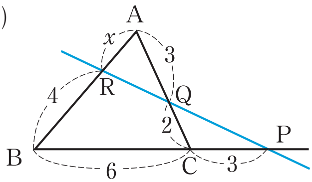
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\frac{x}{y},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{y}{z},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{z}{x}$$

よって　$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$$

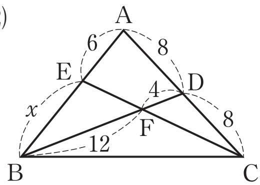


問14　下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



メネラウスの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

メネラウスの定理の逆

定理　△ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺の延長上にあるとき

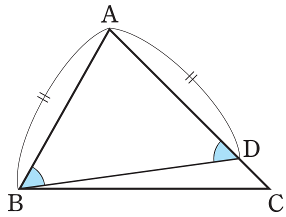
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立てば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

参考　辺と角の大小関係

$\triangle$ABC において，辺 AB と AC が等しければ，この三角形は二等辺三角形であり，$\angle$B と $\angle$C は等しい。AB と AC が等しくないとき，それぞれの辺に対する角の大小関係がどうなるかを考えてみよう。

$AB < AC$ の場合は，辺 AC 上に，$AB = AD$ となるように点 D をとることができる。このとき，$\triangle$ABD は二等辺三角形となり，$\angle ABD = \angle ADB$ である。



よって

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$$
$$= \angle ADB + \angle CBD$$

$\angle$ADB は $\triangle$BCD の $\angle$BDC の外角であるから

$$\angle ADB = \angle C + \angle CBD$$

ゆえに　$\angle ABC = \angle C + \angle CBD + \angle CBD > \angle C$

となる。

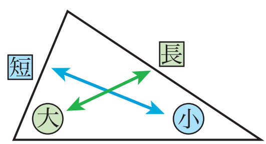
すなわち，$AB < AC$ ならば $\angle C < \angle B$ が成り立つ。

また，このことの逆，すなわち，$\angle C < \angle B$ ならば $AB < AC$ も成り立つことが知られている。

以上より，次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



辺と角の大小関係を用いると，三角形の 3 辺の長さについて，次の関係を示すことができる。

三角形の 3 辺の長さの関係

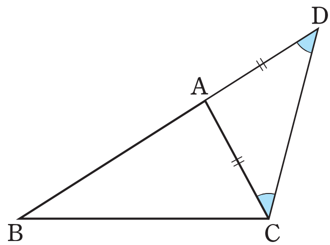
定理　三角形において

$\boxed{1}$　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

$\boxed{2}$　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

証明　$\boxed{1}$ を証明する。△ABC において，辺 AB と AC の長さの和が，辺 BC の長さより大きいことを示す。

辺 BA の延長上に，AD = AC となるように点Dをとることができる。



このとき，辺 AB と AC の和は

$$AB + AC = AB + AD = BD$$

となる。

△ACD は二等辺三角形であるから　　$\angle ACD = \angle D$

よって

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle BCA + \angle D > \angle D$$

△BCD において，$\angle BCD > \angle D$ であるから，辺と角の大小関係により $BD > BC$ となる。

したがって，$BD = AB + AC$ であるから

$$AB + AC > BC$$

が成り立つ。

同様に，$AC + BC > AB$，$AB + BC > AC$ も成り立つ。

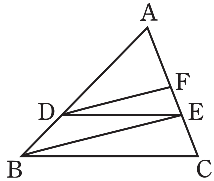
問 1　上の定理の $\boxed{2}$ を証明せよ。

図形の性質

問題

1　右の図において，BC // DE，BE // DF のとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$AE^2 = AF \cdot AC$$

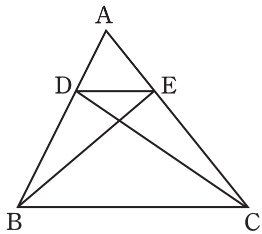


2†　右の図において，DE // BC，AD：DB = 1：2 とする。次の比を求めよ。

(1)　△ADE：△DBE

(2)　△DBE：△DBC

(3)　△ADE：△DBC



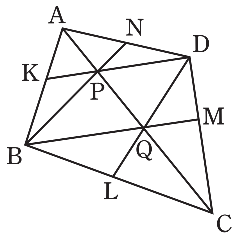
3　△ABC において，辺 BC 上に点Dをとって

$$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$$

となるようにすると，AD は ∠A を 2 等分することを証明せよ。

4　右の図のように，四角形 ABCD の対角線 AC 上に点 P，Q をとり，DP の延長と辺 AB の交点をK，DQ の延長と辺 BC の交点を L，BQ の延長と辺 CD の交点をM, BP の延長と辺 AD の交点をNとする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$



5　右の図において，AP は △ABC の頂点Aにおける外角の二等分線である。このとき，AR の長さを求めよ。