3章 図形の性質

1節 三角形の性質

1 三角形と比

教科書 P.100

問 1 AC と EF の交点を G とする。

△ABC において，EG // BC であるから

$\mathrm{AG}:\mathrm{GC}=\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=1:1$

よって，中点連結定理により

$\mathrm{EG}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\cdot 10=5$

△ACD において，GF // AD であるから

$\mathrm{DF}:\mathrm{FC}=\mathrm{AG}:\mathrm{GC}=1:1$

よって，中点連結定理により

$\mathrm{GF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2$

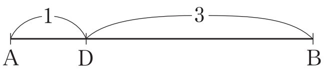
したがって　$\mathrm{EF}=\mathrm{EG}+\mathrm{GF}$

$=5+2=\mathbf{7}$

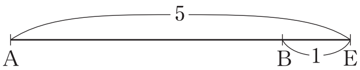
教科書 P.101

問 2 (1)

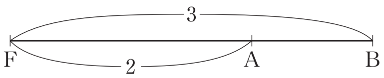
(2)



(3)



(4)



教科書 P.102

問 3 △ABC において，AD は ∠A の二等分線であるから

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=7:5$

すなわち　$\mathrm{BD}:(6-\mathrm{BD})=7:5$

よって　$5\mathrm{BD}=7(6-\mathrm{BD})$

これを解くと

$\mathbf{BD}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$

問 4 △ABM において，MD は ∠AMB の二等分線であるから

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AM}:\mathrm{MB}$　…… ①

△AMC において，ME は ∠AMC の二等分線であるから

$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AM}:\mathrm{MC}$　…… ②

また，MB ＝ MC であるから，①，② より

$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AM}:\mathrm{MB}$

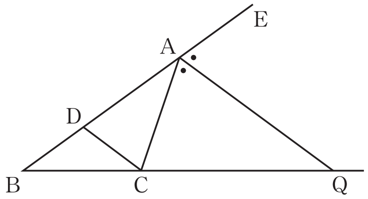
$=\mathrm{AM}:\mathrm{MC}$

$=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}$

したがって，△ABC において，AD:DB ＝ AE:EC であるから，三角形と比の定理により，DE // BC である。

教科書 P.103

問 5 線分 BA の延長上に点 E をとる。



AQ // DC より

錯角は等しいから

$\angle\mathrm{CAQ}=\angle\mathrm{ACD}$

同位角は等しいから

$\angle\mathrm{EAQ}=\angle\mathrm{ADC}$

ここで，$\angle\mathrm{CAQ}=\angle\mathrm{EAQ}$ であるから

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{ADC}$

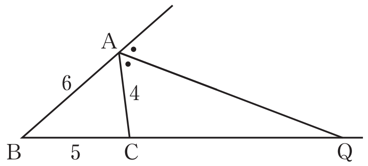
したがって　$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}$　…… ①

また，AQ // DC より

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{BA}:\mathrm{AD}$　…… ②

①，② より　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

問 6



△ABC において，AQ は頂点 A における外角の二等分線であるから

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$

$(\mathrm{BC}+\mathrm{CQ}):\mathrm{QC}=6:4$

$6\mathrm{QC}=4(5+\mathrm{QC})$

$2\mathrm{QC}=20$

よって　$\mathbf{CQ=10}$

2 三角形の重心・外心・垂心・内心

教科書 P.104

問 7 点 G は △ABC の重心であるから

$\mathrm{AG}:\mathrm{GD}=2:1$

$\mathbf{AG}=2\mathrm{GD}=2\cdot 2=\mathbf{4}$

点 D は BC の中点より　$\mathrm{DC}=3$

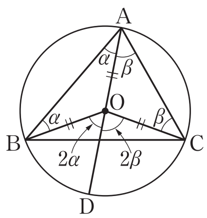
△ADC において，GQ // DC より

$\mathrm{GQ}:\mathrm{DC}=\mathrm{AG}:\mathrm{AD}=2:3$

よって　$\mathbf{GQ}=\dfrac{2}{3}\mathrm{DC}=\dfrac{2}{3}\cdot 3=\mathbf{2}$

教科書 P.105

問 8 直線 AO と △ABC の外接円との交点を D とする。



O は外心であるから，

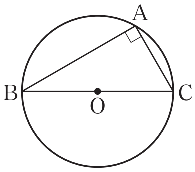
△OAB と △OAC は 二等辺三角形である。

このとき，

$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{OBA} = \alpha$,
$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OCA} = \beta$ とすると，$\angle \mathrm{A} = 70°$ より
$\alpha + \beta = 70°$
したがって　$\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{BOD} + \angle \mathrm{COD}$
$= 2\alpha + 2\beta$
$= 2(\alpha + \beta) = \mathbf{140°}$

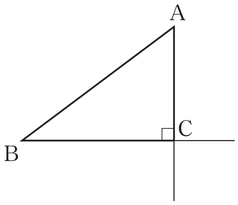
〔別解〕
点 O は △ABC の外心であるから，△ABC の外接円について考える。外接円において，∠BAC は弧 BC に対する円周角であるから，弧 BC に対する中心角 ∠BOC は
$\angle \mathrm{BOC} = 2\angle \mathrm{BAC} = 2 \cdot 70° = 140°$

問 9　AB の中点を M とし，M を通り AB に垂直な直線が BC と交わる点を O とする。
直線 OM は AB の垂直二等分線であるから
$\mathrm{AO} = \mathrm{BO}$　……①
また，$\angle \mathrm{BMO} = \angle \mathrm{BAC} = 90°$ であるから
$\mathrm{MO} \parallel \mathrm{AC}$
よって，$\mathrm{BO} : \mathrm{OC} = \mathrm{BM} : \mathrm{MA}$ となり，O は BC の中点となる。
したがって　$\mathrm{BO} = \mathrm{CO}$　……②
①，② より，$\mathrm{AO} = \mathrm{BO} = \mathrm{CO}$ であるから，BC の中点 O が △ABC の外心である。

〔別解〕


△ABC の外心を O とし，その外接円を考える。
∠BAC＝90° であるから，線分 BC は外接円の直径となる。
したがって，外心 O は線分 BC の中点である。

教科書 P.106

問10　頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線は直線 AC である。
同様に，頂点 B から対辺 AC に下ろした垂線は直線 BC である。


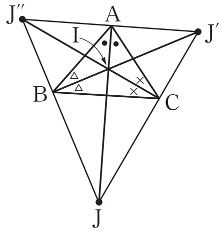
よって，垂心は **直角の頂点 C** である。

教科書 P.107

問11　I は内心であるから，BI，CI はそれぞれ ∠B，∠C の二等分線である。
よって　$\angle \mathrm{IBC} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ABC}$
$\angle \mathrm{ICB} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ACB}$
これより
$\angle \mathrm{BIC} = 180° - \angle \mathrm{IBC} - \angle \mathrm{ICB}$
$= 180° - \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ABC} - \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ACB}$
$= 180° - \dfrac{1}{2}(\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ACB})$
$= 180° - \dfrac{1}{2}(180° - 70°)$
$= \mathbf{125°}$

参考　三角形の傍心

教科書 P.108

問 1　∠A に対する傍心が J であるとき，AJ は ∠A の二等分線である。


同様に，BJ′ は ∠B の二等分線，CJ″ は ∠C の二等分線である。
したがって，AJ，BJ′，CJ″ は △ABC の内心 I で交わる。
AJ′, AJ″ はともに ∠A の外角の二等分線であるから，J′，A，J″ は一直線上にある。
このとき，∠J′AC＝∠J″AB で，AJ は ∠A の二等分線であるから
$\angle \mathrm{J'AJ} = \angle \mathrm{J''AJ} = 90°$
すなわち，AJ と J′J″ は垂直である。
同様に BJ′ と J″J は垂直，CJ″ と JJ′ は垂直である。
よって，△JJ′J″ の各頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線 AJ，BJ′，CJ″ の交点 I は △JJ′J″ の垂心である。
したがって，△JJ′J″ の垂心は，△ABC の内心と一致する。

3　三角形の比の定理

教科書 P.109

問12　チェバの定理により
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$
(1)　① より　$\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{x}{2} = 1$
よって　$\boldsymbol{x = 4}$
(2)　① より　$\dfrac{5}{x} \cdot \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{3}{1} = 1$
よって　$\boldsymbol{x = 5}$

教科書 P.110

問13　3 直線 AM，BQ，CP が 1 点で交わるから，チェバの定理により
$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{MC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = 1$$
ここで，BM＝MC より
$$\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = 1$$
よって　$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}$
したがって，△ABC において

$$AP:PB = AQ:QC$$

三角形と比の定理により

$$PQ \parallel BC$$

教科書 P.111

問14 (1)　メネラウスの定理により　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

よって　$\dfrac{9}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x}{4}=1$

したがって　$\boldsymbol{x=2}$

(2)　メネラウスの定理により　$\dfrac{AC}{CD}\cdot\dfrac{DF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EA}=1$

よって　$\dfrac{16}{8}\cdot\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{x}{6}=1$

したがって　$\boldsymbol{x=9}$

参考　辺と角の大小関係

教科書 P.113

問 1　定理 1 より，△ABC において，次の 3 つの不等式が成り立つ。

$AB+AC>BC$　…… ①

$AC+BC>AB$　…… ②

$AB+BC>AC$　…… ③

いま，$|AB-AC|<BC$ であることを証明しよう。

② より　$AB-AC<BC$　…… ④

③ より　$-BC<AB-AC$　…… ⑤

④，⑤ より　$-BC<AB-AC<BC$

よって　$|AB-AC|<BC$ が成り立つ。

同様に，$|BA-BC|<AC$，$|CA-CB|<AB$ も成り立つ。

(注)　$a>0$ のとき

$-a<x<a \iff |x|<a$

問題

教科書 P.114

1　$BC\parallel DE$ より　$AD:AB=AE:AC$

$BE\parallel DF$ より　$AD:AB=AF:AE$

したがって　$AE:AC=AF:AE$

ゆえに　$AE^2=AF\cdot AC$

2　(1)　△ADE と △DBE は，AD，DB を底辺とみると高さが共通である。したがって

$\triangle ADE:\triangle DBE=AD:DB$

$=\boldsymbol{1:2}$

(2)　△DBE と △DBC の共通な辺 DB を底辺とみると，その高さの比は DE と BC の比に等しい。

ここで，$DE:BC=AD:AB=1:3$ であるから

$\triangle DBE:\triangle DBC=DE:BC$

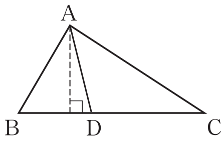
$=\boldsymbol{1:3}$

(3)　(1) と (2) の結果から

$\triangle ADE:\triangle DBE:\triangle DBC=1:2:6$

したがって　$\triangle ADE:\triangle DBC=\boldsymbol{1:6}$

3　△ABD と △ACD は BD，CD をそれぞれ底辺とみると高さが共通である。よって



$\triangle ABD:\triangle ACD=BD:CD$

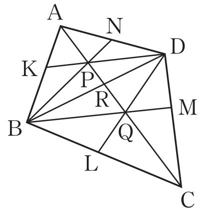
また，仮定より

$\triangle ABD:\triangle ACD=AB:AC$ であるから

$BD:CD=AB:AC$

したがって，AD は ∠A を 2 等分する。

4　四角形 ABCD の対角線 BD を引き，AC との交点を R とする。△ABD と △CBD において，それぞれチェバの定理により



$\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BR}{RD}\cdot\dfrac{DN}{NA}=1$

$\dfrac{DR}{RB}\cdot\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MD}=1$

この 2 式の両辺をそれぞれ掛けて

$$\dfrac{AK}{KB}\cdot\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MD}\cdot\dfrac{DN}{NA}=1$$

5　メネラウスの定理により

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　…… ①

ここで　$QA=6$，$CQ=2$　…… ②

AP は頂点 A における外角の二等分線であるから

$BP:PC=AB:AC=12:8$

$=3:2$　…… ③

$AR=x$ とおくと　$RB=12-x$　…… ④

②，③，④ を ① に代入すると

$$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{x}{12-x}=1$$

これを解くと　$x=8$

よって，AR の長さは 8 である。

2節　円の性質

1　円周角の定理

教科書 P.115

問 1　(1)　中心角 θ は円周角 20° の 2 倍であるから

$\boldsymbol{\theta=40^\circ}$

(2)　半円の弧に対する円周角は 90° であるから

$\theta+70^\circ=90^\circ$

よって　$\theta=90^\circ-70^\circ=\boldsymbol{20^\circ}$

(3)　中心角 $360^\circ-\theta$ は円周角 110° の 2 倍であるから

$360^\circ-\theta=2\cdot110^\circ$

よって　$\boldsymbol{\theta=140^\circ}$

問 2　**① と ③**

理由：① は，$\angle ABD=\angle ACD$

② は，$\angle BAC\neq\angle BDC$

③ は，$\angle BAC=180^\circ-(82^\circ+44^\circ)=54^\circ$

よって　$\angle BAC = \angle BDC$

2 円に内接する四角形

教科書 P.116

問 3 (1) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから　$\theta + 74^\circ = 180^\circ$

よって　$\boldsymbol{\theta = 106^\circ}$

(2) 円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから　$\theta + (180^\circ - 55^\circ - 45^\circ) = 180^\circ$

よって　$\boldsymbol{\theta = 100^\circ}$

(3) 円に内接する四角形の外角は，それと隣り合う内角の対角に等しいから

$\theta + 80^\circ + 25^\circ = 180^\circ$

よって　$\boldsymbol{\theta = 75^\circ}$

教科書 P.117

問 4 **①と②**

理由：① は，$\angle A + \angle C = 180^\circ$ である。

② は，$\angle B = 180^\circ - (46^\circ + 24^\circ) = 110^\circ$

より $\angle B + \angle D = 180^\circ$ である。

③ は対角の和が 180° ではない。

教科書 P.118

問 5 (1) 四角形 ARPQ において

$\angle AQP + \angle ARP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

1 組の対角の和が 180° であるから，四角形 ARPQ は円に内接する。したがって，4 点 A, R, P, Q は同一円周上にある。

(2) $\triangle ABP$ と $\triangle APR$ において

$\angle APB = \angle ARP = 90^\circ$

$\angle BAP = \angle PAR$

よって，残りの対応する角は等しいから

$\angle ABP = \angle APR$　…… ①

また，(1) より四角形 ARPQ は円に内接するから

$\angle APR = \angle AQR$　…… ②

$\angle RBP = \angle ABP$ であるから，①，② より

$\angle RBP = \angle AQR$

よって，四角形 BCQR の 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，四角形 BCQR は円に内接する。

したがって，4 点 B，C，Q，R は同一円周上にある。

（参考） p.123 の方べきの定理 (1) の逆を用いて，次のように証明することもできる。

$\triangle ABP \backsim \triangle APR$ より

$AB : AP = AP : AR$

すなわち　$AB \cdot AR = AP^2$　…… ①

また，$\triangle ACP \backsim \triangle APQ$ より

$AC : AP = AP : AQ$

すなわち　$AC \cdot AQ = AP^2$　…… ②

①，② より　$AB \cdot AR = AC \cdot AQ$

方べきの定理 (1) の逆により，4 点 B，R，C，Q は同一円周上にある。

3 接線と弦のつくる角

教科書 P.119

問 6 例 1 より，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているから，2 組の対辺の長さの和は等しい。

よって

$AB + DC = AD + BC$

$AB + 4 = 3 + 7$

したがって　$\boldsymbol{AB = 6}$

教科書 P.120

問 7 (1) $\angle BAT = \angle ACB = 76^\circ$

よって

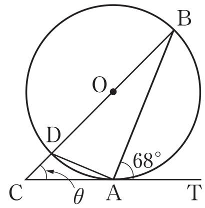
$\theta = 180^\circ - \angle BAT = \boldsymbol{104^\circ}$

(2) $\angle ACB = \angle BAT = 73^\circ$

よって

$\theta = 2 \times \angle ACB = \boldsymbol{146^\circ}$

(3) BC と円 O との交点を D とし，A と D を結ぶ。



$\angle ADB = \angle BAT$

$= 68^\circ$

$\angle BAD = 90^\circ$ より

$\angle ABD = 180^\circ - (\angle ADB + \angle BAD)$

$= 180^\circ - 158^\circ = 22^\circ$

$\triangle ABC$ において

$\theta + \angle ABD = \angle BAT$

よって　$\theta = 68^\circ - 22^\circ = \boldsymbol{46^\circ}$

4 方べきの定理

教科書 P.122

問 8 (1) 方べきの定理により

$2 \cdot 4 = 1 \cdot x$

よって　$\boldsymbol{x = 8}$

(2) 方べきの定理により

$x \cdot (x+1) = 2 \cdot (2+4)$

よって　$x^2 + x - 12 = 0$

$(x-3)(x+4) = 0$

$x > 0$ より　$\boldsymbol{x = 3}$

問 9 (1) 方べきの定理により

$x^2 = 4 \cdot (4+3)$

$x > 0$ より　$\boldsymbol{x = 2\sqrt{7}}$

(2) 方べきの定理により

$4 \cdot (4+2) = x \cdot (x+5)$

よって　$x^2 + 5x - 24 = 0$

$(x-3)(x+8) = 0$

$x > 0$ より　$\boldsymbol{x = 3}$

また，方べきの定理により

$y^2 = 4 \cdot (4+2)$

$y > 0$ より　$\boldsymbol{y = 2\sqrt{6}}$

教科書 P.123

問10 方べきの定理により

$BC \cdot BD = BA^2$，$BE \cdot BF = BA^2$

よって　$BC \cdot BD = BE \cdot BF$

ゆえに，方べきの定理の逆により，4 点 C，D，E，F は同一円周上にある。

5　2つの円

教科書 P.125

問11　1　互いに外部にある …… **4 本**

2　外接する …… **3 本**

3　2 点で交わる …… **2 本**

4　内接する …… **1 本**

5　一方が他方を含む …… **なし**

問12　(1)　O′ から AO に垂線を下ろし，垂線と AO の交点を C とする。四角形 ACO′B は長方形であるから

$CA = O'B = 3$，$CO' = AB$

よって　$OC = OA - CA = 6 - 3 = 3$

ここで，△COO′ において，三平方の定理により

$OC^2 + CO'^2 = OO'^2$

$CO'^2 = 13^2 - 3^2 = 160$

$CO' > 0$ より　$CO' = 4\sqrt{10}$

すなわち　$AB = CO' = \mathbf{4\sqrt{10}}$

(2)　O′ から OA の延長上に垂線を下ろし，垂線と OA の延長との交点を D とする。

四角形 ABO′D は長方形であるから

$AD = BO' = 3$，$AB = DO'$

ここで，△DOO′ において，三平方の定理により

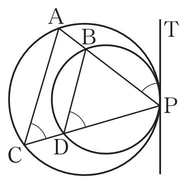
$OD^2 + DO'^2 = OO'^2$

$DO'^2 = 13^2 - (6+3)^2 = 88$

$DO' > 0$ より　$DO' = 2\sqrt{22}$

すなわち　$AB = DO' = \mathbf{2\sqrt{22}}$

問13　右の図のように，点 P における共通接線 TP を引くと，接線と弦のつくる角の定理により



$\angle ACP = \angle APT$

$\angle BDP = \angle BPT$

ここで，$\angle APT = \angle BPT$ より

$\angle ACP = \angle BDP$

よって，同位角が等しいから　$AC \parallel BD$

問題

教科書 P.126

6　(1)　円周角の定理により

$\angle BDC = \angle BAC = 50°$

また，BD は直径であるから

$\angle BCD = 90°$

よって　$\theta = 180° - (50° + 90°) = \mathbf{40°}$

(2)　△ABD は二等辺三角形であるから

$\angle BAD = \dfrac{1}{2}(180° - 34°) = 73°$

四角形 ABCD は円に内接しているから，円に内接する四角形の定理により

$\theta = 180° - 73° = \mathbf{107°}$

(3)　AB は直径であるから

$\angle ACB = 90°$

よって　$\angle ABC = 180° - (90° + 28°) = 62°$

四角形 ABCD は円に内接しているから，円に内接する四角形の定理により

$\theta = 180° - 62° = \mathbf{118°}$

7　四角形 BDPF は円に内接するから

$\angle AFP = \angle BDP$　…… ①

また，四角形 DCEP は円に内接するから

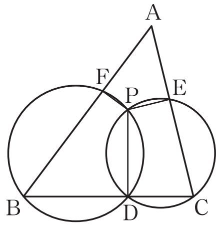
$\angle BDP = \angle PEC$　…… ②

①，② より

$\angle AFP = \angle PEC$

よって，四角形 AFPE の 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，四角形 AFPE は円に内接する。

したがって，4 点 A，E，F，P は同一円周上にある。



8　円 O の半径を x とすると　$AR = AQ = x$

一方，$BR = BP = 6$，$CQ = CP = 4$ であるから，△ABC において，三平方の定理により

$(x+6)^2 + (x+4)^2 = 10^2$

よって　$x^2 + 10x - 24 = 0$

$(x+12)(x-2) = 0$

$x > 0$ より　$x = 2$

したがって，円 O の半径は　**2**

9　(1)　S，T を結ぶと，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle STA = 76°$，$\angle TSA = 76°$

△AST において

$\theta = 180° - 76° - 76° = \mathbf{28°}$

〔別解〕円の中心を O とする。

$\angle OSA = \angle OTA = 90°$

また，円周角の定理により

$\angle SOT = 2 \times \angle SPT = 152°$

よって

$\theta = 360° - (90° + 90° + 152°) = 28°$

(2)　O と A を結ぶと　$\angle OAP = 90°$

△OAP において

$\angle AOC = 90° + 32° = 122°$

円周角の定理により

$\theta = \dfrac{1}{2}\angle AOC = 122° \times \dfrac{1}{2} = \mathbf{61°}$

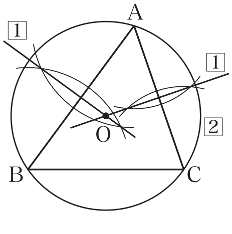
3 章

3節 作図

1 基本的な作図

教科書 P.128

問 1 $\boxed{1}$ 辺 AB, AC の垂直二等分線を引く。

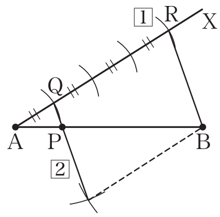


$\boxed{2}$ これらの垂直二等分線の交点 O を中心として，点 A を通る円 O をかく。

このとき，O は△ABC の外心であるから，円 O は点 B, C を通り，△ABC の外接円になる。

教科書 P.129

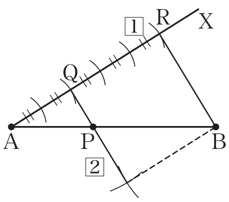
問 2 (1) $\boxed{1}$ 半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 Q，R を AQ : QR = 1 : 3 となるようにとる。



$\boxed{2}$ 点 Q を通り，直線 RB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

P が求める内分する点である。

(2) $\boxed{1}$ 半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 Q，R を AQ : QR = 2 : 3 となるようにとる。



$\boxed{2}$ 点 Q を通り，直線 RB に平行な直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

P が求める内分する点である。

2 長さの作図

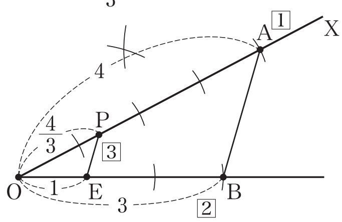
教科書 P.130

問 3 $\boxed{1}$ 半直線 OX を引き，OX 上に点 A を OA = 4 となるようにとる。

$\boxed{2}$ OE の延長上に点 B を OB = 3 となるようにとる。

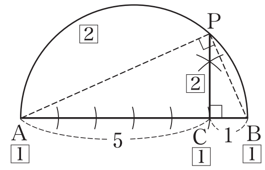
$\boxed{3}$ 点 E を通り，直線 BA に平行な直線を引き，OX との交点を P とする。

このとき，OP = $\dfrac{4}{3}$ である。



教科書 P.131

問 4 $\boxed{1}$ 同一直線上に AC = 5, CB = 1 となるように 3 点 A, C, B をこの順にとる。

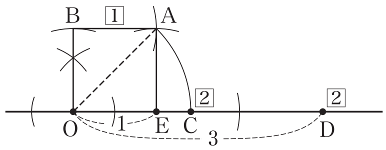


$\boxed{2}$ AB を直径とする円をかき，点 C を通り直線 AB に垂直な直線と円の交点を P とする。

このとき，CP = $\sqrt{5}$ である。

問 5 $\boxed{1}$ 1 辺の長さが 1 の正方形 OEAB をかく。

$\boxed{2}$ OE の延長上に OA = OC となる点 C と，OD = 3 となる点 D をとる。



このとき，CD = $3-\sqrt{2}$ である。

参考 正五角形の作図

教科書 P.132

問 1 例 1 の手順を参考にして，作図する。

問題

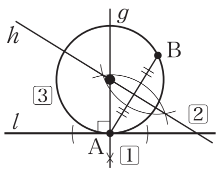
教科書 P.133

10 $\boxed{1}$ 点 A を通り直線 l に垂直な直線 g を引く。

$\boxed{2}$ 線分 AB の垂直二等分線 h を引く。

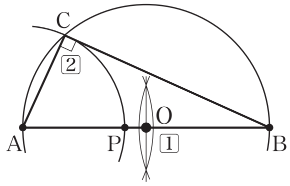
$\boxed{3}$ 2 直線 g, h の交点 O を中心として，点 B を通る円をかく。

この円が求めるものである。



11 $\boxed{1}$ 線分 AB の中点 O を中心として，点 A を通る円をかく。

$\boxed{2}$ 点 A を中心とし点 P を通る円と円 O の交点 C を求める。



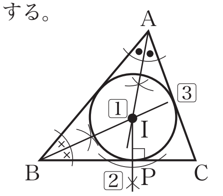
このとき，点 C は AB を直径とする円の円周上にあるから，∠ACB は直角になる。したがって，△ABC が求めるものである。

12 $\boxed{1}$ ∠A の二等分線と ∠B の二等分線を引き，その交点を I とする。

$\boxed{2}$ 点 I から辺 BC に垂線を下ろし，BC との交点を P とする。

$\boxed{3}$ 点 I を中心に半径 IP の円をかく。

I は内接円の中心となり，この円が △ABC の内接円である。

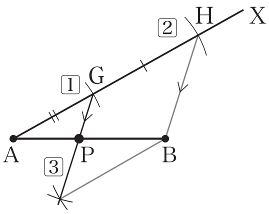


13 $\boxed{1}$ 次の図のように，半直線 AX を引き，AG＝CD となる点 G を半直線 AX 上にとる。

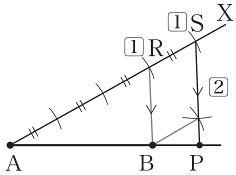
$\boxed{2}$ 半直線 AX 上に，GH＝EF となる点 H をとる。

$\boxed{3}$ 点 G を通り直線 HB に平行な直線を引き，AB との交点を P とする。

この交点 P が求める点である。



14 (1) $\boxed{1}$ 右の図のように，半直線 AX を引き，AX 上に 2 点 R，S をこの順に AR : RS＝3 : 1 となるようにとる。



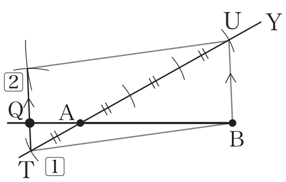
$\boxed{2}$ 点 S を通り直線 RB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を P とする。

この交点 P が求める外分する点である。

(2) $\boxed{1}$ 次の図のように，直線 AY を引き，AY 上に 2 点 T, U を，T, A, U の順で TA:AU＝1:3 となるようにとる。

$\boxed{2}$ 点 T を通り直線 UB に平行な直線を引き，直線 AB との交点を Q とする。

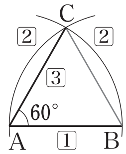
この交点 Q が求める外分する点である。



15 (1) $\boxed{1}$ 線分 AB を定める。

$\boxed{2}$ AB を半径とする円を，点 A と点 B を中心にしてかき，その 2 円の交点を C とする。

$\boxed{3}$ 線分 CA，CB をかく。

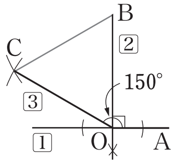


このとき △ABC は正三角形であるから，この三角形の内角の 1 つが 60° である。

(2) $\boxed{1}$ 直線 OA を定める。

$\boxed{2}$ 点 O を通り，直線 OA に垂直な直線 OB を引く。

$\boxed{3}$ (1) と同様に，正三角形 OCB をかく。



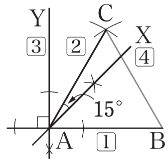
このとき ∠AOB＋∠BOC＝90°＋60°＝150°

よって，∠AOC が求める角である。

(3) $\boxed{1}$ 線分 AB を定める。

$\boxed{2}$ (1) と同様に，正三角形 ABC をかく。

$\boxed{3}$ 点 A を通り辺 AB に垂直な直線 AY を引く。



$\boxed{4}$ ∠BAY の二等分線 AX を引く。

このとき ∠BAC－∠BAX＝60°－45°＝15°

よって，∠XAC が求める角である。

16 1 辺の長さ $\sqrt{ab}$ の正方形を作図する。

$\boxed{1}$ 次の図のように，同一直線上に AC＝a，CB＝b となる 3 点 A，C，B をこの順にとり，AB を直径とする円をかく。

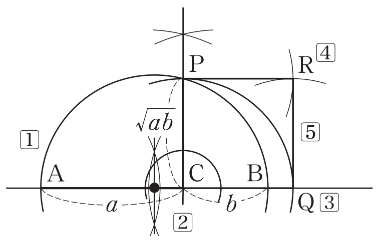
$\boxed{2}$ 点 C を通り直線 AB に垂直な直線と円との交点を P とする。

$\boxed{3}$ 直線 AB 上に CP＝CQ となる点 Q をとる。

$\boxed{4}$ PR＝CP，QR＝CP を満たす点 R をとる。

$\boxed{5}$ 線分 PR，QR をかく。

このとき，四角形 CPRQ は 1 辺の長さ $\sqrt{ab}$ の正方形となる。



(注) $a=b$ の場合は，1 辺の長さが a の正方形を作図すればよい。

4節 空間図形

1 直線と平面

教科書 P.134

問 1 (1) **DC，HG，EF**

(2) **EH，FG，DH，CG**

教科書 P.135

問 2 (1) DC // AB であるから，AE と DC のなす角は，AE と AB のなす角に等しい。よって，AE と DC のなす角は **90°**

(2) CH // BE であるから，AB と CH のなす角は，AB と BE のなす角に等しい。よって，AB と CH のなす角は **45°**

(3) DB // HF であるから，DB と CF のなす角は，HF と CF のなす角に等しい。△CHF は正三角形であるから，DB と CF のなす角は **60°**

教科書 P.137

問 3 (1) 平面 DEF と平面 HEF のなす角は，DE と EH のなす角に等しいから **45°**

(2) 平面 BDH と平面 CDH のなす角は，BD と CD のなす角に等しいから **30°**

(3) 平面 BDH と平面 DEH のなす角は，BD と AD のなす角に等しいから **60°**

教科書 P.139

問 4 PO ⊥ α より　　PO ⊥ l

ゆえに，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，PA に垂直であるから　　l ⊥ 平面 AOP

OA は平面 AOP 上にあるから　　OA ⊥ l

問 5 AH ⊥ 平面 BCD，AP ⊥ BC であるから，三垂線の定理により　　HP ⊥ BC

2 多面体

教科書 P.141

問 6 正四面体　$v-e+f=4-6+4=2$

正六面体　$v-e+f=8-12+6=2$

正十二面体　$v-e+f=20-30+12=2$

正二十面体　$v-e+f=12-30+20=2$

となり，オイラーの多面体定理が成り立っている。

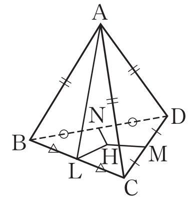
問 7 頂点の数 $v=6$，辺の数 $e=9$，面の数 $f=5$

よって　　$v-e+f=6-9+5=2$

となり，オイラーの多面体定理が成り立っている。

問題

17 BC，CD，DB の中点をそれぞれ L，M，N とする。



△ABC は AB = AC の二等辺三角形であるから

AL ⊥ BC

AH ⊥ 平面 BCD，AL ⊥ BC であるから，三垂線の定理により

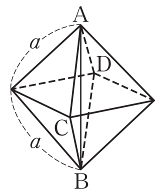
HL ⊥ BC

よって，HL は辺 BC の垂直二等分線である。

同様に，HM は辺 CD の垂直二等分線，HN は辺 DB の垂直二等分線になる。

したがって，H は △BCD の外心である。

18 (1) 右の図において，四角形 ACBD は，1 辺の長さが a の正方形であるから



AB $=\boldsymbol{\sqrt{2}\,a}$

(2) 2 つの四角錐を上下に合わせたものと考えて

$$\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot 2=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3}$$

(3) 1 辺の長さが a の正三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot 8=\boldsymbol{2\sqrt{3}\,a^2}$$

19 この立体は，8 つの六角形と 6 つの四角形の面をもつから

面の数 $f=14$

頂点は 3 つの面の頂点として共有しているから

頂点の数 $v=\dfrac{8\cdot 6+6\cdot 4}{3}=24$

辺は各面の境界として共有しているから

辺の数 $e=\dfrac{8\cdot 6+6\cdot 4}{2}=36$

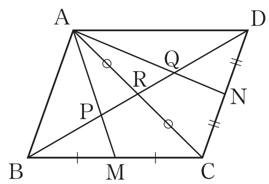
よって　$v-e+f=24-36+14=2$

となり，オイラーの多面体定理が成り立っている。

練習問題 A

教科書 P.142

1 対角線 AC を引き，AC と BD の交点を R とする。このとき，平行四辺形の性質により



AR = CR

BR = DR

仮定より　　　BM = CM

よって，点 P は △ABC における中線の交点，すなわち重心である。したがって

$$\mathrm{BP}:\mathrm{PR}=2:1 \quad \cdots\cdots ①$$

同様に，点 Q は △ADC の重心であるから

$$\mathrm{DQ}:\mathrm{QR}=2:1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② と，BR = DR より

$$\mathrm{BP}=\mathrm{PQ}=\mathrm{QD}$$

〔別解〕AD // BM であるから

$\mathrm{BP}:\mathrm{DP}=\mathrm{BM}:\mathrm{DA}=1:2$

よって　$\mathrm{BP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BD}$ ……①

DN // AB であるから

$\mathrm{QD}:\mathrm{QB}=\mathrm{DN}:\mathrm{BA}=1:2$

よって　$\mathrm{QD}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BD}$ ……②

①，② より

$$\mathrm{PQ}=\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\mathrm{BD}=\frac{1}{3}\mathrm{BD} \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ より　BP = PQ = QD

2　(1)　△ACR と △ABQ において

$\angle\mathrm{ARC}=\angle\mathrm{AQB}=90^\circ$

∠A は共通

2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle\mathrm{ACR} \backsim \triangle\mathrm{ABQ}$

よって

$\mathrm{AR}:\mathrm{AQ}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}$

したがって　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$

(2)　(1) と同様に

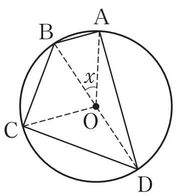
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BR}}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CP}}=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}}$$

が得られる。よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AQ}}$$
$$=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=1$$

チェバの定理の逆により，AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

3　円の中心を O とする。



$\angle\mathrm{AOB}=x$ とすると，

円の基本性質により

$\angle\mathrm{BOC}=2x$

$\angle\mathrm{COD}=3x$

$\angle\mathrm{DOA}=4x$

となる。これらの和を考えて

$x+2x+3x+4x=360^\circ$

であるから　$x=36^\circ$

円周角の定理により

$$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{DAC}+\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DOC}+\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}$$
$$=\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x=90^\circ$$

同様にして

$$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{CBD}+\angle\mathrm{ABD}$$
$$=\frac{1}{2}\angle\mathrm{COD}+\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOD}$$
$$=\frac{3}{2}x+2x=\frac{7}{2}x=126^\circ$$

円に内接する四角形の定理により

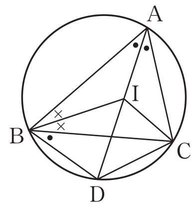
$\angle\mathrm{C}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

$\angle\mathrm{D}=180^\circ-126^\circ=54^\circ$

よって

$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C}=90^\circ$，$\angle\mathrm{B}=126^\circ$，$\angle\mathrm{D}=54^\circ$

4　I が内心であることから



$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$

よって，円周角が等しいから　DB = DC　……①

また

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=x$

$\angle\mathrm{ABI}=\angle\mathrm{CBI}=y$

とおくと，∠BID は △IAB の ∠I の外角であるから

$\angle\mathrm{BID}=x+y$ ……②

一方，円周角の定理により

$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{CAD}=x$

よって　$\angle\mathrm{IBD}=\angle\mathrm{CBD}+\angle\mathrm{CBI}$

$=x+y$ ……③

②，③ より　$\angle\mathrm{BID}=\angle\mathrm{IBD}$

△DBI は二等辺三角形であるから

DB = DI ……④

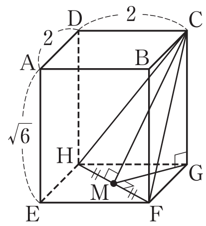
①，④ より　DI = DB = DC

5　$\mathrm{CH}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{CF}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{HF}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

よって，△CHF は CH = CF の二等辺三角形であるから，HF の中点を M とすると　CM ⊥ HF



また，四角形 EFGH は正方形であるから

GM ⊥ HF

よって，平面 CHF と平面 GHF のなす角は ∠CMG に等しい。

△CMG は $\angle\mathrm{CGM}=90^\circ$ の直角三角形であり

$\mathrm{CM}=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$

$\mathrm{GM}=\sqrt{2}$

$\mathrm{CG}=\sqrt{6}$

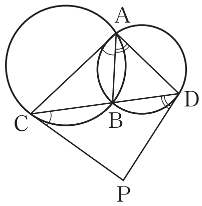
であるから　$\mathrm{CM}:\mathrm{GM}:\mathrm{CG}=2:1:\sqrt{3}$

△CGM は，斜辺が 2，底辺が 1，高さが $\sqrt{3}$ の比の直角三角形であるから，∠CMG は 60° となる。ゆえに，求める 2 平面のなす角は **60°** である。

練習問題B

教科書 P.143

6 右の図のように，線分 AB を引くと，接線と弦のつくる角の定理により



$\angle \mathrm{BCP} = \angle \mathrm{CAB}$

$\angle \mathrm{BDP} = \angle \mathrm{DAB}$

よって　$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{CAB} + \angle \mathrm{DAB}$

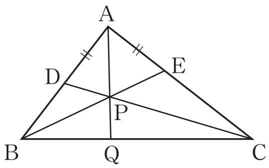
$= \angle \mathrm{BCP} + \angle \mathrm{BDP}$

$= 180° - \angle \mathrm{CPD}$

すなわち　$\angle \mathrm{CAD} + \angle \mathrm{CPD} = 180°$

よって，四角形 ACPD は円に内接する。

7 チェバの定理により



$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \cdot \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}} = 1$

$\mathrm{AD} = \mathrm{AE}$

であるから

$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} \cdot \dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{DB}} = 1$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}} = \dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CE}}$

したがって　$\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{BD} : \mathrm{CE}$

よって，点 Q は BC を BD : CE に内分する。

8 (1) 弧 CD に対する円周角より

$\angle \mathrm{DBC} = \angle \mathrm{DAE}$　……①

また $\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{BDE} + \angle \mathrm{EDC}$

$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{ADB} + \angle \mathrm{BDE}$

仮定より，$\angle \mathrm{EDC} = \angle \mathrm{ADB}$ であるから

$\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{ADE}$　……②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{DBC} \backsim \triangle \mathrm{DAE}$

(2) (1) と同様にして，$\triangle \mathrm{DAB} \backsim \triangle \mathrm{DEC}$ が示される。

$\triangle \mathrm{DBC} \backsim \triangle \mathrm{DAE}$ より

$\mathrm{BD} : \mathrm{BC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AE}$

よって　$\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{BD}$　……①

$\triangle \mathrm{DAB} \backsim \triangle \mathrm{DEC}$ より

$\mathrm{AB} : \mathrm{BD} = \mathrm{EC} : \mathrm{CD}$

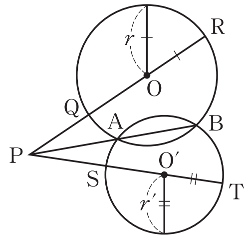
よって　$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} = \mathrm{EC} \cdot \mathrm{BD}$　……②

① と ② の辺々を加えると

$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CD} + \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC} = (\mathrm{AE} + \mathrm{EC}) \cdot \mathrm{BD}$

$= \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BD}$

9 次の図のように，直線 PO と円 O の交点を Q，R，直線 PO′ と円 O′ の交点を S，T とする。



円 O において，方べきの定理により

$\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{PR} = (\mathrm{PO} - r)(\mathrm{PO} + r) = \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB}$

同様に，円 O′ において

$\mathrm{PS} \cdot \mathrm{PT} = (\mathrm{PO}' - r')(\mathrm{PO}' + r') = \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB}$

これより

$(\mathrm{PO} - r)(\mathrm{PO} + r) = (\mathrm{PO}' - r')(\mathrm{PO}' + r')$

よって　$\mathrm{PO}^2 - r^2 = \mathrm{PO}'^2 - r'^2$

10 円 O，O′ の半径をそれぞれ r，r' $(r > r')$ として，作図の手順を示す。

$\boxed{1}$ OO′ を直径とする円をかく。

$\boxed{2}$ 点 O を中心とし，半径 $r - r'$ の円をかく。

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ の円と $\boxed{2}$ の円の交点の 1 つを A′ とし，A′ と O，A′ と O′ を結ぶ。
OA′ を延長した半直線と円 O の交点を A とする。

$\boxed{4}$ 点 A を通り，A′O′ に平行な直線 l を引く。

このとき，直線 l と円 O′ との共有点を B とすると，四角形 AA′O′B は長方形になるから，直線 l は円 O と点 A で接し，円 O′ と点 B で接する。
すなわち，直線 l は 2 円 O，O′ の共通外接線である。