新数学 II　P.126

1 節　微分係数と導関数

1　平均変化率

ねらい　関数 $y=f(x)$ において，x の変化量に対する y の変化量の割合について学びます。

関数を表す記号

$y=2x+1,\ y=x^2$ のように，y が x の関数であることを $y=f(x)$ のように表す。

関数 $y=f(x)$ において，$f(x)$ の式に $x=a$ を代入して得られる y の値を，$\boldsymbol{f(a)}$ で表す。

●関数の値を求めてみよう。

例 1　関数 $f(x)=x^2+2x$ において

$$f(3)=3^2+2\times3=15$$

$$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)=-1$$

ここに注意！

○ $f(-1)$

$=(-1)^2+2\times(-1)$

× $f(-1)$

$=-1^2+2\times-1$

負の数を代入するときは

(　)をつける。

問 1　関数 $f(x)=x^2-3x$ において，次の値を求めなさい。

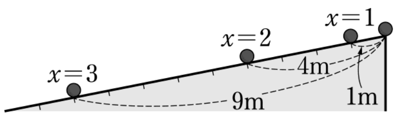
(1)　$f(1)$　　(2)　$f(2)$

(3)　$f(-1)$　　(4)　$f(-2)$

平均変化率

斜面を転がる球の速さは，時間とともに変化する。

ある斜面では，球が転がり始めてからの時間 x 秒と，転がった距離 ym の間に $y=x^2$ の関係が成り立っている。



この運動で，球が転がり始めて

1 秒後から 2 秒後までの平均の速さは

$$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3\ \text{(m/s)}$$

◀平均の速さ $=\dfrac{\text{距離}}{\text{時間}}$

2 秒後から 3 秒後までの平均の速さは

$$\frac{3^2-2^2}{3-2}=5\ \text{(m/s)}$$

◀3m/s は秒速 3m を表している。

である。

問 2　126 ページの運動で，球が転がり始めて 2 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

一般に，関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき

x の変化量は　　$b-a$

y の変化量は　　$f(b)-f(a)$

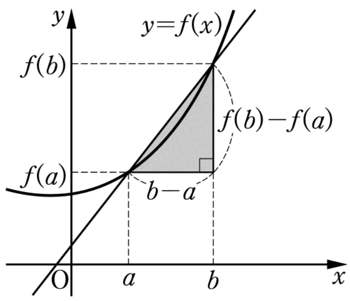
である。

このとき，x の変化量に対する y の変化量の割合

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，x の値が a から b まで変化するときの，関数 $f(x)$ の**平均変化率**という。

この値は，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(a,\ f(a))$，$(b,\ f(b))$ を通る直線の傾きに等しい。



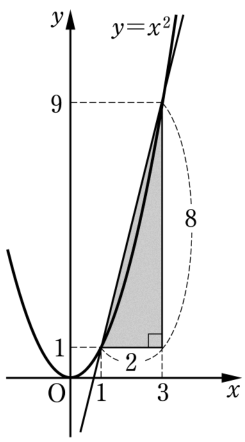
●平均変化率を求めてみよう。

例 2　関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が 1 から 3 まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{3-1}$$

$$=\frac{8}{2}$$

$$=4$$



➔p.136 復習問題1(1)

問 3　関数 $f(x)=2x^2$ において，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1)　1 から 3 まで

(2)　3 から 4 まで

(3)　-2 から 6 まで

新数学Ⅱ　P.128

2　微分係数

ねらい　x の変化量を限りなく 0 に近づけたときの平均変化率について考えます。

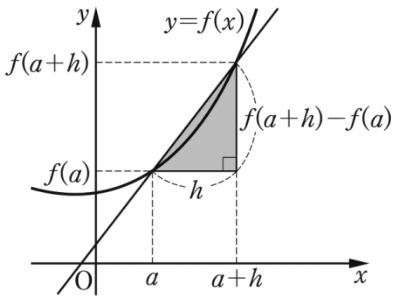
関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するとき

x の変化量は　　$(a+h)-a=h$

y の変化量は　　$f(a+h)-f(a)$

であるから，平均変化率は次のようになる。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

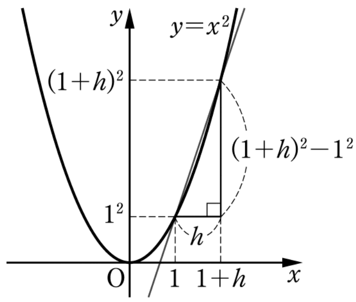


●平均変化率を求めてみよう。

例 3　関数 $f(x)=x^2$ において，x の値が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2\ -1^2}{h}$$

$$=\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\frac{h(2+h)}{h}=2+h$$



➔p.136 復習問題1(2)

極限値

例 3 で，h の値を 0.1, 0.01, 0.001, ⋯ のように限りなく 0 に近づけるとき，$2+h$ の値は次のようになる。

$h=0.1$　　のとき　　$2+h=2.1$

$h=0.01$　　のとき　　$2+h=2.01$

$h=0.001$　のとき　　$2+h=2.001$

⋮

このことから，h が限りなく 0 に近づくとき，$2+h$ の値は限りなく 2 に近づくことがわかる。この値 2 を

h が限りなく 0 に近づくときの $2+h$ の**極限値**

という。

このことを記号 lim を用いて次のように書く。

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

◀ $h=-0.1$ のとき
$2+h=1.9$
$h=-0.01$ のとき
$2+h=1.99$
⋮
h が負の値をとりながら限りなく 0 に近づくときも，$2+h$ の値は限りなく 2 に近づく。

◀極限値 2 は，126 ページの斜面で，球が転がり始めて 1 秒後の瞬間の速さを表している。

◀lim は極限を意味する limit の略であり，リミットと読む。

●極限値を求めてみよう。

例 4　(1)　$\lim_{h \to 0}(5+h)=5$　　(2)　$\lim_{h \to 0}(6+5h+h^2)=6$

◀(2)　h が限りなく 0 に近づくとき，$5h$，h^2 の値は限りなく 0 に近づく。

問 4　次の極限値を求めなさい。

(1)　$\lim_{h \to 0}(4+h)$　　(2)　$\lim_{h \to 0}(3+8h+h^2)$

微分係数

関数 $f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

である。この式で，h を限りなく 0 に近づけたときの極限値

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す。

微分係数

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

●微分係数を求めてみよう。

例 5　関数 $f(x)=x^2$ において，微分係数 $f'(2)$ を求めてみよう。

$$\begin{aligned} f(2+h)-f(2) &= (2+h)^2-2^2 \\ &= 4+4h+h^2-4 \\ &= 4h+h^2=h(4+h) \end{aligned}$$

よって，微分係数 $f'(2)$ は

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0}\frac{h(4+h)}{h}=\lim_{h \to 0}(4+h)=4 \end{aligned}$$

問 5　関数 $f(x)=2x^2$ において，次の微分係数を求めなさい。

(1)　$f'(2)$　　(2)　$f'(-3)$

3　導関数

ねらい　微分係数を簡単に求める方法を学びます。

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=h(2a+h)$$

であるから　$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

◀ $(a+h)^2-a^2$
$=a^2+2ah+h^2-a^2$
$=2ah+h^2$
$=h(2a+h)$

この式を用いれば，いろいろな a の値について $f'(a)$ の値を求めることができる。

●微分係数を求めてみよう。

例 6　関数 $f(x)=x^2$ の $x=3$ における微分係数 $f'(3)$ は，上の $f'(a)=2a$ の式に $a=3$ を代入すると

$$f'(3)=2\times 3=6$$

$f(x)=x^2$ について，上の $f'(a)=2a$ の式を用いて a の値における微分係数を求めると，次の表のようになる。

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

すなわち，a の値に対して $f'(a)$ の値が定まり，$f'(a)$ は a の関数になる。このとき，文字 a を x でおきかえて得られる関数 $f'(x)=2x$ を，関数 $f(x)=x^2$ の**導関数**という。

一般に，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で求められる。

導関数

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を**微分する**という。

新数学 II　P.131

● x^n の導関数を求めてみよう。

$\boxed{例 7}$　関数 $f(x)=x$ を微分してみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$\boxed{例 8}$　関数 $f(x)=x^3$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3$$

$$=h(3x^2+3xh+h^2)$$

よって　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

◀ $(x+h)^3-x^3$
$=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$
$=3x^2h+3xh^2+h^3$
$=h(3x^2+3xh+h^2)$

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

$\boldsymbol{y'}$，　$\{\boldsymbol{f(x)}\}'$

などの記号も用いられる。

◀関数 $y=x^2$ の導関数は $y'=2x$，$(x^2)'=2x$ などと表す。

すでに学んだように，$(x)'=1$，$(x^2)'=2x$，$(x^3)'=3x^2$ である。一般に，次の公式が成り立つ。

x^n の導関数
$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき　　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$

＋解説

1 小さくする

$(x^n)'=nx^{n-1}$

前に出す

関数 $f(x)=2$ を微分してみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0=0$$

同様にして，c を定数とするとき，関数 $f(x)=c$ の導関数は次のようになる。

関数 $\boldsymbol{f(x)=c}$ の導関数
$\boldsymbol{f'(x)=(c)'=0}$

新数学 II　P.132

導関数の計算

●いろいろな関数の導関数を求めてみよう。

例 9　関数 $f(x)=4x^2$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=4(x+h)^2-4x^2$$
$$=4h(2x+h)$$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}4(2x+h)$$
$$=4\times 2x=8x$$

◀ $4(x+h)^2-4x^2$
$=4(x^2+2xh+h^2)-4x^2$
$=4x^2+8xh+4h^2-4x^2$
$=8xh+4h^2$
$=4h(2x+h)$

$(x^2)'=2x$ であるから，例 9 より，次の式が成り立つ。

$$(4x^2)'=4(x^2)'$$

＋解説
$(4x^2)'=4(x^2)'$
定数を前に出す

例 10　関数 $f(x)=x^2+x$ を微分してみよう。

$$f(x+h)-f(x)=\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)$$
$$=h(2x+h+1)$$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h+1)$$
$$=2x+1$$

◀ $\{(x+h)^2+(x+h)\}$
$\qquad -(x^2+x)$
$=x^2+2xh+h^2+x+h$
$\qquad -x^2-x$
$=2xh+h^2+h$
$=h(2x+h+1)$

$(x^2)'=2x$，$(x)'=1$ であるから，例 10 より，次の式が成り立つ。

$$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$$

＋解説
$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$

一般に，次のことが成り立つ。

導関数の公式

$$\{kf(x)\}'=kf'(x) \qquad (k\text{ は定数})$$
$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$
$$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$$

$\boxed{\text{例題 1}}$
関数 $y=x^3-2x^2-3$ を微分しなさい。
$\boxed{\text{解}}$ $y'=(x^3-2x^2-3)'$ $=(x^3)'-(2x^2)'-(3)'$ $=(x^3)'-2(x^2)'-(3)'$ $=3x^2-2\times 2x-0=\mathbf{3x^2-4x}$

ここに注意！

○ $(x^3-2x^2-3)'$
$=3x^2-4x$

× $(x^3-2x^2-3)'$
$=3x^2-4x-3$

$(3)'=0$ であることに注意する。

$\boxed{\text{問 6}}$　次の関数を微分しなさい。

(1)　$y=3x+2$　　(2)　$y=x^2-4x+3$

(3)　$y=2x^3-5x^2$　　(4)　$y=-2x^3+3x^2-4x+3$

➔p.136 復習問題2(1), (2), (3)

$\boxed{\text{例題 2}}$
関数 $y=(x-1)(2x+3)$ を微分しなさい。
$\boxed{\text{解}}$ $y=(x-1)(2x+3)=2x^2+x-3$ であるから $y'=(2x^2+x-3)'$ $=(2x^2)'+(x)'-(3)'$ $=2(x^2)'+(x)'-(3)'$ $=2\times 2x+1-0=\mathbf{4x+1}$

◀まず，展開する。

$\boxed{\text{問 7}}$　次の関数を微分しなさい。

➔p.136 復習問題2(4), (5), (6)

(1)　$y=x(3x-1)$　　(2)　$y=(x+1)(x-2)$

(3)　$y=(2x+1)^2$　　(4)　$y=(x^2+1)(2x-1)$

$\boxed{\text{微分係数の計算}}$

微分係数 $f'(a)$ を求めるには，導関数 $f'(x)$ の x に a を代入すればよい。

●導関数を利用して，微分係数を求めてみよう。

$\boxed{\text{例 11}}$　関数 $f(x)=x^2+x-2$ について，$x=-3$ における微分係数 $f'(-3)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=2x+1$

よって　　$f'(-3)=2\times(-3)+1=-5$

◀**微分係数の求め方**

$f(x)$　（関数）

⬇微分する

$f'(x)$　（導関数）

⬇$x=a$ を代入

$f'(a)$　（微分係数）

$\boxed{\text{問 8}}$　関数 $f(x)=3x^2-2x+3$ について，$x=-2$, $x=1$ における微分係数をそれぞれ求めなさい。

➔p.136 復習問題3

4　接線

ねらい　関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数の意味を学びます。さらに，微分係数を利用して，接線の方程式を求めます。

微分係数と接線の傾き

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ $a,\ a+h$ である 2 点 A, B をとると，関数 $f(x)$ の a から $a+h$ までの平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

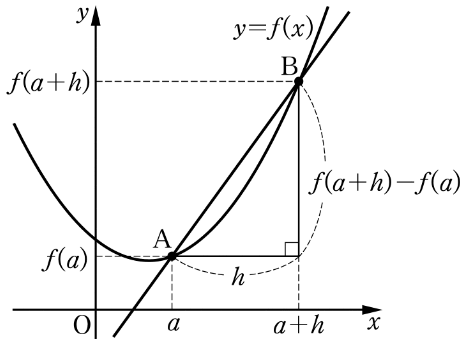
は，直線 AB の傾きを表している。

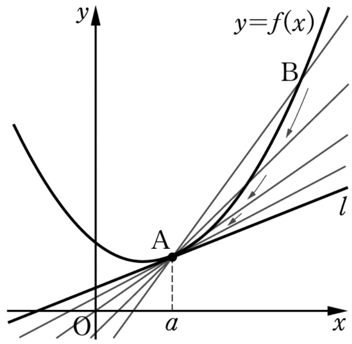
いま，h を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。
このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AB は，点 A を通り，傾きが $f'(a)$ の直線 l に限りなく近づく。

この直線 l を，点 A における曲線 $y=f(x)$ の**接線**といい，点 A を**接点**という。





微分係数と接線の傾き

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(a,\ f(a)\right)$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい。

●導関数を利用して，接線の傾きを求めてみよう。

例 12　曲線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは

$f(x)=x^2$ とおくと　　$f'(x)=2x$

$f'(3)=6$ であるから，6 である。

問 9　曲線 $y=2x^2$ 上の次の点における接線の傾きを求めなさい。

(1)　$(3,\ 18)$　　　　　　(2)　$(-1,\ 2)$

接線の方程式

2 章で，直線の方程式について学んでいる。通る点の座標と傾きを与えられた直線の方程式の求め方を復習しておこう。

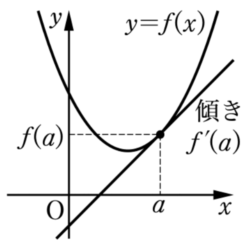
点 $(1,\ 2)$ を通り，傾きが 3 の直線の方程式は

$$y-2=3(x-1)$$

したがって　　$y=3x-1$

◀点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は
$y-y_1=m(x-x_1)$

このことを用いると，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(a,\ f(a)\right)$ における接線の傾きは $f'(a)$ であるから，点 $\left(a,\ f(a)\right)$ における接線の方程式は次のようになる。



接線の方程式

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

例題 3

曲線 $y=x^2+2$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めなさい。

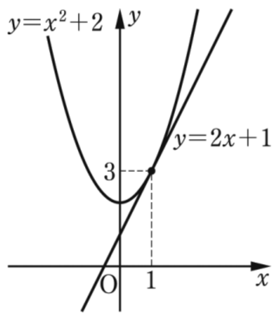
解　$f(x)=x^2+2$ とおくと，$f'(x)=2x$ であるから，点 $(1,\ 3)$ における接線の傾きは

$$f'(1)=2\times 1=2$$

よって，接線の方程式は　　$y-3=2(x-1)$

すなわち

$$\boldsymbol{y=2x+1}$$



問 10　曲線 $y=-x^2+1$ 上の次の点における接線の方程式を求めなさい。

(1)　$(2,\ -3)$　　　　　(2)　$(-1,\ 0)$

➔p.136 復習問題④(1)

問 11　曲線 $y=x^2+2x$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めなさい。

➔p.136 復習問題④(2)

新数学 II　P.136

復習問題

□ **1** 関数 $f(x) = 4x^2$ において，x の値が次のように変化するときの平均変化率を求めなさい。

(1) 1 から 3 まで

(2) -2 から $-2+h$ まで

平均変化率
↩p.127 例 2
p.128 例 3

□ **2** 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = -2x + 5$

(2) $y = -3x^2 + 2x - 1$

(3) $y = 2x^3 - 4x^2 + 1$

(4) $y = (x+3)(x-1)$

(5) $y = (2x-3)^2$

(6) $y = (x+2)(x^2 - 3x + 1)$

導関数の計算
↩p.133 例題 1
p.133 例題 2

□ **3** 次の関数について，かっこの中に示された x の値における微分係数を求めなさい。

(1) $f(x) = x^2 + 4x - 1$ $(x = -3)$

(2) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 2$ $(x = 2)$

微分係数の計算
↩p.133 例 11

□ **4** 次の曲線について，与えられた曲線上の点における接線の方程式を求めなさい。

(1) $y = 3x^2$ $(-1,\ 3)$

(2) $y = 2x^2 - 3x + 2$ $(2,\ 4)$

接線
↩p.135 例題 3