新数学 II　P.102

1 節　指数関数

1　指数の拡張

ねらい　数学 I では，正の整数の範囲で指数について学びました。ここでは，指数の範囲を整数全体に広げて考えます。

$a \times a \times a = a^3$ のように，a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい，a^n で表す。このとき，n を a^n の**指数**という。また，a，a^2，a^3，$\cdots$ をまとめて a の**累乗**という。

＋解説

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{個}} = a^{n}$$

a^{n} ←指数

◀ $a^1 = a$

一般に，m，n が正の整数のとき，次の**指数法則**が成り立つ。

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}}, \quad \boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}, \quad \boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$$

●指数法則を用いて計算してみよう。

例 1　(1)　$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$

(2)　$(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$

(3)　$(a^2 b)^4 = (a^2)^4 b^4 = a^{2\times 4} b^4 = a^8 b^4$

◀ $a^3 \times a^5$
$= (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a)$

問 1　次の計算をしなさい。

(1)　$a^6 \times a^2$　　(2)　$(a^5)^4$　　(3)　$(a^3 b)^5$

a^0，a^{-n}

指数が 0 や負の整数のときの累乗をどう定めるか考えてみよう。

たとえば，10，100，1000，10000，$\cdots$ は，10^1，10^2，10^3，10^4，$\cdots$ のように，10^n の形で表される。これらの数は，指数 n が 1 増えるごとに 10 倍になり，指数 n が 1 減るごとに $\frac{1}{10}$ 倍になる。この規則が，指数が 0 や負の整数のときも成り立つように，10^0，10^{-1}，10^{-2}，$\cdots$ を右のように定める。

$$\begin{aligned}
10000 &= 10^4 \\
1000 &= 10^3 \\
100 &= 10^2 \\
10 &= 10^1 \\
1 &= 10^0 \\
\frac{1}{10} &= \frac{1}{10^1} = 10^{-1} \\
\frac{1}{100} &= \frac{1}{10^2} = 10^{-2} \\
\frac{1}{1000} &= \frac{1}{10^3} = 10^{-3}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{10}$ 倍していく

指数が 1 減っていく

一般に，0 や負の整数の指数について，次のように定める。

a^0，a^{-n}

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき　$\boldsymbol{a^0 = 1}$，$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

● 0 や負の整数の指数を用いないで表してみよう。

例 2　(1)　$3^0 = 1$　　(2)　$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

問 2　次の $\square$ にあてはまる数を入れなさい。　➜p.111 復習問題①

(1)　$4^{\square} = 1$　　(2)　$5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$　　(3)　$a^{\square} = \frac{1}{a^7}$

0 や負の整数の指数について，上のように定めると，次のような計算ができる。

(1)　$a^5 \times a^{-2} = a^5 \times \frac{1}{a^2} = a^3$　　→ $a^{5+(-2)}$ に等しい　　◀ $a^5 \times a^{-2} = a^{5+(-2)}$

(2)　$a^5 \div a^{-2} = a^5 \div \frac{1}{a^2} = a^5 \times a^2 = a^7$　　→ $a^{5-(-2)}$ に等しい　　◀ $a^5 \div a^{-2} = a^{5-(-2)}$

(3)　$(a^5)^{-2} = \frac{1}{(a^5)^2} = \frac{1}{a^{10}} = a^{-10}$　　→ $a^{5\times(-2)}$ に等しい　　◀ $(a^5)^{-2} = a^{5\times(-2)}$

(4)　$(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2}$　　→ $a^{-2}b^{-2}$ に等しい　　◀ $(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$

一般に，m, n がどのような整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n},\quad a^m \div a^n = a^{m-n},}$$

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn},\quad (ab)^n = a^n b^n}$$

●指数法則を用いて計算してみよう。

例 3　(1)　$10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3 = 1000$

(2)　$2^{-3} \div 2^{-7} = 2^{-3-(-7)} = 2^4 = 16$

(3)　$(3^{-3})^2 = 3^{-3\times2} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

問 3　次の計算をしなさい。　➜p.111 復習問題②

(1)　$2^{-2} \times 2^{-3}$　　(2)　$3^{-3} \div 3^{-2}$　　(3)　$(2^{-2})^3$

新数学 II　P.104

2　累乗根

ねらい　n 乗すると a になる数について学びます。また，整数全体の範囲で考えた指数を，さらに分数の範囲に広げて考えます。

2 を 3 乗すると 8 になる。この数 2 を 8 の **3 乗根**という。
一般に，n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数を a の $\boldsymbol{n}$ **乗根**という。また，2 乗根，3 乗根，4 乗根，…を
まとめて**累乗根**という。

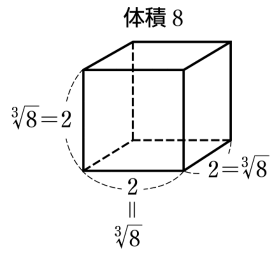
◀ 2 乗根を平方根，3 乗根を立方根ともいう。

与えられた正の数 a に対して，3 乗すると a になる正の数を $\sqrt[3]{a}$ で表す。たとえば

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

である。$\sqrt[3]{a}$ は，a の 3 乗根である。

◀ 体積が 8 の立方体の 1 辺の長さは $\sqrt[3]{8}$ である。



●いろいろな数の 3 乗根を求めてみよう。

例 4　(1)　$3^3 = 27$ であるから　　$\sqrt[3]{27} = 3$

(2)　$6^3 = 216$ であるから　　$\sqrt[3]{216} = 6$

◀ 2)216
2)108
2)　54
3)　27
3)　　9
　　　3

問 4　次の値を求めなさい。

(1)　$\sqrt[3]{64}$　　　　(2)　$\sqrt[3]{125}$

一般に，n が正の整数で，$a > 0$ のとき，n 乗して a となる正の数を $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ で表す。このとき，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$$
$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = a}$$

◀ $\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く。

● $\sqrt[n]{\ }$ で表された数の値を求めてみよう。

例 5　(1)　$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$　　　(2)　$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

問 5　次の値を求めなさい。

(1)　$\left(\sqrt[4]{3}\right)^4$　　　(2)　$\sqrt[5]{100000}$

◀(2)　$100000 = 10^5$

累乗根の性質

$a>0,\ b>0$ のとき，平方根について次のことが成り立った。

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

◀ $\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}$
$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

同様に，次の公式が成り立つ。

累乗根の積と商

$a>0,\ b>0$ で，n が正の整数のとき

［1］ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　［2］ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

●累乗根の積と商の公式を用いて計算してみよう。

例 6 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(2) $\sqrt[4]{12}\div\sqrt[4]{4}=\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\dfrac{12}{4}}=\sqrt[4]{3}$

問 6 次の計算をしなさい。 ➔p.111 復習問題3

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}$　　(2) $\sqrt[4]{32}\div\sqrt[4]{2}$

上の公式［1］を用いて，$\sqrt[4]{a}$ の 3 乗を計算してみよう。

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{a}\right)^3&=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{a}\\&=\sqrt[4]{a\times a}\times\sqrt[4]{a}\\&=\sqrt[4]{a\times a\times a}=\sqrt[4]{a^3}\end{aligned}$$

一般に，次の公式が成り立つ。

累乗根の累乗

$a>0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

＋解説
$(\sqrt[■]{a})^{●}=\sqrt[■]{a^{●}}$

●累乗根の累乗の公式を用いて計算してみよう。

例 7 (1) $\left(\sqrt[7]{a}\right)^3=\sqrt[7]{a^3}$

(2) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{(5^2)^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$

問 7 次の計算をしなさい。 ➔p.111 復習問題4

(1) $\left(\sqrt[5]{a}\right)^4$　　(2) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$

分数の指数

指数が分数のときにも指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つように，指数の意味を拡張しよう。

上の指数法則が，$m = \frac{1}{3}$，$n = 3$ のときも成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$$

これは，$a^{\frac{1}{3}}$ が a の 3 乗根であることを表しているから

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

であることがわかる。

そこで，$a > 0$ で，n が正の整数のとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

◀ $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

と定めると

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

一般に，次のように定める。

分数の指数

$a > 0$ で，m，n が正の整数のとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$$

＋解説

$$a^{\frac{●}{■}} = \sqrt[■]{a^{●}}$$

$$a^{-\frac{●}{■}} = \frac{1}{\sqrt[■]{a^{●}}}$$

●分数の指数で表された数の値を求めてみよう。

例 8　(1)　$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$　　(2)　$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

(3)　$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(4)　$5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

問 8　次の値を求めなさい。

➜p.111 復習問題 5

(1)　$7^{\frac{1}{5}}$　　(2)　$4^{\frac{3}{2}}$　　(3)　$3^{-\frac{2}{5}}$

問 9　次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表しなさい。ただし，$a > 0$ とする。

(1)　$\sqrt[5]{a}$　　(2)　$\sqrt[3]{a^4}$

(3)　$\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$　　(4)　$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

分数の指数を 106 ページのように定めると，指数がどのような分数や整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

指数法則

$a > 0$，$b > 0$ で，p，q が分数や整数のとき

［1］　$\boldsymbol{a^p \times a^q = a^{p+q}}$　　［2］　$\boldsymbol{a^p \div a^q = a^{p-q}}$

［3］　$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$　　［4］　$\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$

●指数法則を用いて計算してみよう。

例 9　(1)　$4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$

(2)　$5^{\frac{7}{4}} \div 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$

(3)　$\left(\sqrt[5]{3^2}\right)^{10} = \left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{10} = 3^{\frac{2}{5}\times 10} = 3^4 = 81$

問 10　次の計算をしなさい。ただし，$a > 0$ とする。　➔p.111 復習問題6(1), (2)

(1)　$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{4}}$　　(2)　$a^{\frac{8}{3}} \div a^{\frac{2}{3}}$　　(3)　$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

例題 1

次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4}$　　(2)　$\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8}$

解　(1)　$\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{6}{3}}$

$= 3^2 = \mathbf{9}$

◀$\sqrt[n]{a^m}$ は，$a^{\frac{m}{n}}$ の形になおしてから計算する。

(2)　$\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8} = \sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{2^3}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{3}{6}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{2}{2}}$

$= 2^1 = \mathbf{2}$

◀$2^{●}$ の形にそろえる。

問 11　次の計算をしなさい。　➔p.111 復習問題6(3), (4)

(1)　$\sqrt[3]{25} \times \sqrt[6]{25}$　　(2)　$\sqrt[4]{2^9} \div \sqrt[8]{2^2}$

(3)　$\sqrt{27} \times \sqrt[4]{3^2}$　　(4)　$\sqrt[3]{16} \div \sqrt[6]{4}$

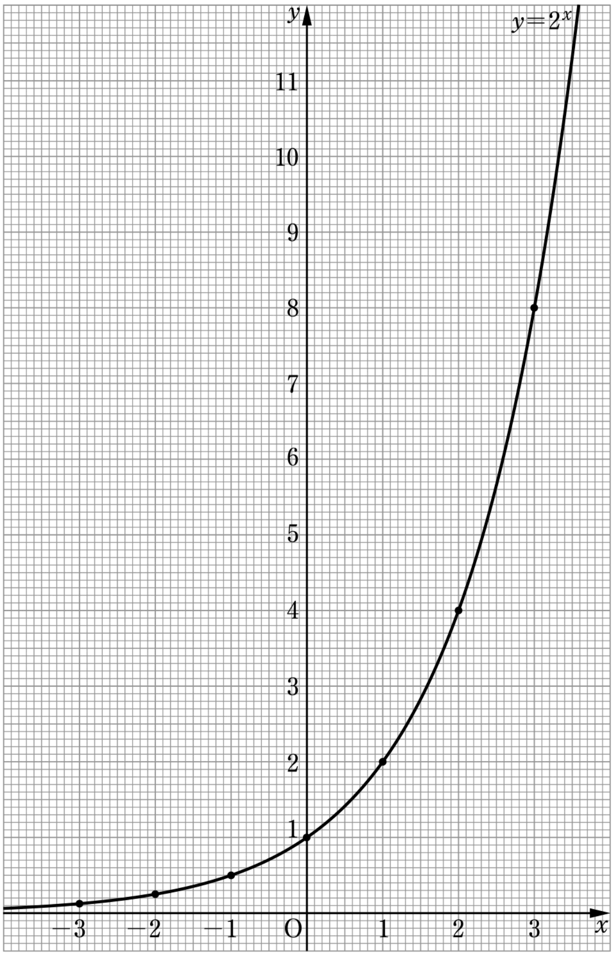
3　指数関数とそのグラフ

ねらい　$y=2^x$ や $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のような関数のグラフについて学びます。さらに，この関数のグラフの性質を利用して数の大小を調べます。

関数 $y=2^x$ のグラフはどのように表されるかを調べてみよう。
x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=2^x$	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$

この表をもとに，$y=2^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になる。



関数 $y=2^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 (0，1)，(1，2) を通る。
② x 軸より上側にある。
つまり，$y>0$ の範囲にある。
③ x の値が減少すると，x 軸に限りなく近づいていくので，x 軸がグラフの漸近線となる。
④ x の値が増加すると，y の値も増加する。

一般に，a を 1 以外の正の数とするとき

$$\boldsymbol{y=a^x}$$

で表される関数を，a を**底**とする x の**指数関数**という。

◀上の関数 $y=2^x$ は，2 を底とする指数関数である。

● a が 1 より小さい正の数のときの，$y = a^x$ のグラフを調べてみよう。

$\boxed{\text{例 10}}$　指数関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくために，x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\cdots$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$

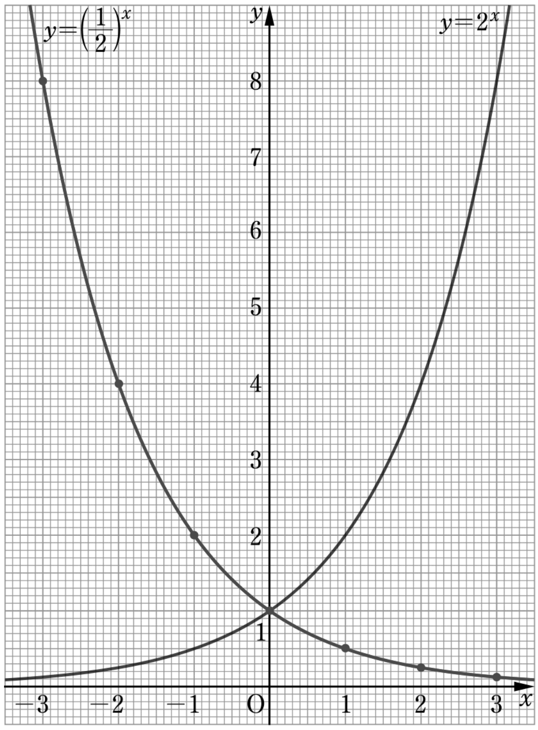
例 10 の表をもとに，指数関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になり，このグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 $(0,\ 1)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ を通る。

② $y > 0$ の範囲にある。

③ x 軸がグラフの漸近線となる。

④ x の値が増加すると，y の値は減少する。



また，右の図からわかるように，関数 $y = 2^x$ のグラフと関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。

一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

指数関数 $y = a^x$ のグラフ

［1］　2 点 $(0,\ 1)$, $(1,\ a)$ を通る。

［2］　$y > 0$ の範囲にある。

［3］　x 軸がグラフの漸近線となる。

［4］　$a > 1$ のとき，x の値が増加すると y の値も増加する。
　　　$0 < a < 1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

$\boxed{\text{問 12}}$　右の表を完成し，指数関数 $y = 3^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを，上の図にかきなさい。

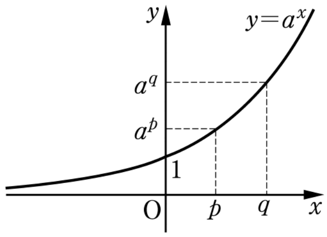
x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$y = 3^x$	$\cdots$						$\cdots$
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\cdots$						$\cdots$

指数関数の利用

指数関数 $y = a^x$ のグラフから，次のことがわかる。

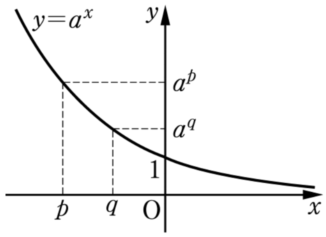
(1)　$\boldsymbol{a > 1}$ のとき

$$\boldsymbol{p < q \iff a^p < a^q}$$



(2)　$\boldsymbol{0 < a < 1}$ のとき

$$\boldsymbol{p < q \iff a^p > a^q}$$



◀ $A \iff B$ は，A と B が同じ内容であることを表す。

例題 2

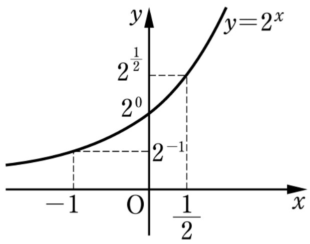
$2^{\frac{1}{2}}$，2^{-1}，2^0 を小さい方から順に並べなさい。

解　指数を小さい順に並べると　　-1，0，$\frac{1}{2}$

底 2 は 1 より大きいから

$$2^{-1} < 2^0 < 2^{\frac{1}{2}}$$

よって　　$\boldsymbol{2^{-1}}$，$\boldsymbol{2^0}$，$\boldsymbol{2^{\frac{1}{2}}}$



問 13　次の数を小さい方から順に並べなさい。

➜p.111 復習問題7

(1)　3，3^{-2}，$3^{\frac{2}{3}}$　　　　(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

◀(2)　底 $\frac{1}{4}$ は 1 より小さいことに注意する。

例題 3

方程式 $9^x = 27$ を解きなさい。

解　$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$，$27 = 3^3$ より

$$3^{2x} = 3^3$$

よって　　$2x = 3$

したがって　　$\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$

◀両辺の底を同じ数にする。

問 14　次の方程式を解きなさい。

➜p.111 復習問題8

(1)　$7^x = 49$　　(2)　$4^x = 8$　　(3)　$5^x = 1$

復習問題

□ **1**　次の値を求めなさい。

指数の拡張
↩p.103 例 2

(1)　5^{-2}　　(2)　8^0　　(3)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

□ **2**　次の計算を行い，結果を負の整数の指数を用いないで表しなさい。
ただし，$a > 0,\ b > 0$ とする。

指数の拡張
↩p.103 例 3

(1)　$a^2 \times a^{-4}$　　(2)　$a^3 \div a^{-2}$

(3)　$(a^{-3})^2$　　(4)　$(a^{-2}b)^{-4}$

□ **3**　次の計算をしなさい。

累乗根の積と商
↩p.105 例 6

(1)　$\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{2}$　　(2)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$　　(3)　$\sqrt[6]{6} \div \sqrt[6]{2}$

□ **4**　次の値を求めなさい。

累乗根の累乗
↩p.105 例 7

(1)　$\left(\sqrt[6]{25}\right)^3$　　(2)　$\left(\sqrt[4]{9}\right)^2$　　(3)　$\left(\sqrt[6]{8}\right)^2$

□ **5**　次の値を求めなさい。

分数の指数
↩p.106 例 8

(1)　$64^{\frac{1}{3}}$　　(2)　$3^{\frac{3}{4}}$　　(3)　$16^{-\frac{1}{2}}$

□ **6**　次の計算をしなさい。

指数法則
↩p.107 例 9
p.107 例題 1

(1)　$7^{\frac{3}{5}} \times 7^{\frac{2}{5}}$　　(2)　$\left(\sqrt[4]{9}\right)^6$

(3)　$\sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{9}$　　(4)　$\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9}$

□ **7**　次の数を小さい方から順に並べなさい。

指数関数の利用
↩p.110 例題 2

(1)　$2^{\frac{3}{2}},\ 2^2,\ 2^{-\frac{1}{3}}$　　(2)　$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}},\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

□ **8**　次の方程式を解きなさい。

指数関数の利用
↩p.110 例題 3

(1)　$2^x = 16$　　(2)　$3^x = \frac{1}{27}$　　(3)　$8^x = 4$