新数学 II　P.078

1 節　三角関数

1　一般角

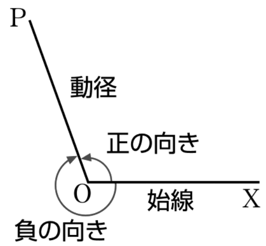
ねらい　私たちの身のまわりには，時計の針や観覧車など，回転運動するものがいろいろあります。ここでは，ある点を中心とした回転の量について学びます。

平面上で，点 O を中心として半直線 OP が回転するとき

この半直線 OP を**動径**

その回転のはじめの位置を示す半直線 OX を**始線**

という。



回転には 2 つの向きがあり

時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**

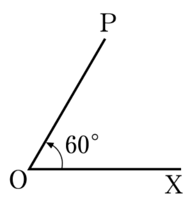
時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**

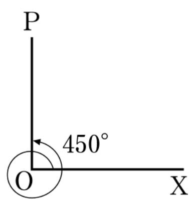
とする。

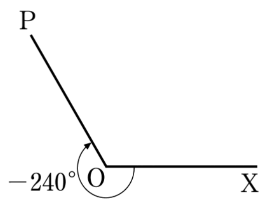
角を回転の量としてとらえると，360° よりも大きい角や，−60° などの負の角も考えることができる。このように，拡張して考えた角を**一般角**という。

●一般角の動径 OP を図示してみよう。

例 1　(1)　60°　　(2)　450°　　(3)　−240°

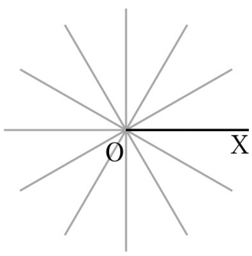


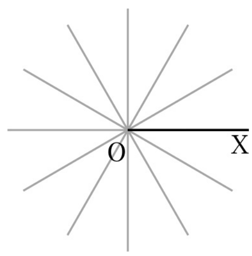


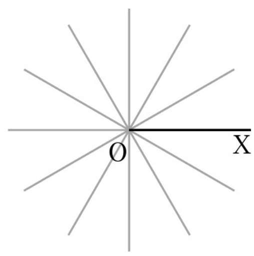


問 1　例 1 にならって，次の角の動径 OP を図示しなさい。

(1)　150°　　(2)　420°　　(3)　−480°



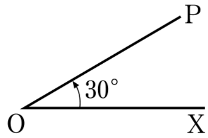


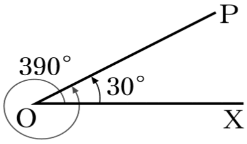


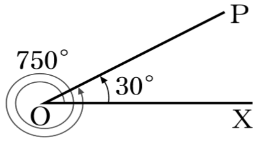
新数学 II　P.079

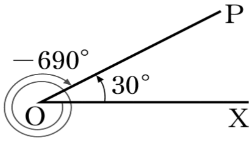
動径の表す一般角

$390°$, $750°$, $-690°$ の動径の位置は，$30°$ の動径の位置と同じである。









ここで

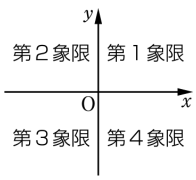
$390° = 30° + 360° \times 1$　　$750° = 30° + 360° \times 2$　　$-690° = 30° + 360° \times (-2)$

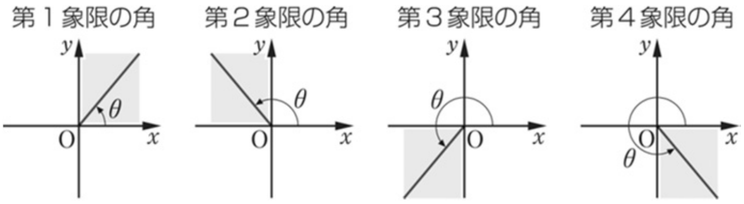
と表すことができる。

一般に，次のことがいえる。

動径の表す一般角
角 α の動径の表す一般角は
$\boldsymbol{\alpha + 360° \times n}$　　(nは整数)

一般角 θ の動径が第 1 象限にあるとき，θ を **第 1 象限の角**という。ほかの象限についても同様である。

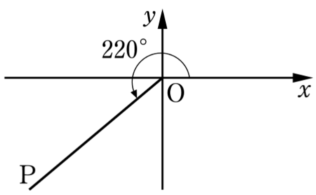


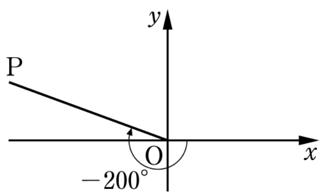


◀動径が座標軸上となる 0°，90°，180°，270° などの角は，どの象限にも含まれない。

●角が第何象限の角であるか調べてみよう。

例 2　(1)　$220°$ は第 3 象限の角である。　　(2)　$-200°$ は第 2 象限の角である。





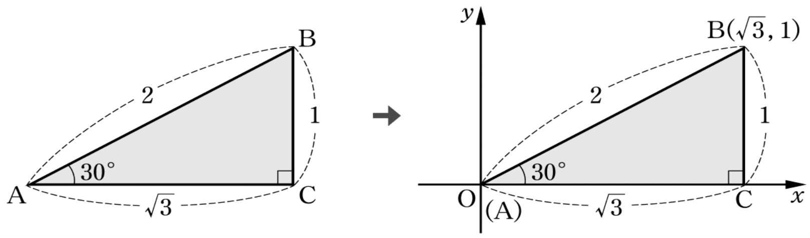
問 2　次の角は，第何象限の角であるか答えなさい。

(1)　$380°$　　　　(2)　$-750°$

2　三角関数

ねらい　数学 I では，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲の三角比について学びました。ここでは，一般角に拡張して三角比を考えます。

　30° の三角比の値は，次のように座標を使って考えることができる。



　このとき，座標を使うと

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

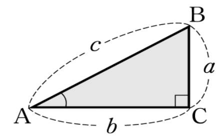
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{B の } x \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{B の } x \text{ 座標}}$$

とみることができる。

　このことを用いて，一般角 θ の三角比を考えてみよう。

◀ 三角比



$\sin A = \dfrac{a}{c}$

$\cos A = \dfrac{b}{c}$

$\tan A = \dfrac{a}{b}$

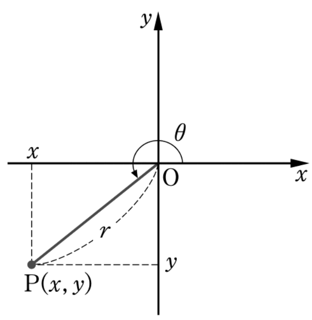
➡ 巻末 いままでに学んだこと
⑬ 三角比

　右の図のように，座標平面上で x 軸の正の部分を始線とし，一般角 θ の動径上に $\mathrm{OP} = r$ となる点 P をとり，その座標を $(x,\ y)$ とするとき

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定める。これらの値は，長さ r に関係なく，θ の大きさによって定まるから θ の関数である。

　$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を θ の**三角関数**という。



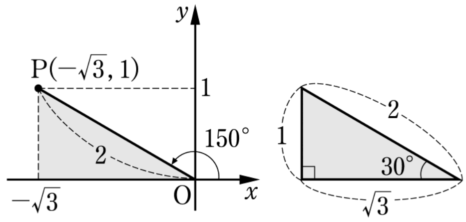
三角関数の定義

$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

◀ $\tan\theta$ は，$x = 0$ となるような θ に対しては定義されない。

●一般角の三角関数の値を求めてみよう。

例 3　(1)　150° の動径上に OP = 2 となる点 P をとると，
$P(-\sqrt{3},\ 1)$ であるから

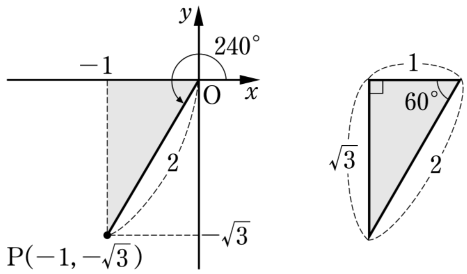


$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　240° の動径上に OP = 2 となる点 P をとると，
$P(-1, -\sqrt{3})$ であるから

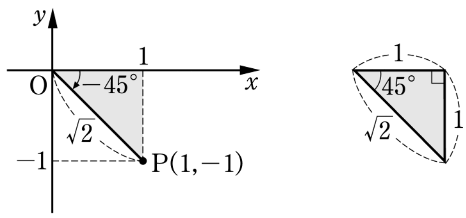


$$\sin 240^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

(3)　−45° の動径上に $OP = \sqrt{2}$ となる点 P をとると，$P(1,\ -1)$ であるから



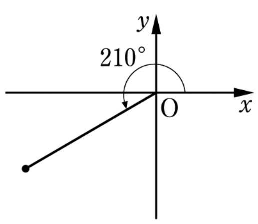
$$\sin(-45^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

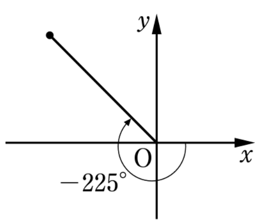
$$\cos(-45^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(-45^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

問 3　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(1)　210°　　　(2)　−225°





象限	1	2	3	4
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

➜p.91 復習問題1

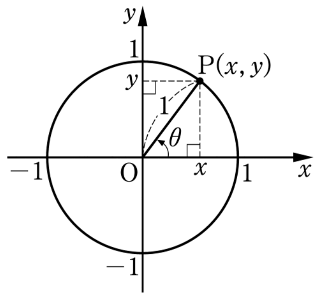
3　三角関数の相互関係

ねらい　一般角 θ の $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の間に成り立つ相互関係を考えます。

原点を中心とする半径 1 の円を**単位円**という。
角 θ の動径と単位円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，
80 ページの三角関数の定義により

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

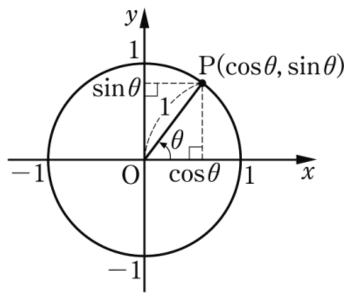
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$



よって　　$\boldsymbol{x = \cos\theta}$，　$\boldsymbol{y = \sin\theta}$

このとき，点 P の座標 $(x,\ y)$ は，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。

このことを用いて，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の間に成り立つ関係について考えてみよう。



$\tan\theta = \frac{y}{x}$ より

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

さらに，点 P が単位円の周上にあることから

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

よって　　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

◀原点を中心とする半径 1 の円の方程式は
$x^2 + y^2 = 1$

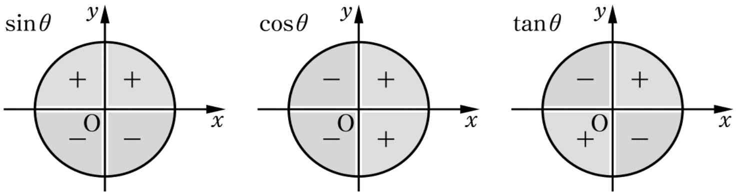
◀$(\sin\theta)^2$ は $\sin^2\theta$,
$(\cos\theta)^2$ は $\cos^2\theta$ と書く。

このように，一般角の三角関数についても，数学 I で学んだ三角比と同様に，次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係

［1］　$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　　［2］　$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値の正負は，θ がどの象限の角であるかによって定まり，図示すると次のようになる。



例題 1

θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

解　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25}$$

θ が第 3 象限の角であるから　　$\sin\theta < 0$

したがって

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$= -\mathbf{\frac{4}{5}}$$

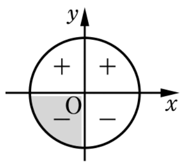
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{4}{3}}$$

◀ $\sin\theta$ の符号



◀ 1 つの三角関数の値から ほかの 2 つの三角関数の 値を求めることができる。

問 4　次の問に答えなさい。

➔p.91 復習問題2

(1)　θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(2)　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{5}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

4　三角関数のグラフ

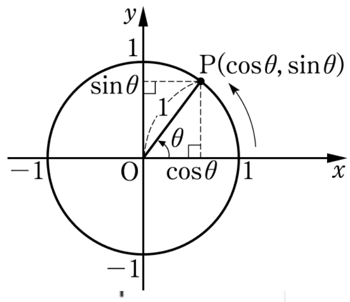
ねらい　三角関数の値は角 θ の値によって変化します。ここでは，三角関数のグラフをかいて，その特徴を学びます。

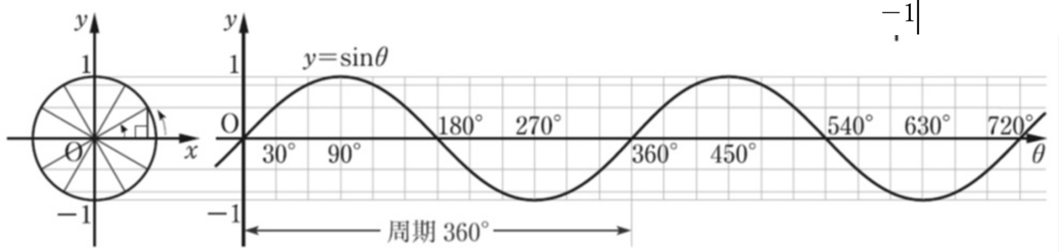
$y=\sin\theta$ のグラフ

単位円と角 θ の動径との交点 P の座標は，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。すなわち，点 P の y 座標が $\sin\theta$ であることから

$$y=\sin\theta$$

のグラフは，次のようになり，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ である。





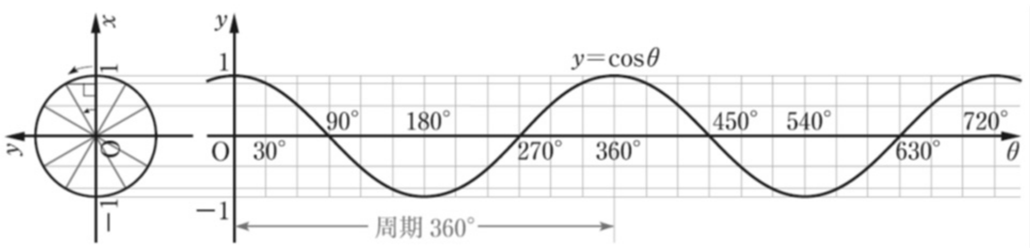
$y=\sin\theta$ のグラフは，360° ごとに同じ形をくり返している。
このことを，$y=\sin\theta$ は 360° を**周期**とする**周期関数**であるという。

$y=\cos\theta$ のグラフ

$y=\sin\theta$ のグラフの場合と同様に考えると，点 P の x 座標が $\cos\theta$ であることから

$$y=\cos\theta$$

のグラフは，次のようになり，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ である。



$y=\cos\theta$ も 360° を周期とする周期関数である。

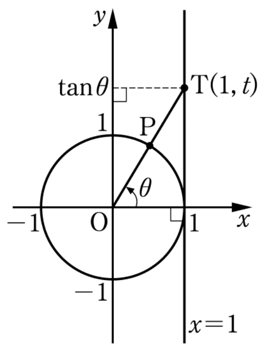
◀ $y=\cos\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-90°$ だけ平行移動したものである。

$y = \tan\theta$ のグラフ

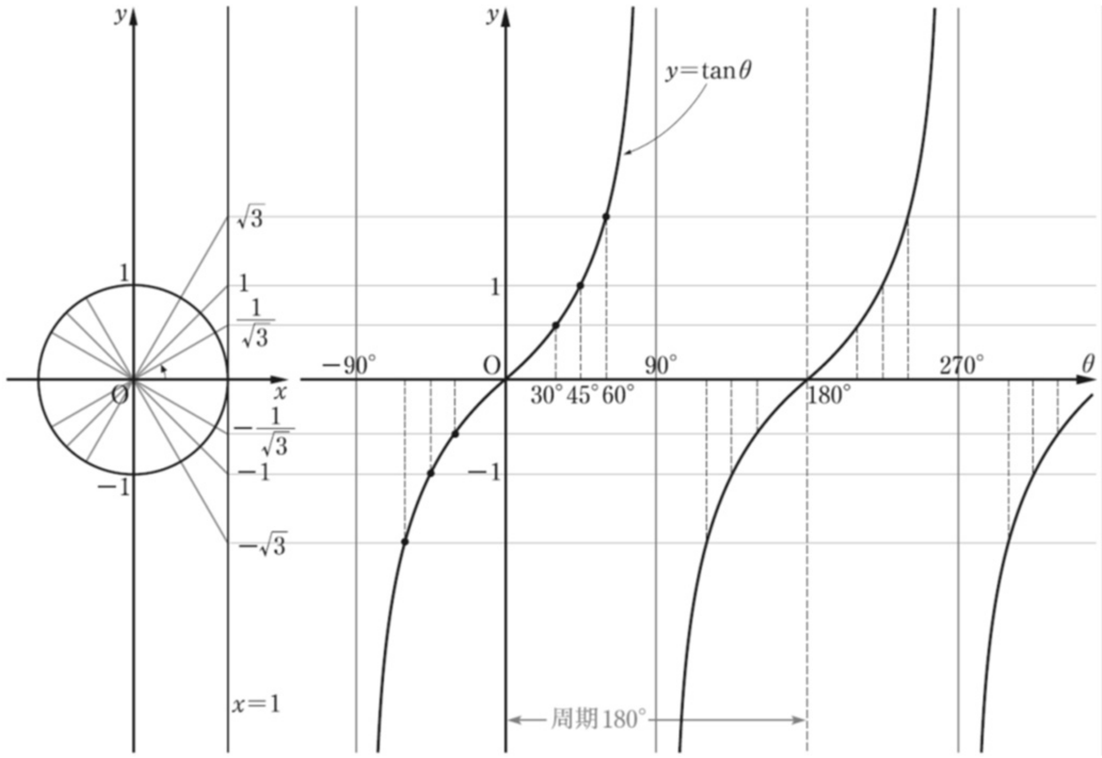
右の図で，角 θ の動径を OP とする。

直線 OP と直線 $x = 1$ との交点を T(1, t) とすれば

$$\tan\theta = \frac{t}{1} = t$$



すなわち，点 T の y 座標が $\tan\theta$ に等しい。これより，$y = \tan\theta$ のグラフは次のようになり，$\tan\theta$ はすべての実数値をとることがわかる。



$y = \tan\theta$ は 180° を周期とする周期関数である。

$y = \tan\theta$ のグラフは y 軸方向にどこまでものびる曲線で，θ の値が 90° に近づくと，直線 $\theta = 90°$ に限りなく近づいていく。

このとき，直線 $\theta = 90°$ をグラフの**漸近線**という。

なお，直線 $\theta = -90°$, $\theta = 270°$, $\theta = -270°$, $\theta = 450°$, $\theta = -450°$ なども $y = \tan\theta$ のグラフの漸近線である。

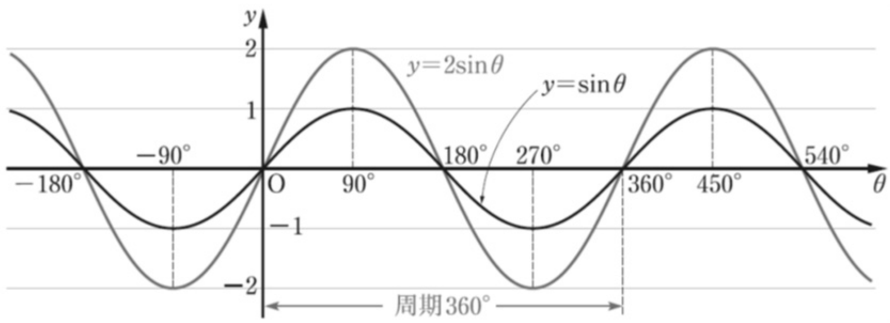
◀ tan 90°，tan(−90°)，
tan 270°，tan(−270°)，
tan 450°，tan(−450°)
などの値はない。

いろいろな三角関数のグラフ(1)

● y 軸方向に拡大・縮小した三角関数のグラフをかいてみよう。

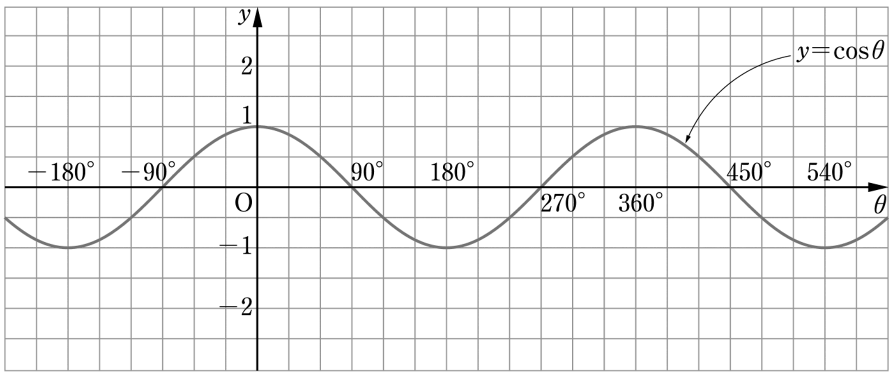
例 4　$y = 2\sin\theta$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを
y 軸方向に 2 倍したものである。
周期は $y = \sin\theta$ の周期と同じ 360° である。

◀ $y = n\sin\theta$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向に n 倍したものである。



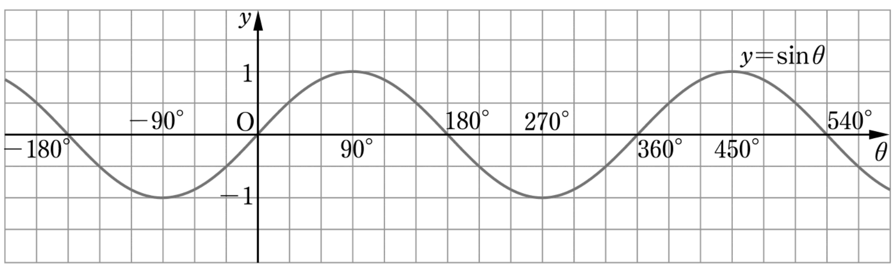
問 5　$y = 2\cos\theta$ のグラフをかきなさい。また，その周期を答えなさい。

➔p.91 復習問題3



問 6　$y = \frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフをかきなさい。また，その周期を答えなさい。

◀ $y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍する。



いろいろな三角関数のグラフ(2)

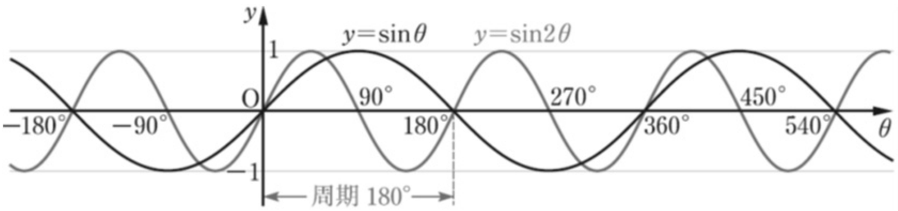
● θ 軸方向に拡大・縮小した三角関数のグラフをかいてみよう。

例 5　$y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

θ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$\cdots$	$150°$	$\cdots$	$180°$	$\cdots$
2θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$\cdots$	$300°$	$\cdots$	$360°$	$\cdots$
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$

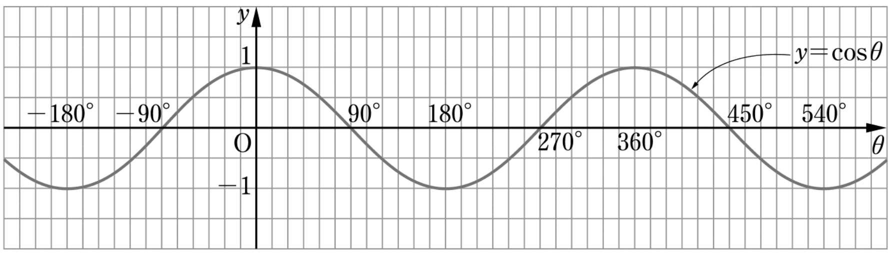
上の表から，$y=\sin 2\theta$ のグラフは下の図のようになり，これは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍したものである。周期は $y=\sin\theta$ の周期 $360°$ の $\frac{1}{2}$ 倍で，$180°$ である。

◀ $y=\sin n\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{n}$ 倍したもので，周期は $\frac{360°}{n}$ である。



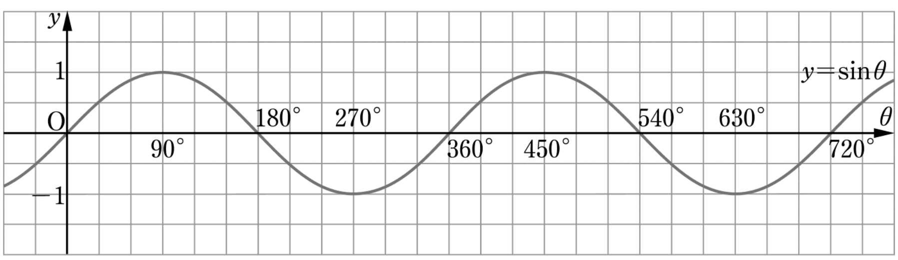
問 7　$y=\cos 2\theta$ のグラフをかきなさい。また，その周期を答えなさい。

➔p.91 復習問題4



問 8　$y=\sin\frac{\theta}{2}$ のグラフをかきなさい。また，その周期を答えなさい。

◀ $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に 2 倍する。



5　三角関数の性質

ねらい　三角関数が周期関数であることはすでに学びました。ここでは，さらにいくつかの三角関数の性質を学びます。

$\boldsymbol{\theta + 360^\circ \times n}$ の三角関数

角 $\theta + 360^\circ \times n$ の動径と角 θ の動径は一致する。

よって，次の公式が成り立つ。ただし，n は整数である。

$\boldsymbol{\theta + 360^\circ \times n}$ の三角関数

$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + 360^\circ \times n) = \cos\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ \times n) = \tan\theta$$

● $\boldsymbol{\theta + 360^\circ \times n}$ の三角関数の公式を利用して，三角関数の値を求めてみよう。

例 6　(1)　$\sin 390^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ \times 1) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

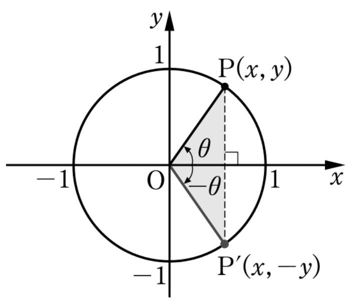
(2)　$\cos 765^\circ = \cos(45^\circ + 360^\circ \times 2) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

問 9　次の三角関数の値を求めなさい。

(1)　$\sin 405^\circ$　　(2)　$\cos 750^\circ$　　(3)　$\tan 420^\circ$

$\boldsymbol{-\theta}$ の三角関数

右の図で，角 $-\theta$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすれば，点 P′ の座標は $(x,\ -y)$ となる。



よって　$\sin(-\theta) = -y = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = x = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \dfrac{-y}{x} = -\dfrac{y}{x} = -\tan\theta$

$\boldsymbol{-\theta}$ の三角関数

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

● $-\theta$ の三角関数の公式を利用して，三角関数の値を求めてみよう。

例 7　(1)　$\sin(-45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　$\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

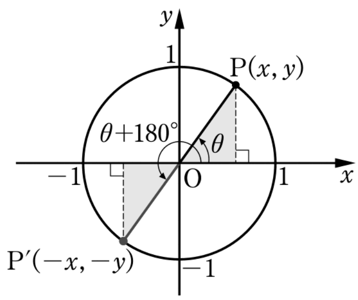
問 10　次の三角関数の値を求めなさい。

(1)　$\sin(-60°)$　　(2)　$\cos(-30°)$　　(3)　$\tan(-45°)$

$\theta + 180°$ の三角関数

右の図で，角 $\theta + 180°$ の動径 OP' は，角 θ の動径 OP を原点のまわりに 180° 回転したものである。

点 P と点 P' は原点に関して対称であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$とすれば，点 P' の座標は$(-x,\ -y)$となる。



よって　$\sin(\theta + 180°) = -y = -\sin\theta$

$\cos(\theta + 180°) = -x = -\cos\theta$

$\tan(\theta + 180°) = \dfrac{-y}{-x} = \dfrac{y}{x} = \tan\theta$

$\theta + 180°$ の三角関数

$\boldsymbol{\sin(\theta + 180°) = -\sin\theta}$
$\boldsymbol{\cos(\theta + 180°) = -\cos\theta}$　　$\boldsymbol{\tan(\theta + 180°) = \tan\theta}$

● $\theta + 180°$の三角関数の公式を利用して，三角関数の値を求めてみよう。

例 8　(1)　$\sin 210° = \sin(30° + 180°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

(2)　$\cos 240° = \cos(60° + 180°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

問 11　次の三角関数の値を求めなさい。

(1)　$\sin 240°$　　(2)　$\cos 225°$　　(3)　$\tan 210°$

新数学 II　P.090

チャレンジ

三角関数を含む方程式

ねらい　ここでは，$\sin\theta$ や $\cos\theta$ の三角関数の値から角度を求めることを学びます。

例題 1

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めなさい。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　　　(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

解　(1)　単位円周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の P，P′ の 2 点である。

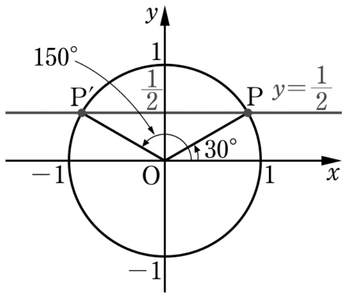
動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲では

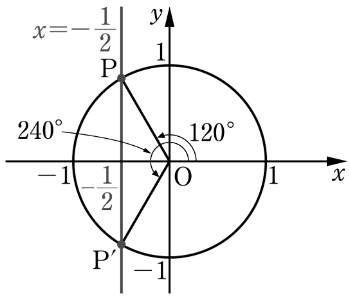
$\boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 150^\circ}$

(2)　単位円周上で，x 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の P，P′ の 2 点である。

動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲では

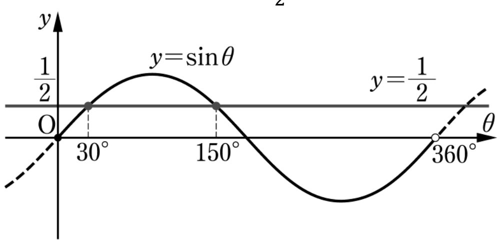
$\boldsymbol{\theta = 120^\circ,\ 240^\circ}$



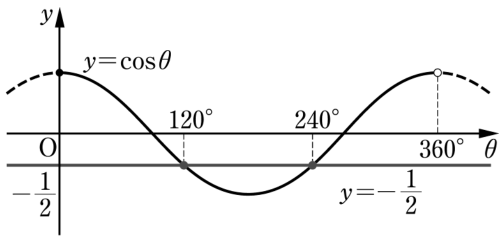


例題 1 の解は，(1)関数 $y = \sin\theta$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ が交わる θ の値，(2)関数 $y = \cos\theta$ のグラフと直線 $y = -\frac{1}{2}$ が交わる θ の値を示している。

(1)



(2)



問 1　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めなさい。

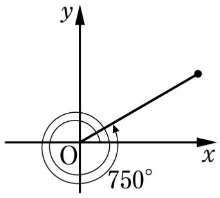
(1)　$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

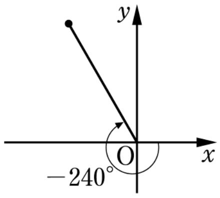
復習問題

□ **1**　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

三角関数
p.81 例 3

(1)　$750°$　　(2)　$-240°$





□ **2**　次の問に答えなさい。

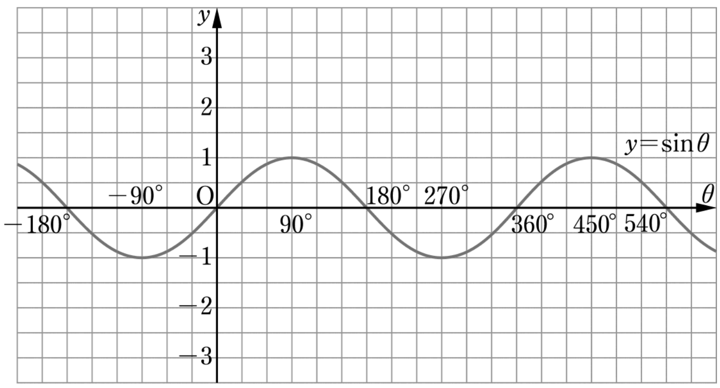
三角関数の相互関係
p.83 例題 1

(1)　θ が第 4 象限の角で，$\sin\theta = -\frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(2)　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

□ **3**　$y = 3\sin\theta$ のグラフをかきなさい。また，その周期を答えなさい。

いろいろな三角関数のグラフ (1)
p.86 例 4



□ **4**　$y = \sin 3\theta$ のグラフは下の図の①，②，③のどれか答えなさい。

いろいろな三角関数のグラフ (2)
p.87 例 5