新数学 II　P.010

1 節　整式・分数式の計算

1　３次の乗法公式と因数分解
$\boxed{\text{ねらい}}$　数学 I では，2 次の乗法公式や因数分解について学びました。ここでは，3 次の乗法公式や因数分解について学びます。

$\boxed{\text{乗法公式}}$

$(a+b)^3$ を展開してみよう。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

◀ $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

よって，次の公式 [1] が成り立つ。また，$(a-b)^3$ についても，同様に次の公式 [2] が成り立つ。

乗法公式
[1]　$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
[2]　$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

●乗法公式を利用して，式を展開してみよう。

$\boxed{\text{例 1}}$　$(\triangle+\bigcirc)^3 = \triangle^3+3\times\triangle^2\times\bigcirc+3\times\triangle\times\bigcirc^2+\bigcirc^3$

⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮

(1)　$(x+2)^3 = x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3$

$= x^3+6x^2+12x+8$

$(\triangle-\bigcirc)^3 = \triangle^3-3\times\triangle^2\times\bigcirc+3\times\triangle\times\bigcirc^2-\bigcirc^3$

⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮

(2)　$(3x-y)^3 = (3x)^3-3\times(3x)^2\times y+3\times 3x\times y^2-y^3$

$= 27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$

$\boxed{\text{問 1}}$　次の式を展開しなさい。　➔p.17 復習問題①

(1)　$(x+3)^3$　　(2)　$(x-1)^3$

(3)　$(3x+1)^3$　　(4)　$(2x-y)^3$

(5)　$(2x+3)^3$　　(6)　$(3x-2)^3$

因数分解

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開してみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\
&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\
&=a^3+b^3
\end{aligned}
$$

◀ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

この結果から, 次の公式 [1] が得られる。また, a^3-b^3 についても, 同様に次の公式 [2] が成り立つ。

因数分解の公式

［1］　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

［2］　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

●因数分解の公式を利用して，式を因数分解してみよう。

例 2　　$\triangle^3+\bigcirc^3=(\triangle+\bigcirc)(\triangle^2-\triangle\times\bigcirc+\bigcirc^2)$

⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮

(1)　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\times 2+2^2)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)$

$\triangle^3-\bigcirc^3=(\triangle-\bigcirc)(\triangle^2+\triangle\times\bigcirc+\bigcirc^2)$

⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮　⋮

(2)　$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)\{(2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2\}$

$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

問 2　次の式を因数分解しなさい。

➔p.17 復習問題2

(1)　x^3+1　　　(2)　x^3-64

(3)　$8x^3+1$　　　(4)　$27x^3-y^3$

(5)　$8x^3+27y^3$　　　(6)　$64x^3-27y^3$

◀(1)　$1=1^3$

(2)　$64=4^3$

2　二項定理

ねらい　$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ の展開式については，ここまでに学びました。ここでは，$(a+b)^n$ の展開式について考えます。

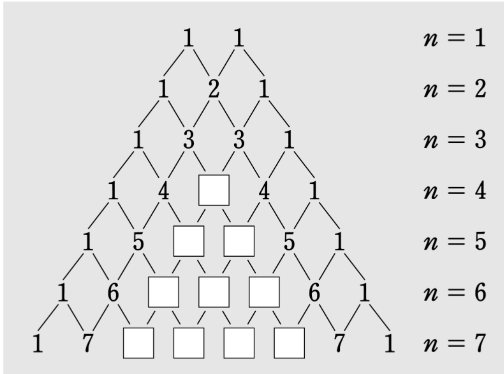
パスカルの三角形

$(a+b)^n$ の展開式を調べてみよう。

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



右の図のように，$(a+b)^n$ の展開式の係数を三角形状に並べたものを，**パスカルの三角形**という。

パスカルの三角形では，次の規則が成り立っている。

①　各段の両端の数はつねに 1 である。

②　各段の両端以外の数は，その左上の数と右上の数をたしたものである。

この規則にしたがってパスカルの三角形をつくっていくと，n がいくつであっても，$(a+b)^n$ の展開式をつくることができる。

問 3　上のパスカルの三角形で，空らんをうめ，$n=7$ の段まで完成しなさい。

●パスカルの三角形を利用して，式を展開してみよう。

例 3　(1)　$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$　◀係数は 1　4　6　4　1

(2)　$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$　◀係数は 1　5　10　10　5　1

問 4　パスカルの三角形を利用して，$(a+b)^6$ を展開しなさい。

二項定理

一般に，記号 $_n\mathrm{C}_r$ を次のように定める。

> **$_n\mathrm{C}_r$**
>
> $$_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{個}}}{r(r-1)\times\cdots\times3\times2\times1},\qquad {}_n\mathrm{C}_0 = 1$$

◀ $_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$

● $_n\mathrm{C}_r$ の値を求めてみよう。

例 4　(1)　$_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$　　(2)　$_6\mathrm{C}_3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$

＋解説

$$_5\mathrm{C}_2 = \frac{\overbrace{5\times4}^{2\text{個}}}{2\times1}$$

2 から 1 まで

問 5　次の値を求めなさい。

(1)　$_6\mathrm{C}_2$　　(2)　$_5\mathrm{C}_3$　　(3)　$_7\mathrm{C}_5$

パスカルの三角形の $n=4$ の段の数は，次のようになる。

$_4\mathrm{C}_0 = 1$，$_4\mathrm{C}_1 = \frac{4}{1} = 4$，$_4\mathrm{C}_2 = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$，

$_4\mathrm{C}_3 = \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} = 4$，　$_4\mathrm{C}_4 = \frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = 1$

$(a+b)^4$ の展開式は，$_n\mathrm{C}_r$ を用いると次のように表される。

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\\ &= {}_4\mathrm{C}_0a^4 + {}_4\mathrm{C}_1a^3b + {}_4\mathrm{C}_2a^2b^2 + {}_4\mathrm{C}_3ab^3 + {}_4\mathrm{C}_4b^4\end{aligned}$$

一般に，次の**二項定理**が成り立つ。

	1	1		
	1	2	1	
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

⬇

$_1\mathrm{C}_0$	$_1\mathrm{C}_1$			
$_2\mathrm{C}_0$	$_2\mathrm{C}_1$	$_2\mathrm{C}_2$		
$_3\mathrm{C}_0$	$_3\mathrm{C}_1$	$_3\mathrm{C}_2$	$_3\mathrm{C}_3$	
$_4\mathrm{C}_0$	$_4\mathrm{C}_1$	$_4\mathrm{C}_2$	$_4\mathrm{C}_3$	$_4\mathrm{C}_4$

> **二項定理**
>
> $$\begin{aligned}(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots\\ + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n\end{aligned}$$

●二項定理を利用して，式を展開してみよう。

例 5　$(a+b)^5$

$$\begin{aligned}&= {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

◀ $_5\mathrm{C}_4 = \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} = 5$

問 6　二項定理を利用して，$(a+b)^6$ を展開しなさい。

➔p.17 復習問題3

3　分数式とその計算

ねらい　分母に文字を含んだ式の計算について学びます。

分数式とその約分

$\frac{1}{a}$, $\frac{x-2}{x+5}$ などのように，分母に文字を含んだ式を**分数式**という。

分数式でも，分数と同じように分母と分子に共通な因数がある場合は，次のように**約分**できる。

$$\frac{A\cancel{C}}{B\cancel{C}}=\frac{A}{B}$$

◀ $\frac{4}{6}=\frac{2\times\cancel{2}}{3\times\cancel{2}}=\frac{2}{3}$

●分数式を約分してみよう。

例 6　(1) $\frac{y}{xy}=\frac{1}{x}$　　(2) $\frac{4ab^2}{6a^3b}=\frac{2b}{3a^2}$

◀(2) $\frac{2\times\cancel{2}\times\cancel{a}\times b\times\cancel{b}}{3\times\cancel{2}\times\cancel{a}\times a\times a\times\cancel{b}}$

(3) $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x+2}$

◀因数分解してから約分する。

問 7　次の分数式を約分しなさい。

(1) $\frac{2x}{3xy}$　　(2) $\frac{4a^5b^2}{12a^2b^3}$　　(3) $\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$

乗法と除法

分数式の乗法と除法は，分数の場合と同じように，次のように計算する。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

◀ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}$

$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$

逆数をかける。

●分数式の乗法を計算してみよう。

例 7　(1) $\frac{x-1}{x+1}\times\frac{x+1}{x-3}=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-3)}=\frac{x-1}{x-3}$

(2) $\frac{x+1}{x-2}\times\frac{x^2-2x}{x^2+3x+2}=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x-2}}\times\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)}$

$=\frac{x}{x+2}$

◀分母や分子が因数分解できるときは，因数分解してから計算する。

新数学 II　P.015

問 8　次の式を計算しなさい。

→p.17 復習問題④

(1)　$\dfrac{x+1}{2x-1}\times\dfrac{2x-1}{x+5}$　　　(2)　$\dfrac{x+2}{x^2-3x}\times\dfrac{x-3}{x^2+4x+4}$

◀(2)　因数分解してから計算する。

●分数式の除法を計算してみよう。

例 8　(1)　$\dfrac{x+5}{x-2}\div\dfrac{x+5}{x-6}=\dfrac{\cancel{x+5}}{x-2}\times\dfrac{x-6}{\cancel{x+5}}$

$=\dfrac{x-6}{x-2}$

(2)　$\dfrac{x}{x^2-1}\div\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\times\dfrac{\cancel{x+1}}{x-2}$

$=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$

問 9　次の式を計算しなさい。

→p.17 復習問題⑤

(1)　$\dfrac{x}{x-6}\div\dfrac{x}{x+1}$　　　(2)　$\dfrac{x-7}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-49}{x+3}$

◀(2)　因数分解してから計算する。

分母が等しい分数式の加法と減法

分母が等しい分数式の加法や減法は，分子の和や差を求めればよい。

$\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$，　$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

◀$\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{4+1}{7}=\dfrac{5}{7}$

$\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{4-1}{7}=\dfrac{3}{7}$

●分母が等しい分数式の加法や減法を計算してみよう。

例 9　(1)　$\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{(x-1)+5}{x-2}$

$=\dfrac{x+4}{x-2}$

(2)　$\dfrac{x-1}{x^2+x+2}-\dfrac{3}{x^2+x+2}=\dfrac{(x-1)-3}{x^2+x+2}$

$=\dfrac{x-4}{x^2+x+2}$

問 10　次の式を計算しなさい。

→p.17 復習問題⑥

(1)　$\dfrac{x-5}{x+3}+\dfrac{x^2+1}{x+3}$　　　(2)　$\dfrac{2x+1}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}$

通分

2 つ以上の分数式の分母をそろえることを**通分**という。

◀ $\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$

$\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$

●分数式を通分してみよう。

例 10　$\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$ を通分してみよう。

共通の分母は $(x+1)(x+2)$ とすればよいから

$$\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}$$

問 11　次の分数式を通分しなさい。

(1)　$\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{x+3}$　　(2)　$\frac{1}{x+1}$, $\frac{2}{(x+1)(x-5)}$

分母が異なる分数式の加法と減法

分母が異なる分数式の加法や減法は，通分してから計算する。

◀ $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$

●分母が異なる分数式の加法や減法を計算してみよう。

例 11　$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$$=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)-2}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+3)}$$

◀約分できるときは約分する。

$$=\frac{1}{x+3}$$

問 12　次の式を計算しなさい。

➜p.17 復習問題7

(1)　$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}$　　(2)　$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x+3)(x-1)}$

(3)　$\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x+1}$　　(4)　$\frac{1}{x-2}-\frac{3}{(x-2)(x+1)}$

復習問題

□ 1　次の式を展開しなさい。

(1)　$(x-2)^3$　　(2)　$(2x+y)^3$

乗法公式
p.10 例 1

□ 2　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$64x^3-1$　　(2)　x^3+8y^3

因数分解
p.11 例 2

□ 3　二項定理を利用して，$(a+b)^7$ を展開しなさい。

二項定理
p.13 例 5

□ 4　次の式を計算しなさい。

(1)　$\frac{x-1}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x^2-1}$

(2)　$\frac{x+1}{x^2+3x}\times\frac{x^2-9}{x^2+2x+1}$

分数式の乗法
p.14 例 7

□ 5　次の式を計算しなさい。

(1)　$\frac{x-4}{x+3}\div\frac{x^2-16}{x^2+3x}$

(2)　$\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3}\div\frac{x-5}{x+3}$

分数式の除法
p.15 例 8

□ 6　次の式を計算しなさい。

(1)　$\frac{x^2-1}{x+2}+\frac{x+4}{x+2}$

(2)　$\frac{2x-1}{x^2-3}-\frac{x+5}{x^2-3}$

分母が等しい分数式の加法と減法
p.15 例 9

□ 7　次の式を計算しなさい。

(1)　$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}$

(2)　$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

(3)　$\frac{7}{(x+3)(x-4)}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}$

分母が異なる分数式の加法と減法
p.16 例 11