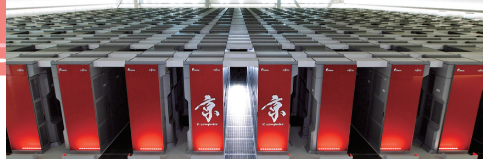


1節　指数関数

1 指数の拡張

ねらい　数学Ⅰでは，正の整数の範囲で指数について学びました。ここでは，指数の範囲を整数全体に広げて考えます。

$a\times a\times a=a^3$ のように，a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい，a^n で表す。このとき，n を a^n の **指数**（しすう） という。また，a，a^2，a^3，$\cdots$ をまとめて a の **累乗**（るいじょう） という。

＋解説

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{個}}=a^n$$

a^n ←指数

◀ $a^1=a$

一般（いっぱん）に，m，n が正の整数のとき，次の **指数法則**（しすうほうそく） が成り立つ。

$$\boldsymbol{a^m\times a^n=a^{m+n},\qquad (a^m)^n=a^{mn},\qquad (ab)^n=a^nb^n}$$

●指数法則を用いて計算してみよう。

例1

(1)　$a^3\times a^5=a^{3+5}=a^8$

(2)　$(a^2)^3=a^{2\times3}=a^6$

(3)　$(a^2b)^4=(a^2)^4b^4=a^{2\times4}b^4=a^8b^4$

◀ $a^3\times a^5$
$=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$

問1　次の計算をしなさい。

(1)　$a^6\times a^2$　　(2)　$(a^5)^4$　　(3)　$(a^3b)^5$

a^0，a^{-n}

指数が0や負の整数のときの累乗をどう定めるか考えてみよう。

たとえば，10，100，1000，10000，$\cdots$ は，10^1，10^2，10^3，10^4，$\cdots$ のように，10^n の形で表される。これらの数は，指数 n が1増えるごとに10倍になり，指数 n が1減るごとに $\dfrac{1}{10}$ 倍になる。この規則が，指数が0や負の整数のときも成り立つように，10^0，10^{-1}，10^{-2}，$\cdots$ を右のように定める。

$$\begin{aligned}
10000&=10^4\\
1000&=10^3\\
100&=10^2\\
10&=10^1\\
1&=10^0\\
\frac{1}{10}&=\frac{1}{10^1}=10^{-1}\\
\frac{1}{100}&=\frac{1}{10^2}=10^{-2}\\
\frac{1}{1000}&=\frac{1}{10^3}=10^{-3}
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{10}$ 倍していく　　指数が1減っていく

一般に，0 や負の整数の指数について，次のように定める。

a^0，a^{-n}

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき　$a^0 = 1$，$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

●0 や負の整数の指数を用いないで表してみよう。

例 2　(1)　$3^0 = 1$　　(2)　$2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

問 2　次の □ にあてはまる数を入れなさい。　➡p.111 復習問題1

(1)　$4^{\square} = 1$　　(2)　$5^{-3} = \dfrac{1}{5^{\square}}$　　(3)　$a^{\square} = \dfrac{1}{a^7}$

0 や負の整数の指数について，上のように定めると，次のような計算ができる。

(1)　$a^5 \times a^{-2} = a^5 \times \dfrac{1}{a^2} = a^3$　→ $a^{5+(-2)}$ に等しい　◀$a^5 \times a^{-2} = a^{5+(-2)}$

(2)　$a^5 \div a^{-2} = a^5 \div \dfrac{1}{a^2} = a^5 \times a^2 = a^7$　→ $a^{5-(-2)}$ に等しい　◀$a^5 \div a^{-2} = a^{5-(-2)}$

(3)　$(a^5)^{-2} = \dfrac{1}{(a^5)^2} = \dfrac{1}{a^{10}} = a^{-10}$　→ $a^{5\times(-2)}$ に等しい　◀$(a^5)^{-2} = a^{5\times(-2)}$

(4)　$(ab)^{-2} = \dfrac{1}{(ab)^2} = \dfrac{1}{a^2b^2} = \dfrac{1}{a^2} \times \dfrac{1}{b^2}$　→ $a^{-2}b^{-2}$ に等しい　◀$(ab)^{-2} = a^{-2}b^{-2}$

一般に，m，n がどのような整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

$$a^m \times a^n = a^{m+n},\quad a^m \div a^n = a^{m-n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn},\quad (ab)^n = a^n b^n$$

●指数法則を用いて計算してみよう。

例 3　(1)　$10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3 = 1000$

(2)　$2^{-3} \div 2^{-7} = 2^{-3-(-7)} = 2^4 = 16$

(3)　$(3^{-3})^2 = 3^{-3\times 2} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{1}{729}$

問 3　次の計算をしなさい。　➡p.111 復習問題2

(1)　$2^{-2} \times 2^{-3}$　　(2)　$3^{-3} \div 3^{-2}$　　(3)　$(2^{-2})^3$

2 累乗根

ねらい　n 乗すると a になる数について学びます。また，整数全体の範囲で考えた指数を，さらに分数の範囲に広げて考えます。

　2 を 3 乗すると 8 になる。この数 2 を 8 の **3 乗根**（じょうこん）という。一般に，n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数を a の **n 乗根**（じょうこん）という。また，2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$ をまとめて **累乗根**（るいじょうこん）という。

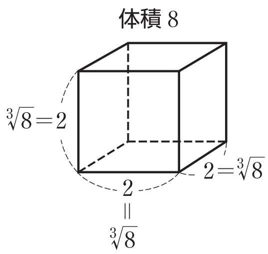
◀ 2 乗根を平方根，3 乗根を立方根ともいう。

　与えられた正の数 a に対して，3 乗すると a になる正の数を $\sqrt[3]{a}$ で表す。たとえば

$$\sqrt[3]{8}=2$$

である。$\sqrt[3]{a}$ は，a の 3 乗根である。

◀ 体積が 8 の立方体の 1 辺の長さは $\sqrt[3]{8}$ である。



●いろいろな数の 3 乗根を求めてみよう。

例 4　(1)　$3^3=27$ であるから　$\sqrt[3]{27}=3$

(2)　$6^3=216$ であるから　$\sqrt[3]{216}=6$

◀
2) 216
2) 108
2) 54
3) 27
3) 9
　 3

問 4　次の値を求めなさい。

(1)　$\sqrt[3]{64}$　　(2)　$\sqrt[3]{125}$

　一般に，n が正の整数で，$a>0$ のとき，n 乗して a となる正の数を $\sqrt[n]{a}$ で表す。このとき，次のことが成り立つ。

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

◀ $\sqrt[2]{a}$ は，ふつう $\sqrt{a}$ と書く。

● $\sqrt[n]{}$ で表された数の値を求めてみよう。

例 5　(1)　$(\sqrt[3]{5})^3=5$　　(2)　$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

問 5　次の値を求めなさい。

(1)　$(\sqrt[4]{3})^4$　　(2)　$\sqrt[5]{100000}$

◀(2)　$100000=10^5$

累乗根の性質

$a>0, b>0$ のとき，平方根について次のことが成り立った。

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

◀ $\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\sqrt{15}$

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$

同様に，次の公式が成り立つ。

累乗根の積と商

$a>0$，$b>0$ で，n が正の整数のとき

[1] $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　[2] $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

●累乗根の積と商の公式を用いて計算してみよう。

例6 (1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

(2) $\sqrt[4]{12}\div\sqrt[4]{4}=\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}}=\sqrt[4]{\frac{12}{4}}=\sqrt[4]{3}$

問6 次の計算をしなさい。 →p.111 復習問題3

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}$　　(2) $\sqrt[4]{32}\div\sqrt[4]{2}$

上の公式 [1] を用いて，$\sqrt[4]{a}$ の 3 乗を計算してみよう。

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{a})^3&=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{a}\\&=\sqrt[4]{a\times a}\times\sqrt[4]{a}\\&=\sqrt[4]{a\times a\times a}=\sqrt[4]{a^3}\end{aligned}$$

一般に，次の公式が成り立つ。

累乗根の累乗

$a>0$ で，m，n が正の整数のとき　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

＋解説

$(\sqrt[\blacksquare]{a})^{\bullet}=\sqrt[\blacksquare]{a^{\bullet}}$

●累乗根の累乗の公式を用いて計算してみよう。

例7 (1) $(\sqrt[7]{a})^3=\sqrt[7]{a^3}$

(2) $(\sqrt[4]{25})^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{(5^2)^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$

問7 次の計算をしなさい。 →p.111 復習問題4

(1) $(\sqrt[5]{a})^4$　　(2) $(\sqrt[6]{4})^3$

分数の指数

指数が分数のときにも指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つように，指数の意味を拡張しよう。

上の指数法則が，$m=\dfrac{1}{3}$，$n=3$ のときも成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$$

これは，$a^{\frac{1}{3}}$ が a の3乗根であることを表しているから

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

であることがわかる。

そこで，$a>0$ で，n が正の整数のとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

◀ $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

と定めると

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$$

一般に，次のように定める。

分数の指数

$a>0$ で，m，n が正の整数のとき

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$$

＋解説

$$a^{\frac{●}{■}} = \sqrt[■]{a^{●}}$$

$$a^{-\frac{●}{■}} = \frac{1}{\sqrt[■]{a^{●}}}$$

●分数の指数で表された数の値を求めてみよう。

例8

(1) $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$　　(2) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$

(3) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(4) $5^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

問8 次の値を求めなさい。

→p.111 復習問題5

(1) $7^{\frac{1}{5}}$　　(2) $4^{\frac{3}{2}}$　　(3) $3^{-\frac{2}{5}}$

問9 次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表しなさい。ただし，$a>0$ とする。

(1) $\sqrt[5]{a}$　　(2) $\sqrt[3]{a^4}$

(3) $(\sqrt[4]{a})^5$　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

分数の指数を 106 ページのように定めると，指数がどのような分数や整数であっても，次の指数法則が成り立つ。

指数法則

$a>0$，$b>0$ で，p，q が分数や整数のとき

[1] $a^p \times a^q = a^{p+q}$　　[2] $a^p \div a^q = a^{p-q}$

[3] $(a^p)^q = a^{pq}$　　[4] $(ab)^p = a^p b^p$

●指数法則を用いて計算してみよう。

例 9
(1) $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$

(2) $5^{\frac{7}{4}} \div 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{4}{4}} = 5^1 = 5$

(3) $(\sqrt[5]{3^2})^{10} = \left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{10} = 3^{\frac{2}{5}\times 10} = 3^4 = 81$

問 10 次の計算をしなさい。ただし，$a>0$ とする。 ➡p.111 復習問題6(1), (2)

(1) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{4}}$　　(2) $a^{\frac{8}{3}} \div a^{\frac{2}{3}}$　　(3) $(\sqrt[3]{a^2})^6$

例題 1 次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4}$　　(2) $\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8}$

解 (1) $\sqrt[6]{3^4} \times \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{6}{3}}$

$= 3^2 = 9$

◀$\sqrt[n]{a^m}$ は，$a^{\frac{m}{n}}$ の形になおしてから計算する。

(2) $\sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{8} = \sqrt{2^3} \div \sqrt[6]{2^3}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{3}{6}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{2}{2}}$

$= 2^1 = 2$

◀$2^{\bullet}$ の形にそろえる。

問 11 次の計算をしなさい。 ➡p.111 復習問題6(3), (4)

(1) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[6]{25}$　　(2) $\sqrt[4]{2^9} \div \sqrt[8]{2^2}$

(3) $\sqrt{27} \times \sqrt[4]{3^2}$　　(4) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[6]{4}$

4 指数関数と対数関数

3 指数関数とそのグラフ

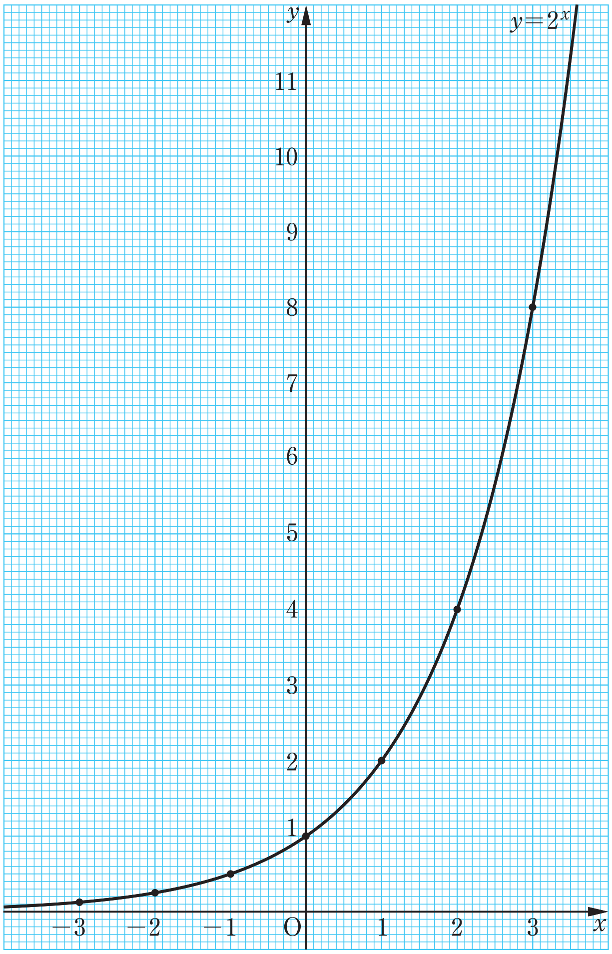
ねらい　$y=2^x$ や $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のような関数のグラフについて学びます。さらに，この関数のグラフの性質を利用して数の大小を調べます。

関数 $y=2^x$ のグラフはどのように表されるかを調べてみよう。

x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=2^x$	$\cdots$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$

この表をもとに，$y=2^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になる。



関数 $y=2^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

① 2 点 (0，1)，(1，2) を通る。

② x 軸より上側にある。つまり，$y>0$ の範囲にある。

③ x の値が減少すると，x 軸に限りなく近づいていくので，x 軸がグラフの漸近線（ぜんきんせん）となる。

④ x の値が増加すると，y の値も増加する。

一般に，a を 1 以外の正の数とするとき

$$y=a^x$$

で表される関数を，a を **底**（てい）とする x の **指数関数**（しすうかんすう）という。

◀上の関数 $y=2^x$ は，2 を底とする指数関数である。

● a が1より小さい正の数のときの，$y=a^x$ のグラフを調べてみよう。

例 10 指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくために，x の値に対応する y の値を求めて表に表すと，次のようになる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

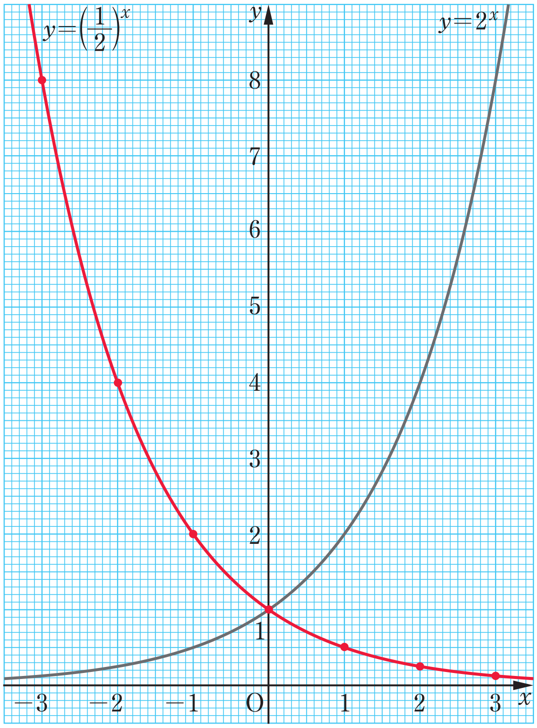
例 10 の表をもとに，指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかくと，右の図のような曲線になり，このグラフは，次の性質をもっている。

① 2点 $(0,\ 1)$，$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ を通る。

② $y>0$ の範囲にある。

③ x 軸がグラフの漸近線となる。

④ x の値が増加すると，y の値は減少する。



また，右の図からわかるように，関数 $y=2^x$ のグラフと関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。

一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフは，次の性質をもっている。

指数関数 $y=a^x$ のグラフ

［1］ 2点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

［2］ $y>0$ の範囲にある。

［3］ x 軸がグラフの漸近線となる。

［4］ $a>1$ のとき，x の値が増加すると y の値も増加する。
　$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

問 12 右の表を完成し，指数関数 $y=3^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを，上の図にかきなさい。

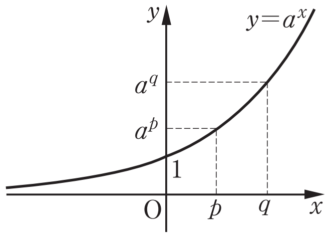
x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=3^x$	…						…
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	…						…

指数関数の利用

指数関数 $y=a^x$ のグラフから，次のことがわかる。

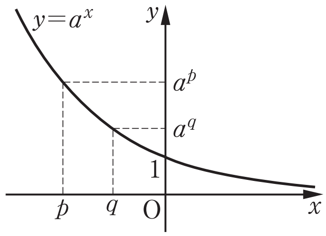
(1) $\boldsymbol{a>1}$ のとき

$$p<q \iff a^p<a^q$$



(2) $\boldsymbol{0<a<1}$ のとき

$$p<q \iff a^p>a^q$$



◀ $A \iff B$ は，A と B が同じ内容であることを表す。

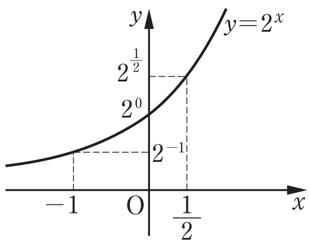
例題 2 $2^{\frac{1}{2}}$，2^{-1}，2^0 を小さい方から順に並べなさい。

解 指数を小さい順に並べると　-1，0，$\dfrac{1}{2}$

底 2 は 1 より大きいから

$$2^{-1}<2^0<2^{\frac{1}{2}}$$

よって　$\boldsymbol{2^{-1},\ 2^0,\ 2^{\frac{1}{2}}}$



問 13 次の数を小さい方から順に並べなさい。

→p.111 復習問題7

(1) 3，3^{-2}，$3^{\frac{2}{3}}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

◀(2) 底 $\dfrac{1}{4}$ は 1 より小さいことに注意する。

例題 3 方程式 $9^x=27$ を解きなさい。

解 $9^x=(3^2)^x=3^{2x}$，$27=3^3$ より

$$3^{2x}=3^3$$

◀両辺の底を同じ数にする。

よって　$2x=3$

したがって　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$

問 14 次の方程式を解きなさい。

→p.111 復習問題8

(1) $7^x=49$　　(2) $4^x=8$　　(3) $5^x=1$

復　習　問　題

□**1** 次の値を求めなさい。

(1)　5^{-2}　　(2)　8^0　　(3)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

指数の拡張
p.103 例2

□**2** 次の計算を行い，結果を負の整数の指数を用いないで表しなさい。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　$a^2 \times a^{-4}$　　(2)　$a^3 \div a^{-2}$

(3)　$(a^{-3})^2$　　(4)　$(a^{-2}b)^{-4}$

指数の拡張
p.103 例3

□**3** 次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{2}$　　(2)　$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$　　(3)　$\sqrt[6]{6} \div \sqrt[6]{2}$

累乗根の積と商
p.105 例6

□**4** 次の値を求めなさい。

(1)　$(\sqrt[6]{25})^3$　　(2)　$(\sqrt[4]{9})^2$　　(3)　$(\sqrt[6]{8})^2$

累乗根の累乗
p.105 例7

□**5** 次の値を求めなさい。

(1)　$64^{\frac{1}{3}}$　　(2)　$3^{\frac{3}{4}}$　　(3)　$16^{-\frac{1}{2}}$

分数の指数
p.106 例8

□**6** 次の計算をしなさい。

(1)　$7^{\frac{3}{5}} \times 7^{\frac{2}{5}}$　　(2)　$(\sqrt[4]{9})^6$

(3)　$\sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{9}$　　(4)　$\sqrt[3]{81} \div \sqrt[6]{9}$

指数法則
p.107 例9
p.107 例題1

□**7** 次の数を小さい方から順に並べなさい。

(1)　$2^{\frac{3}{2}}$，2^2，$2^{-\frac{1}{3}}$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

指数関数の利用
p.110 例題2

□**8** 次の方程式を解きなさい。

(1)　$2^x=16$　　(2)　$3^x=\dfrac{1}{27}$　　(3)　$8^x=4$

指数関数の利用
p.110 例題3