

1 節 三角関数

1 一般角



私たちの身のまわりには、時計の針や観覧車など、回転運動するものがあります。ここでは、ある点を中心とした回転の量について学びます。

平面上で、点Oを中心として半直線OPが回転するとき

この半直線OPを **動径**

その回転のはじめの位置を示す半直線OXを **始線**

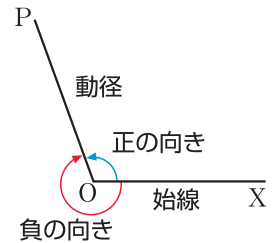
という。

回転には2つの向きがあり

時計の針の回転と逆の向きを **正の向き**

時計の針の回転と同じ向きを **負の向き**

とする。



5

10

角を回転の量としてとらえると、 360° よりも大きい角や、

-60° などの負の角も考えることができる。このように、

拡張して考えた角を **一般角** という。

15

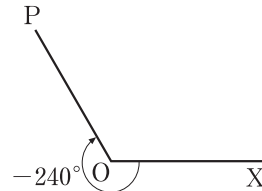
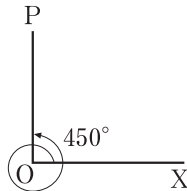
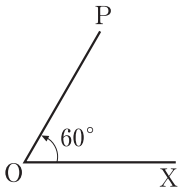
●一般角の動径OPを図示してみよう。

例1

(1) 60°

(2) 450°

(3) -240°

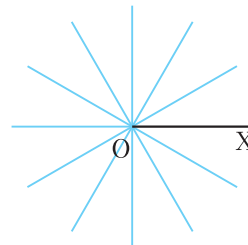
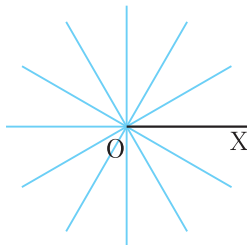
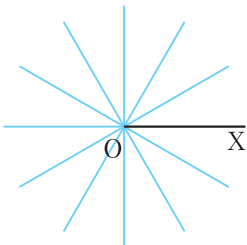


問1 例1にならって、次の角の動径OPを図示しなさい。

(1) 150°

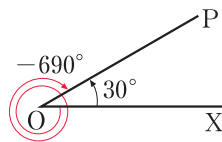
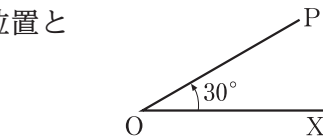
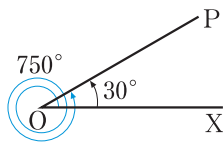
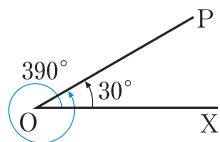
(2) 420°

(3) -480°



動径の表す一般角

390° , 750° , -690° の動径の位置は, 30° の動径の位置と同じである。



ここで

$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 1 \quad 750^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 2 \quad -690^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-2)$$

と表すことができる。

一般に, 次のことがいえる。

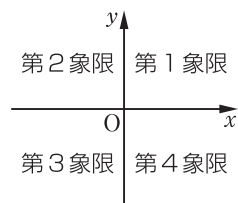
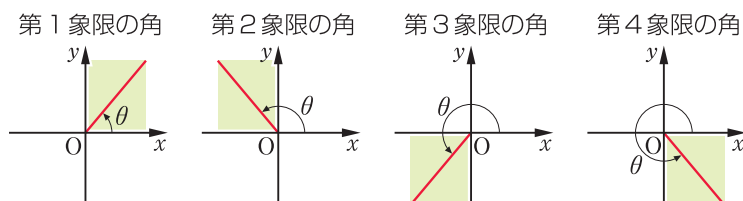
動径の表す一般角

角 α の動径の表す一般角は

$$\alpha + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

一般角 θ の動径が第1象限にあるとき, θ を

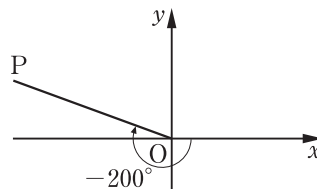
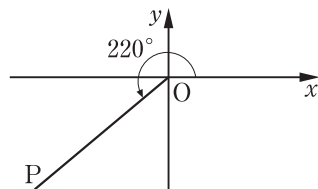
第1象限の角 という。ほかの象限についても同様である。



動径が座標軸上となる 0° , 90° , 180° , 270° などの角は, どの象限にも含まれない。

● 角が第何象限の角であるか調べてみよう。

例2 (1) 220° は第3象限の角である。 (2) -200° は第2象限の角である。



問2 次の角は, 第何象限の角であるか答えなさい。

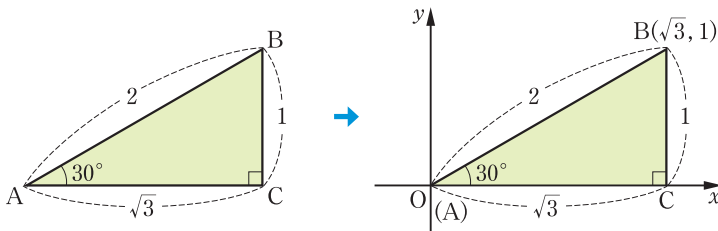
- (1) 380° (2) -750°

2 三角関数



数学 I では、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲の三角比について学びました。ここでは、一般角に拡張して三角比を考えます。

30° の三角比の値は、次のように座標を使って考えることができる。



このとき、座標を使うと

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\text{Bの}y\text{座標}}{\text{OB}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{Bの}x\text{座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{Bの}y\text{座標}}{\text{Bの}x\text{座標}}$$

とみることができる。

このことを用いて、一般角 θ の三角比を考えてみよう。

右の図のように、座標平面上で x 軸の正の部分の始線とし、一般角 θ の動径上に $OP = r$ となる点 P をとり、その座標を (x, y) とするとき

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

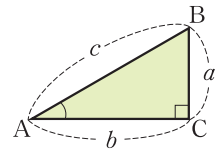
と定める。これらの値は、長さ r に関係なく、 θ の大きさによって定まるから θ の関数である。

$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を θ の **三角関数** という。

三角関数の定義

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

◀ 三角比



$$\sin A = \frac{a}{c}$$

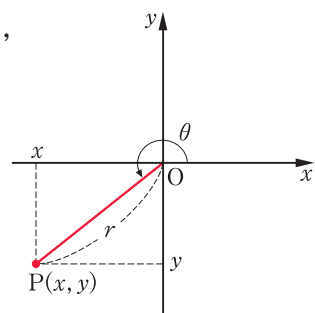
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

▶ 巻末 いままでに学んだこと
⑬ 三角比

5

10



15

◀ $\tan \theta$ は、 $x = 0$ となるような θ に対しては定義されない。

20



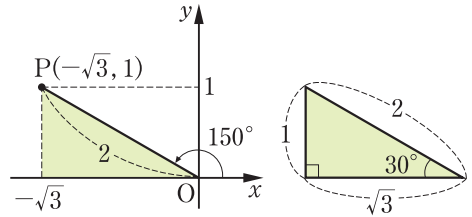
●一般角の三角関数の値を求めてみよう。

例3 (1) 150° の動径上に $OP = 2$ となる点Pをとると、
 $P(-\sqrt{3}, 1)$ であるから

$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

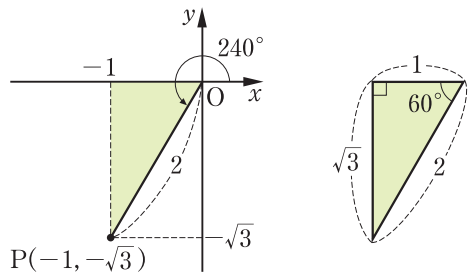


(2) 240° の動径上に $OP = 2$ となる点Pをとると、
 $P(-1, -\sqrt{3})$ であるから

$$\sin 240^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

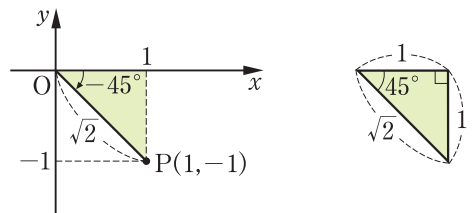


(3) -45° の動径上に $OP = \sqrt{2}$ となる点Pをとると、
 $P(1, -1)$ であるから

$$\sin(-45^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

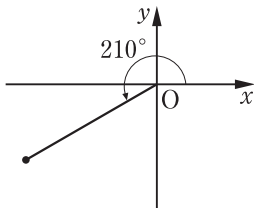
$$\cos(-45^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan(-45^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

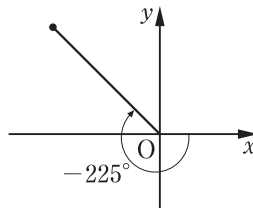


問3 θ が次の角のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(1) 210°



(2) -225°



象限	1	2	3	4
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-

→ p.91 復習問題□

3 三角関数の相互関係



一般角 θ の $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の間に成り立つ相互関係を考えます。

原点を中心とする半径1の円を **単位円** という。

角 θ の動径と単位円との交点を $P(x, y)$ とすると、
80 ページの三角関数の定義により

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

よって $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$

このとき、点 P の座標 (x, y) は、 $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。

このことを用いて、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の間に
成り立つ関係について考えてみよう。

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ より

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

さらに、点 P が単位円の周上にあることから

$$x^2 + y^2 = 1$$

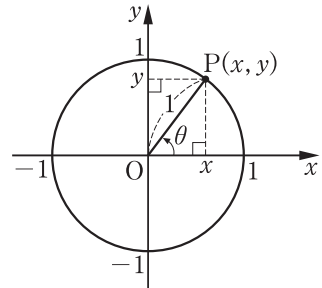
$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

よって $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

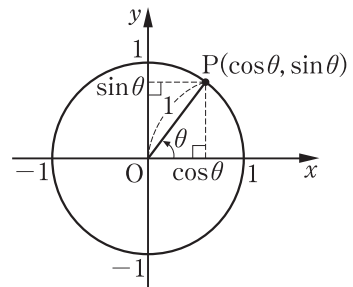
このように、一般角の三角関数についても、数学 I で
学んだ三角比と同様に、次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係

[1] $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ [2] $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



5



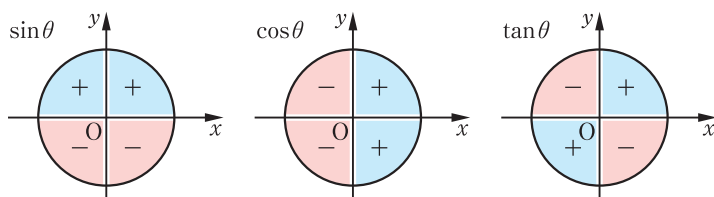
10

- ◀ 原点を中心とする半径1の円の方程式は $x^2 + y^2 = 1$ 15
- ◀ $(\sin \theta)^2$ は $\sin^2 \theta$, $(\cos \theta)^2$ は $\cos^2 \theta$ と書く。

20



$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値の正負は、 θ がどの象限の角であるかによって定まり、図示すると次のようになる。



例題

1

θ が第 3 象限の角で、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ のとき、 $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

解

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

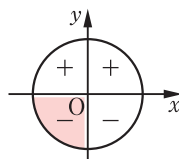
θ が第 3 象限の角であるから $\sin \theta < 0$

したがって

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -\sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

◀ $\sin \theta$ の符号



3

三角関数

▶ 1 つの三角関数の値からほかの 2 つの三角関数の値を求めることができる。

→ p.91 復習問題②

問 4

次の問に答えなさい。

(1) θ が第 4 象限の角で、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(2) θ が第 3 象限の角で、 $\sin \theta = -\frac{5}{13}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

4 三角関数のグラフ



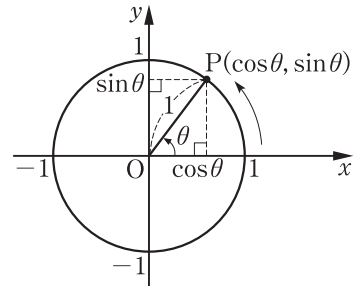
三角関数の値は角 θ の値によって変化します。ここでは、三角関数のグラフをかいて、その特徴を学びます。

$y = \sin \theta$ のグラフ

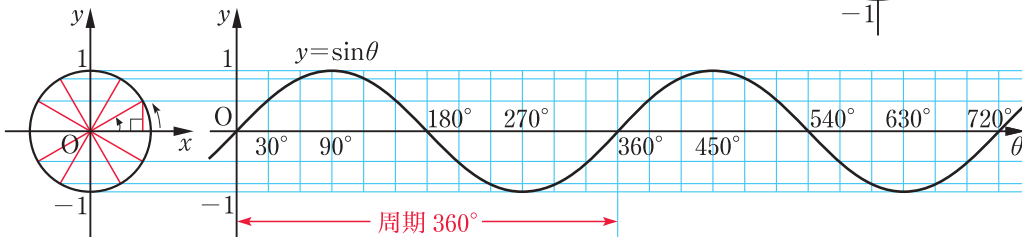
単位円と角 θ の動径との交点 P の座標は、 $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。すなわち、点 P の y 座標が $\sin \theta$ であることから

$$y = \sin \theta$$

のグラフは、次のようになり、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ である。



5



$y = \sin \theta$ のグラフは、 360° ごとに同じ形をくり返している。

このことを、 $y = \sin \theta$ は 360° を **周期** とする **周期関数** であるという。

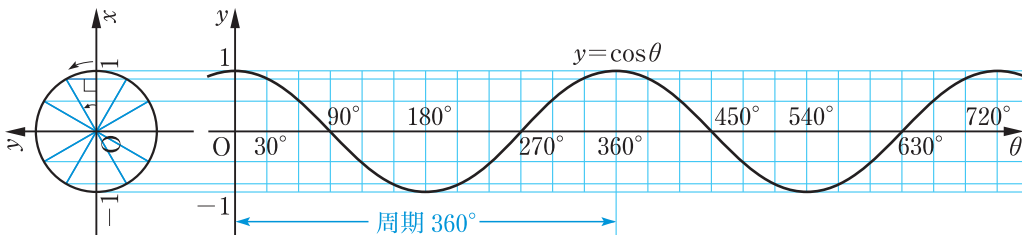
10

$y = \cos \theta$ のグラフ

$y = \sin \theta$ のグラフの場合と同様に考えると、点 P の x 座標が $\cos \theta$ であることから

$$y = \cos \theta$$

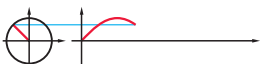
のグラフは、次のようになり、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ である。



$y = \cos \theta$ も 360° を周期とする周期関数である。

◀ $y = \cos \theta$ のグラフは、 $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に -90° だけ平行移動したものである。

15



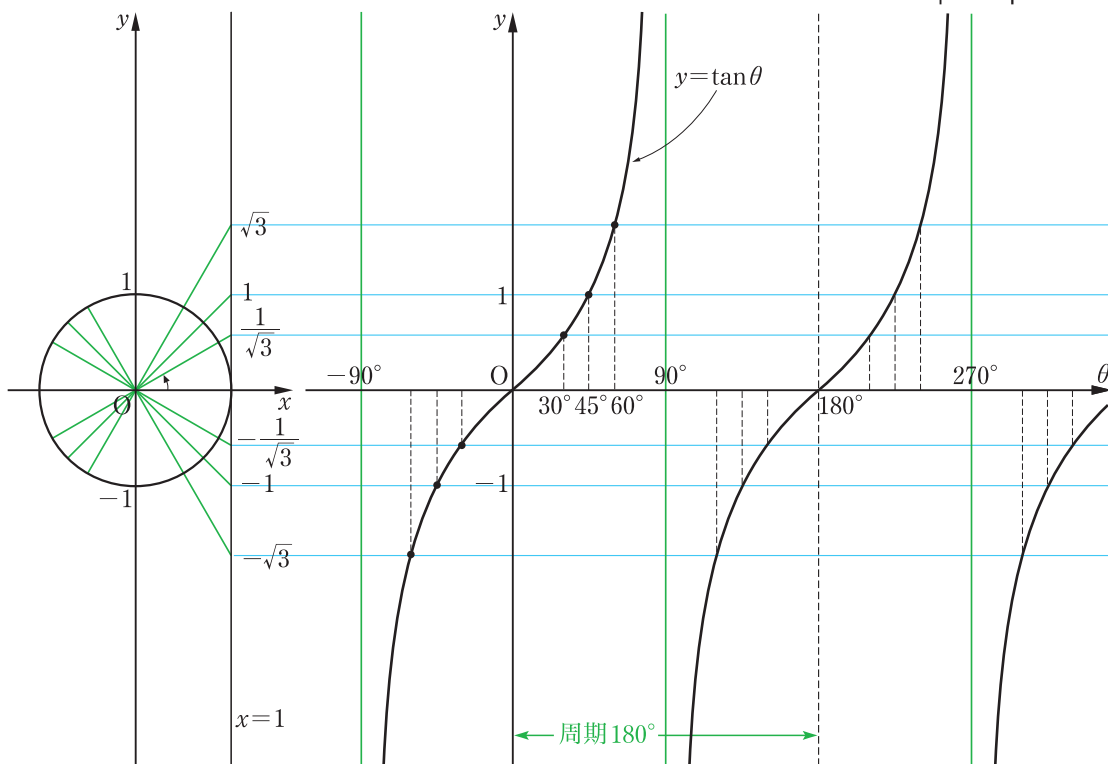
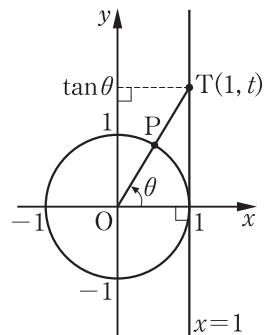
$y = \tan \theta$ のグラフ

右の図で、角 θ の動径を OP とする。

直線 OP と直線 $x = 1$ との交点を $T(1, t)$ とすれば

$$\tan \theta = \frac{t}{1} = t$$

- 5 すなわち、点 T の y 座標が $\tan \theta$ に等しい。これより、 $y = \tan \theta$ のグラフは次のようになり、 $\tan \theta$ はすべての実数値をとることがわかる。



$y = \tan \theta$ は 180° を周期とする周期関数である。

$y = \tan \theta$ のグラフは y 軸方向にどこまでものびる曲線で、

- 10 θ の値が 90° に近づくと、直線 $\theta = 90^\circ$ に限りなく近づいていく。このとき、直線 $\theta = 90^\circ$ をグラフの**漸近線**という。
 なお、直線 $\theta = -90^\circ$ 、 $\theta = 270^\circ$ 、 $\theta = -270^\circ$ 、 $\theta = 450^\circ$ 、 $\theta = -450^\circ$ なども $y = \tan \theta$ のグラフの漸近線である。

◀ $\tan 90^\circ$, $\tan(-90^\circ)$,
 $\tan 270^\circ$, $\tan(-270^\circ)$,
 $\tan 450^\circ$, $\tan(-450^\circ)$
 などの値はない。

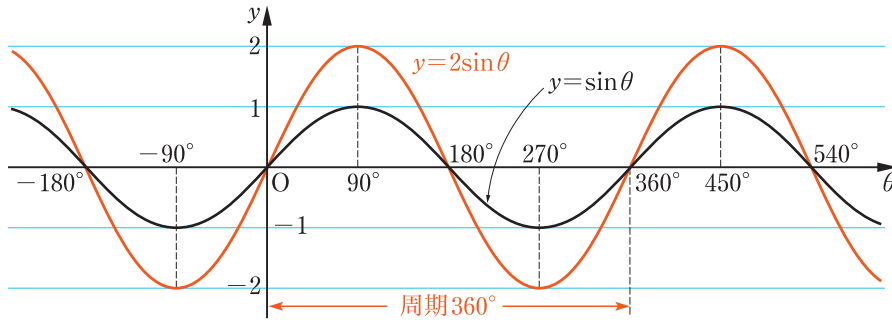
いろいろな三角関数のグラフ(1)

● y 軸方向に拡大・縮小した三角関数のグラフをかいてみよう。

例 4 $y = 2\sin\theta$ のグラフは、 $y = \sin\theta$ のグラフを
 y 軸方向に 2 倍したものである。
周期は $y = \sin\theta$ の周期と同じ 360° である。

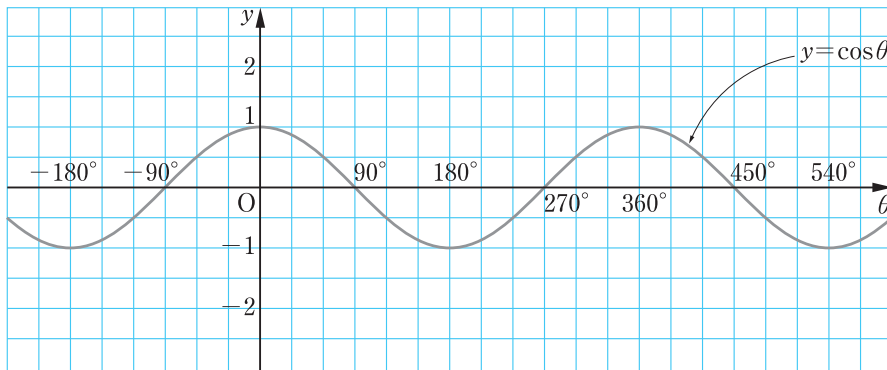
◀ $y = n\sin\theta$ のグラフは、
 $y = \sin\theta$ のグラフを
 y 軸方向に n 倍したものである。

5



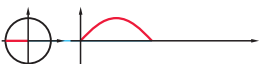
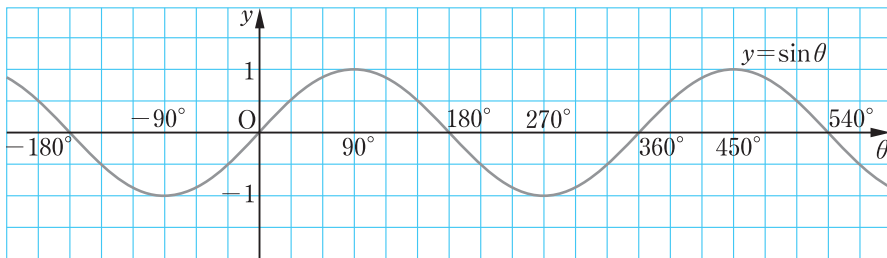
問 5 $y = 2\cos\theta$ のグラフをかきなさい。また、その周期を
答えなさい。

▶ p.91 復習問題③



問 6 $y = \frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフをかきなさい。また、その周期を
答えなさい。

◀ $y = \sin\theta$ のグラフを
 y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍する。



いろいろな三角関数のグラフ(2)

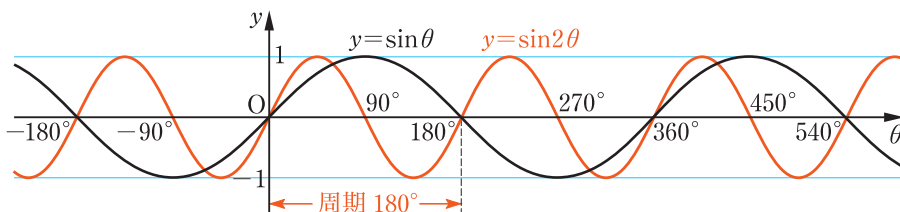
● θ 軸方向に拡大・縮小した三角関数のグラフをかいてみよう。

例5 $y = \sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	...	150°	...	180°	...
2θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	...	300°	...	360°	...
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$...	0	...

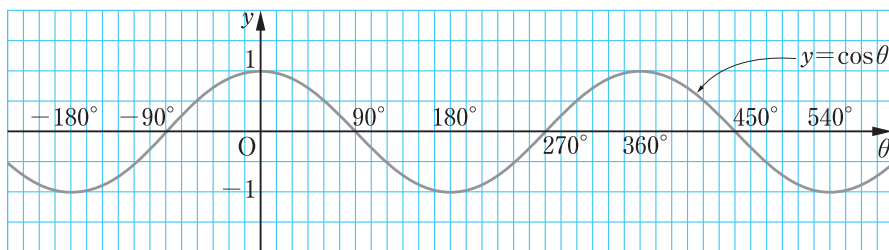
5 上の表から、 $y = \sin 2\theta$ のグラフは下の図のようになり、これは、 $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍したものである。周期は $y = \sin \theta$ の周期 360° の $\frac{1}{2}$ 倍で、 180° である。

▶ $y = \sin n\theta$ のグラフは、 $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{n}$ 倍したもので、周期は $\frac{360^\circ}{n}$ である。



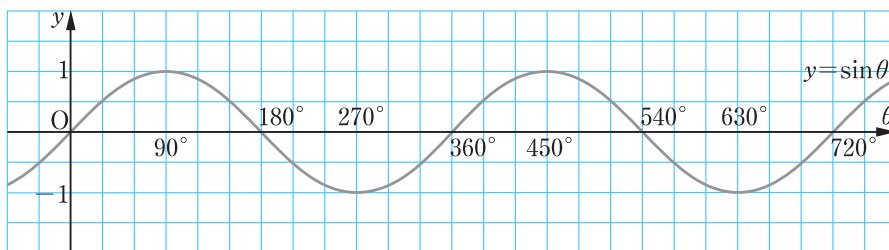
問7 $y = \cos 2\theta$ のグラフをかきなさい。また、その周期を答えなさい。

▶ p.91 復習問題④



10 問8 $y = \sin \frac{\theta}{2}$ のグラフをかきなさい。また、その周期を答えなさい。

▶ $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に 2 倍する。



5 三角関数の性質



三角関数が周期関数であることはすでに学びました。ここでは、さらにいくつかの三角関数の性質を学びます。

$\theta + 360^\circ \times n$ の三角関数

角 $\theta + 360^\circ \times n$ の動径と角 θ の動径は一致する。

よって、次の公式が成り立つ。ただし、 n は整数である。

$\theta + 360^\circ \times n$ の三角関数

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 360^\circ \times n) &= \sin \theta & \tan(\theta + 360^\circ \times n) &= \tan \theta \\ \cos(\theta + 360^\circ \times n) &= \cos \theta \end{aligned}$$

5

● $\theta + 360^\circ \times n$ の三角関数の公式を利用して、三角関数の値を求めてみよう。

10

例 6 (1) $\sin 390^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ \times 1) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(2) $\cos 765^\circ = \cos(45^\circ + 360^\circ \times 2) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

問 9 次の三角関数の値を求めなさい。

(1) $\sin 405^\circ$ (2) $\cos 750^\circ$ (3) $\tan 420^\circ$

$-\theta$ の三角関数

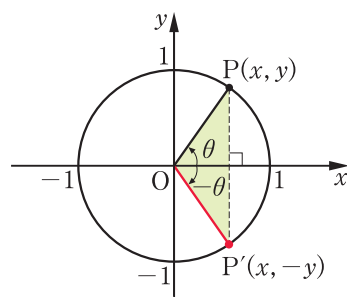
15

右の図で、角 $-\theta$ の動径 OP' は、角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称であるから、点 P の座標を (x, y) とすれば、点 P' の座標は $(x, -y)$ となる。

よって $\sin(-\theta) = -y = -\sin \theta$

$$\cos(-\theta) = x = \cos \theta$$

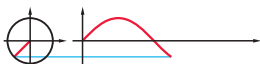
$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$



20

$-\theta$ の三角関数

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta & \tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$



● $-\theta$ の三角関数の公式を利用して、三角関数の値を求めてみよう。

例 7 (1) $\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

問 10 次の三角関数の値を求めなさい。

- 5 (1) $\sin(-60^\circ)$ (2) $\cos(-30^\circ)$ (3) $\tan(-45^\circ)$

$\theta + 180^\circ$ の三角関数

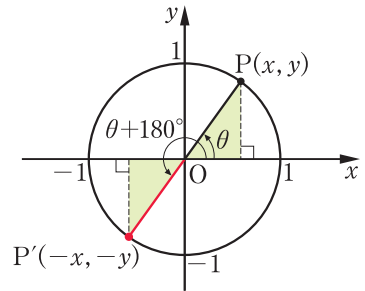
右の図で、角 $\theta + 180^\circ$ の動径 OP' は、角 θ の動径 OP を原点のまわりに 180° 回転したものである。

点 P と点 P' は原点に関して対称であるから、
10 点 P の座標を (x, y) とすれば、点 P' の座標は $(-x, -y)$ となる。

よって $\sin(\theta + 180^\circ) = -y = -\sin \theta$

$\cos(\theta + 180^\circ) = -x = -\cos \theta$

$\tan(\theta + 180^\circ) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$



$\theta + 180^\circ$ の三角関数

$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$

$\tan(\theta + 180^\circ) = \tan \theta$

$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$

● $\theta + 180^\circ$ の三角関数の公式を利用して、三角関数の値を求めてみよう。

例 8 (1) $\sin 210^\circ = \sin(30^\circ + 180^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos 240^\circ = \cos(60^\circ + 180^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

問 11 次の三角関数の値を求めなさい。

- (1) $\sin 240^\circ$ (2) $\cos 225^\circ$ (3) $\tan 210^\circ$

ここでは、 $\sin \theta$ や $\cos \theta$ の三角関数の値から角度を求めることを学びます。

例題

1

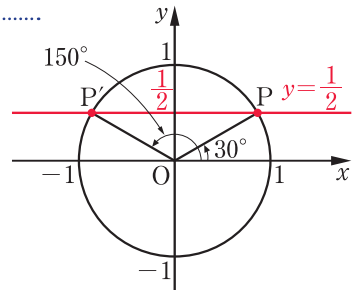
$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ の値を求めなさい。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (2) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

5

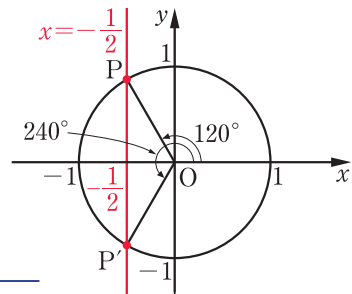
解

(1) 単位円周上で、 y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は、右の図の P、P' の 2 点である。
動径 OP、OP' の表す角 θ は、
 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲では
 $\theta = 30^\circ, 150^\circ$



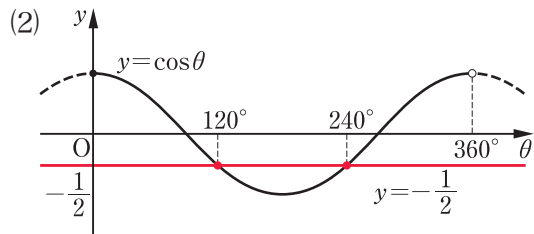
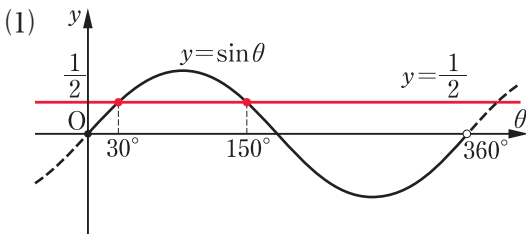
10

(2) 単位円周上で、 x 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は、右の図の P、P' の 2 点である。
動径 OP、OP' の表す角 θ は、
 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲では
 $\theta = 120^\circ, 240^\circ$



15

例題 1 の解は、(1) 関数 $y = \sin \theta$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ が交わる θ の値、(2) 関数 $y = \cos \theta$ のグラフと直線 $y = -\frac{1}{2}$ が交わる θ の値を示している。

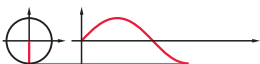


問 1

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、次の等式を満たす θ の値を求めなさい。

(1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

20

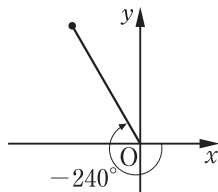
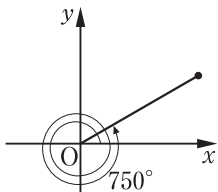


復 習 問 題

□ **1** θ が次の角のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

(1) 750°

(2) -240°



□ **2** 次の問に答えなさい。

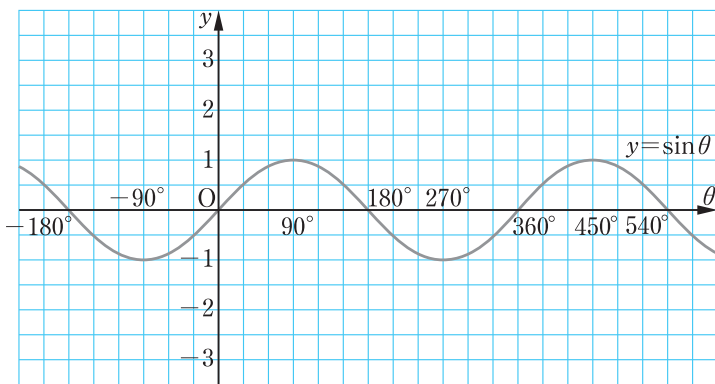
5

(1) θ が第 4 象限の角で、 $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ のとき、 $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

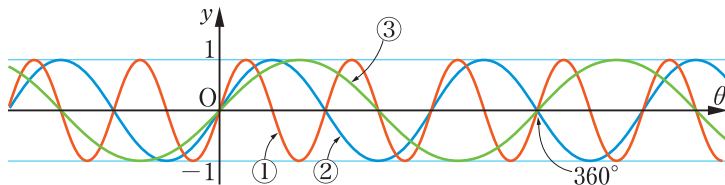
(2) θ が第 3 象限の角で、 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めなさい。

□ **3** $y = 3 \sin \theta$ のグラフをかきなさい。また、その周期を答えなさい。

10



□ **4** $y = \sin 3\theta$ のグラフは下の図の ①, ②, ③ のどれか答えなさい。



三角関数

↩ p.81 例 3

三角関数の相互関係

↩ p.83 例題 1

いろいろな三角関数の
グラフ (1)

↩ p.86 例 4

3

三角関数

いろいろな三角関数の
グラフ (2)

↩ p.87 例 5