# 1 節　整式・分数式の計算

## 1　3 次の乗法公式と因数分解

ねらい　数学Ⅰでは，２次の乗法公式や因数分解について学びました。ここでは，３次の乗法公式や因数分解について学びます。

### 乗法公式

$(a+b)^3$ を展開してみよう。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

◀ $(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

よって，次の公式 [1] が成り立つ。また，$(a-b)^3$ についても，同様に次の公式 [2] が成り立つ。

**乗法公式**

[1]　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

[2]　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

●乗法公式を利用して，式を展開してみよう。

**例 1**

$(\triangle+\bigcirc)^3=\triangle^3+3\times\triangle^2\times\bigcirc+3\times\triangle\times\bigcirc^2+\bigcirc^3$

(1)　$(x+2)^3=x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$

$(\triangle-\bigcirc)^3=\triangle^3-3\times\triangle^2\times\bigcirc+3\times\triangle\times\bigcirc^2-\bigcirc^3$

(2)　$(3x-y)^3=(3x)^3-3\times(3x)^2\times y+3\times 3x\times y^2-y^3$

$=27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$

**問 1**　次の式を展開しなさい。　➜p.17 復習問題1

(1)　$(x+3)^3$　　(2)　$(x-1)^3$

(3)　$(3x+1)^3$　　(4)　$(2x-y)^3$

(5)　$(2x+3)^3$　　(6)　$(3x-2)^3$

## 因数分解

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開してみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\
&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\
&=a^3+b^3
\end{aligned}
$$

◀$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

この結果から，次の公式 [1] が得られる。また，$a^3-b^3$ について も，同様に次の公式 [2] が成り立つ。

**因数分解の公式**

[1]　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

[2]　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

●因数分解の公式を利用して，式を因数分解してみよう。

**例 2**

$△^3+○^3=(△+○)(△^2-△\times○+○^2)$

(1)　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\times 2+2^2)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)$

$△^3-○^3=(△-○)(△^2+△\times○+○^2)$

(2)　$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)\{(2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2\}$

$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

**問 2**　次の式を因数分解しなさい。

➜p.17 復習問題2

(1)　$x^3+1$　　(2)　$x^3-64$

(3)　$8x^3+1$　　(4)　$27x^3-y^3$

(5)　$8x^3+27y^3$　　(6)　$64x^3-27y^3$

◀(1)　$1=1^3$
(2)　$64=4^3$

# 2 二項定理

ねらい　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3$ の展開式については，ここまでに学びました。ここでは，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n$ の展開式について考えます。

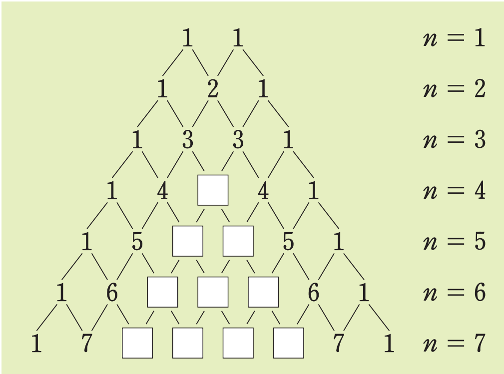
## パスカルの三角形

$(a+b)^n$ の展開式を調べてみよう。

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$




右の図のように，$(a+b)^n$ の展開式の係数を三角形状に並べたものを，**パスカルの三角形**という。

パスカルの三角形では，次の規則が成り立っている。

① 各段の両端の数はつねに 1 である。

② 各段の両端以外の数は，その左上の数と右上の数をたしたものである。

この規則にしたがってパスカルの三角形をつくっていくと，$n$ がいくつであっても，$(a+b)^n$ の展開式をつくることができる。

**問 3**　上のパスカルの三角形で，空らんをうめ，$n=7$ の段まで完成しなさい。

### ●パスカルの三角形を利用して，式を展開してみよう。

**例 3**　(1)　$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$　◀係数は 1　4　6　4　1

(2)　$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$　◀係数は 1　5　10　10　5　1

**問 4**　パスカルの三角形を利用して，$(a+b)^6$ を展開しなさい。

## 二項定理

一般に，記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ を次のように定める。

**${}_n\mathrm{C}_r$**

$$ {}_n\mathrm{C}_r=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r(r-1)\times\cdots\times3\times2\times1},\qquad {}_n\mathrm{C}_0=1 $$

◀ ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

● ${}_n\mathrm{C}_r$ の値を求めてみよう。

**例 4** (1) ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$　　(2) ${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

**＋解説**

$$ {}_{\boxed{5}}\mathrm{C}_{\boxed{2}}=\frac{\overbrace{\boxed{5}\times4}^{\boxed{2}\text{ 個}}}{\boxed{2}\times1} $$

$\boxed{2}$ から 1 まで

**問 5** 次の値を求めなさい。

(1) ${}_6\mathrm{C}_2$　　(2) ${}_5\mathrm{C}_3$　　(3) ${}_7\mathrm{C}_5$

パスカルの三角形の $n=4$ の段の数は，次のようになる。

$$ {}_4\mathrm{C}_0=1,\quad {}_4\mathrm{C}_1=\frac{4}{1}=4,\quad {}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6, $$

$$ {}_4\mathrm{C}_3=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4,\quad {}_4\mathrm{C}_4=\frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=1 $$

1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
↓
${}_1\mathrm{C}_0$　${}_1\mathrm{C}_1$
${}_2\mathrm{C}_0$　${}_2\mathrm{C}_1$　${}_2\mathrm{C}_2$
${}_3\mathrm{C}_0$　${}_3\mathrm{C}_1$　${}_3\mathrm{C}_2$　${}_3\mathrm{C}_3$
${}_4\mathrm{C}_0$　${}_4\mathrm{C}_1$　${}_4\mathrm{C}_2$　${}_4\mathrm{C}_3$　${}_4\mathrm{C}_4$

$(a+b)^4$の展開式は，${}_n\mathrm{C}_r$ を用いると次のように表される。

$$ \begin{aligned}(a+b)^4&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\&={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4\end{aligned} $$

一般に，次の**二項定理**が成り立つ。

**二項定理**

$$ \begin{aligned}(a+b)^n={}&{}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\\&+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n\end{aligned} $$

● 二項定理を利用して，式を展開してみよう。

**例 5** $(a+b)^5$

$$ \begin{aligned}&={}_5\mathrm{C}_0a^5+{}_5\mathrm{C}_1a^4b+{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2+{}_5\mathrm{C}_3a^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4ab^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5\\&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\end{aligned} $$

◀ ${}_5\mathrm{C}_4=\dfrac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}=5$

**問 6** 二項定理を利用して，$(a+b)^6$ を展開しなさい。

→p.17 復習問題3

# 3 分数式とその計算

ねらい　分母に文字を含んだ式の計算について学びます。

## 分数式とその約分

$\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{x-2}{x+5}$ などのように，分母に文字を含んだ式を **分数式**（ぶんすうしき）という。

分数式でも，分数と同じように分母と分子に共通な因数がある場合は，次のように **約分**（やくぶん）できる。

◀ $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2\times\cancel{2}}{3\times\cancel{2}}=\dfrac{2}{3}$

$$\frac{A\cancel{C}}{B\cancel{C}}=\frac{A}{B}$$

### ●分数式を約分してみよう。

**例 6**　(1) $\dfrac{y}{xy}=\dfrac{1}{x}$　　(2) $\dfrac{4ab^2}{6a^3b}=\dfrac{2b}{3a^2}$

(3) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\dfrac{x+1}{x+2}$

◀(2) $\dfrac{2\times\cancel{2}\times\cancel{a}\times b\times\cancel{b}}{3\times\cancel{2}\times\cancel{a}\times a\times a\times\cancel{b}}$

◀因数分解してから約分する。

**問 7**　次の分数式を約分しなさい。

(1) $\dfrac{2x}{3xy}$　　(2) $\dfrac{4a^5b^2}{12a^2b^3}$　　(3) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$

## 乗法と除法

分数式の乗法と除法は，分数の場合と同じように，次のように計算する。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

◀ $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2\times4}{3\times5}=\dfrac{8}{15}$

$\dfrac{3}{4}\div\dfrac{2}{5}=\underbrace{\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{2}}_{\text{逆数をかける。}}=\dfrac{15}{8}$

### ●分数式の乗法を計算してみよう。

**例 7**　(1) $\dfrac{x-1}{x+1}\times\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-3)}=\dfrac{x-1}{x-3}$

(2) $\dfrac{x+1}{x-2}\times\dfrac{x^2-2x}{x^2+3x+2}=\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{x-2}}\times\dfrac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)}$

$=\dfrac{x}{x+2}$

◀分母や分子が因数分解できるときは，因数分解してから計算する。

**問 8** 次の式を計算しなさい。 ➜p.17 復習問題4

(1) $\dfrac{x+1}{2x-1}\times\dfrac{2x-1}{x+5}$　　(2) $\dfrac{x+2}{x^2-3x}\times\dfrac{x-3}{x^2+4x+4}$

◀(2) 因数分解してから計算する。

### ●分数式の除法を計算してみよう。

**例 8** (1) $\dfrac{x+5}{x-2}\div\dfrac{x+5}{x-6}=\dfrac{\cancel{x+5}}{x-2}\times\dfrac{x-6}{\cancel{x+5}}$

$$=\frac{x-6}{x-2}$$

(2) $\dfrac{x}{x^2-1}\div\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\times\dfrac{\cancel{x+1}}{x-2}$

$$=\frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

**問 9** 次の式を計算しなさい。 ➜p.17 復習問題5

(1) $\dfrac{x}{x-6}\div\dfrac{x}{x+1}$　　(2) $\dfrac{x-7}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-49}{x+3}$

◀(2) 因数分解してから計算する。

## 分母が等しい分数式の加法と減法

分母が等しい分数式の加法や減法は，分子の和や差を求めればよい。

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

◀ $\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{4+1}{7}=\dfrac{5}{7}$
$\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{4-1}{7}=\dfrac{3}{7}$

### ●分母が等しい分数式の加法や減法を計算してみよう。

**例 9** (1) $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{(x-1)+5}{x-2}$

$$=\frac{x+4}{x-2}$$

(2) $\dfrac{x-1}{x^2+x+2}-\dfrac{3}{x^2+x+2}=\dfrac{(x-1)-3}{x^2+x+2}$

$$=\frac{x-4}{x^2+x+2}$$

**問 10** 次の式を計算しなさい。 ➜p.17 復習問題6

(1) $\dfrac{x-5}{x+3}+\dfrac{x^2+1}{x+3}$　　(2) $\dfrac{2x+1}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}$

## 通分

2 つ以上の分数式の分母をそろえることを **通分** という。

◀ $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1\times3}{2\times3}=\dfrac{3}{6}$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\times2}{3\times2}=\dfrac{4}{6}$

### ●分数式を通分してみよう。

**例 10** $\dfrac{1}{x+1}$，$\dfrac{1}{x+2}$ を通分してみよう。

共通の分母は $(x+1)(x+2)$ とすればよいから

$$\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{(x+1)(x+2)}$$

**問 11** 次の分数式を通分しなさい。

(1) $\dfrac{1}{x-1}$，$\dfrac{1}{x+3}$　　(2) $\dfrac{1}{x+1}$，$\dfrac{2}{(x+1)(x-5)}$

## 分母が異なる分数式の加法と減法

分母が異なる分数式の加法や減法は，通分してから計算する。

◀ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{6}+\dfrac{4}{6}=\dfrac{7}{6}$

### ●分母が異なる分数式の加法や減法を計算してみよう。

**例 11**

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{2}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+3)-2}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x+3)}$$

$$=\frac{1}{x+3}$$

◀約分できるときは約分する。

**問 12** 次の式を計算しなさい。

➜p.17 復習問題⑦

(1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$　　(2) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$

(3) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{x+1}$　　(4) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

# 復　習　問　題

□**1** 次の式を展開しなさい。

(1)　$(x-2)^3$　　(2)　$(2x+y)^3$

乗法公式
p.10 例 1

□**2** 次の式を因数分解しなさい。

(1)　$64x^3-1$　　(2)　$x^3+8y^3$

因数分解
p.11 例 2

□**3** 二項定理を利用して，$(a+b)^7$ を展開しなさい。

二項定理
p.13 例 5

□**4** 次の式を計算しなさい。

(1)　$\dfrac{x-1}{x^2-4}\times\dfrac{x+2}{x^2-1}$

(2)　$\dfrac{x+1}{x^2+3x}\times\dfrac{x^2-9}{x^2+2x+1}$

分数式の乗法
p.14 例 7

□**5** 次の式を計算しなさい。

(1)　$\dfrac{x-4}{x+3}\div\dfrac{x^2-16}{x^2+3x}$

(2)　$\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x-5}{x+3}$

分数式の除法
p.15 例 8

□**6** 次の式を計算しなさい。

(1)　$\dfrac{x^2-1}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+2}$

(2)　$\dfrac{2x-1}{x^2-3}-\dfrac{x+5}{x^2-3}$

分母が等しい分数式の加法と減法
p.15 例 9

□**7** 次の式を計算しなさい。

(1)　$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}$

(2)　$\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

(3)　$\dfrac{7}{(x+3)(x-4)}-\dfrac{6}{(x-3)(x+3)}$

分母が異なる分数式の加法と減法
p.16 例 11