1章 方程式・式と証明

1節 整式・分数式の計算

1 3次の乗法公式と因数分解

教科書 P.10

問 1 (1) $(x+3)^3$

$= x^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 + 3^3$

$= \boldsymbol{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

(2) $(x-1)^3$

$= x^3 - 3 \times x^2 \times 1 + 3 \times x \times 1^2 - 1^3$

$= \boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

(3) $(3x+1)^3$

$= (3x)^3 + 3 \times (3x)^2 \times 1 + 3 \times 3x \times 1^2 + 1^3$

$= \boldsymbol{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1}$

(4) $(2x-y)^3$

$= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times y + 3 \times 2x \times y^2 - y^3$

$= \boldsymbol{8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3}$

(5) $(2x+3)^3$

$= (2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times 2x \times 3^2 + 3^3$

$= \boldsymbol{8x^3 + 36x^2 + 54x + 27}$

(6) $(3x-2)^3$

$= (3x)^3 - 3 \times (3x)^2 \times 2 + 3 \times 3x \times 2^2 - 2^3$

$= \boldsymbol{27x^3 - 54x^2 + 36x - 8}$

教科書 P.11

問 2 (1) $x^3 + 1 = x^3 + 1^3$

$= (x+1)(x^2 - x \times 1 + 1^2)$

$= \boldsymbol{(x+1)(x^2 - x + 1)}$

(2) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3$

$= (x-4)(x^2 + x \times 4 + 4^2)$

$= \boldsymbol{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}$

(3) $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3$

$= (2x+1)\{(2x)^2 - 2x \times 1 + 1^2\}$

$= \boldsymbol{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)}$

(4) $27x^3 - y^3 = (3x)^3 - y^3$

$= (3x-y)\{(3x)^2 + 3x \times y + y^2\}$

$= \boldsymbol{(3x-y)(9x^2 + 3xy + y^2)}$

(5) $8x^3 + 27y^3$

$= (2x)^3 + (3y)^3$

$= (2x+3y)\{(2x)^2 - 2x \times 3y + (3y)^2\}$

$= \boldsymbol{(2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)}$

(6) $64x^3 - 27y^3$

$= (4x)^3 - (3y)^3$

$= (4x-3y)\{(4x)^2 + 4x \times 3y + (3y)^2\}$

$= \boldsymbol{(4x-3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2)}$

2 二項定理

教科書 P.12

問 3

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & \boxed{15} & & \boxed{20} & & \boxed{15} & & 6 & & 1 \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 7 & \boxed{21} & \boxed{35} & \boxed{35} & \boxed{21} & 7 & 1
\end{array}$$

問 4 パスカルの三角形の $n=6$ の段は

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

であるから

$(a+b)^6$

$= \boldsymbol{a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$

教科書 P.13

問 5 (1) ${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} = \mathbf{15}$

(2) ${}_5\mathrm{C}_3 = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{10}$

(3) ${}_7\mathrm{C}_5 = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \mathbf{21}$

問 6 $(a+b)^6$

$= {}_6\mathrm{C}_0a^6 + {}_6\mathrm{C}_1a^5b + {}_6\mathrm{C}_2a^4b^2 + {}_6\mathrm{C}_3a^3b^3 + {}_6\mathrm{C}_4a^2b^4 + {}_6\mathrm{C}_5ab^5 + {}_6\mathrm{C}_6b^6$

$= \boldsymbol{a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6}$

3 分数式とその計算

教科書 P.14

問 7 (1) $\dfrac{2x}{3xy} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3y}}$

(2) $\dfrac{4a^5b^2}{12a^2b^3} = \boldsymbol{\dfrac{a^3}{3b}}$

(3) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x-10} = \dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+5)\cancel{(x-2)}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x+3}{x+5}}$

教科書 P.15

問8 (1) $\dfrac{x+1}{2x-1}\times\dfrac{2x-1}{x+5}=\dfrac{(x+1)\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}(x+5)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x+5}}$

(2) $\dfrac{x+2}{x^2-3x}\times\dfrac{x-3}{x^2+4x+4}$

$=\dfrac{\cancel{x+2}}{x\cancel{(x-3)}}\times\dfrac{\cancel{x-3}}{(x+2)^{\cancel{2}}}$

$=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x(x+2)}}$

問9 (1) $\dfrac{x}{x-6}\div\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\cancel{x}}{x-6}\times\dfrac{x+1}{\cancel{x}}$

$=\dfrac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-6}}$

(2) $\dfrac{x-7}{x^2+3x}\div\dfrac{x^2-49}{x+3}$

$=\dfrac{x-7}{x^2+3x}\times\dfrac{x+3}{x^2-49}$

$=\dfrac{\cancel{x-7}}{x\cancel{(x+3)}}\times\dfrac{\cancel{x+3}}{(x+7)\cancel{(x-7)}}$

$=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x(x+7)}}$

問10 (1) $\dfrac{x-5}{x+3}+\dfrac{x^2+1}{x+3}=\dfrac{(x-5)+(x^2+1)}{x+3}$

$=\dfrac{x-5+x^2+1}{x+3}$

$=\dfrac{\boldsymbol{x^2+x-4}}{\boldsymbol{x+3}}$

(2) $\dfrac{2x+1}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{(2x+1)-(x-2)}{x^2-1}$

$=\dfrac{2x+1-x+2}{x^2-1}$

$=\dfrac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x^2-1}}$

教科書 P.16

問11 (1) 共通の分母は $(x-1)(x+3)$ とすればよいから

$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{(x-1)(x+3)}}$

$\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{(x-1)(x+3)}}$

(2) 共通の分母は $(x+1)(x-5)$ とすればよいから

$\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{\boldsymbol{x-5}}{\boldsymbol{(x+1)(x-5)}}$

$\dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{(x+1)(x-5)}}$

問12 (1) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{x+1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{2(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{2x+4+x+1}{(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{3x+5}}{\boldsymbol{(x+1)(x+2)}}$

(2) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{x-1}{(x+3)(x-1)}+\dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{(x-1)+1}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x+3)(x-1)}}$

(3) $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2-x+1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{-x+3}}{\boldsymbol{(x+1)(x-1)}}$

(4) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{(x+1)-3}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+1)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x+1}}$

復習問題

教科書 P.17

1 (1) $(x-2)^3$

$=x^3-3\times x^2\times2+3\times x\times2^2-2^3$

$=\boldsymbol{x^3-6x^2+12x-8}$

(2) $(2x+y)^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times y+3\times2x\times y^2+y^3$

$=\boldsymbol{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}$

2 (1) $64x^3-1$

$$= (4x)^3 - 1^3$$
$$= (4x-1)\{(4x)^2 + 4x \times 1 + 1^2\}$$
$$= \boldsymbol{(4x-1)(16x^2+4x+1)}$$

(2) $x^3 + 8y^3$
$$= x^3 + (2y)^3$$
$$= (x+2y)\{x^2 - x \times 2y + (2y)^2\}$$
$$= \boldsymbol{(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)}$$

3 $(a+b)^7$
$$= {}_7C_0a^7 + {}_7C_1a^6b + {}_7C_2a^5b^2 + {}_7C_3a^4b^3 + {}_7C_4a^3b^4 + {}_7C_5a^2b^5 + {}_7C_6ab^6 + {}_7C_7b^7$$
$$= \boldsymbol{a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7}$$

4 (1) $\dfrac{x-1}{x^2-4} \times \dfrac{x+2}{x^2-1}$
$$= \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x+2)}(x-2)} \times \frac{\cancel{x+2}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{(x-2)(x+1)}}$$

(2) $\dfrac{x+1}{x^2+3x} \times \dfrac{x^2-9}{x^2+2x+1}$
$$= \frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+3)}} \times \frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{(x+1)^{\cancel{2}}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x-3}{x(x+1)}}$$

5 (1) $\dfrac{x-4}{x+3} \div \dfrac{x^2-16}{x^2+3x}$
$$= \frac{x-4}{x+3} \times \frac{x^2+3x}{x^2-16}$$
$$= \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{x+3}} \times \frac{x\cancel{(x+3)}}{(x+4)\cancel{(x-4)}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x}{x+4}}$$

(2) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3} \div \dfrac{x-5}{x+3}$
$$= \frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3} \times \frac{x+3}{x-5}$$
$$= \frac{(x+2)\cancel{(x-5)}}{(x-1)\cancel{(x+3)}} \times \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x-5}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x+2}{x-1}}$$

6 (1) $\dfrac{x^2-1}{x+2} + \dfrac{x+4}{x+2} = \dfrac{(x^2-1)+(x+4)}{x+2}$
$$= \frac{x^2-1+x+4}{x+2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x^2+x+3}{x+2}}$$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-3} - \dfrac{x+5}{x^2-3} = \dfrac{(2x-1)-(x+5)}{x^2-3}$
$$= \frac{2x-1-x-5}{x^2-3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x-6}{x^2-3}}$$

7 (1) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{x-2}$
$$= \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$= \frac{(x-2)+2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$= \frac{x-2+2x+4}{(x+2)(x-2)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{3x+2}{(x+2)(x-2)}}$$

(2) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$
$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{(x-1)-1}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{\cancel{x-2}}{(x-1)\cancel{(x-2)}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{x-1}}$$

(3) $\dfrac{7}{(x+3)(x-4)} - \dfrac{6}{(x-3)(x+3)}$
$$= \frac{7(x-3)}{(x+3)(x-4)(x-3)} - \frac{6(x-4)}{(x-3)(x+3)(x-4)}$$
$$= \frac{7(x-3)-6(x-4)}{(x+3)(x-4)(x-3)}$$
$$= \frac{7x-21-6x+24}{(x+3)(x-4)(x-3)}$$
$$= \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{(x+3)}(x-4)(x-3)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{(x-4)(x-3)}}$$

2節 2次方程式

1 複素数

教科書 P.19

問1 (1) $\sqrt{-5} = \boldsymbol{\sqrt{5}\,i}$

(2) $-\sqrt{-9} = -\sqrt{9}\,i = \boldsymbol{-3i}$

問2 (1) $x^2 = -6$ の解は　$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{6}\,i}$

(2) $x^2 + 16 = 0$
$$x^2 = -16$$
$$x = \pm\sqrt{16}\,i$$

すなわち　　$\boldsymbol{x=\pm 4i}$

教科書 P.20

問3 (1)　$(3x-2)+(2-3y)i=10-7i$

左辺と右辺が等しいから

$$\begin{cases} 3x-2=10 \\ 2-3y=-7 \end{cases}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=4,\ y=3}$

(2)　$(x+2)+(y-1)i=0$

左辺と右辺が等しいから

$$\begin{cases} x+2=0 \\ y-1=0 \end{cases}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=-2,\ y=1}$

問4 (1)　$2i+7i=(2+7)i=\boldsymbol{9i}$

(2)　$(2-4i)-(1-i)$

$=(2-1)+\{(-4i)-(-i)\}$

$=\boldsymbol{1-3i}$

(3)　$i\times 5i=5i^2=5\times(-1)=\boldsymbol{-5}$

(4)　$(4+3i)(2-5i)$

$=8-20i+6i-15i^2$

$=8-20i+6i-15\times(-1)$

$=\boldsymbol{23-14i}$

教科書 P.21

問5 (1)　$(2+3i)\div(1-5i)=\dfrac{2+3i}{1-5i}$

$$=\frac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}$$

$$=\frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2-(5i)^2}$$

$$=\frac{2+13i-15}{1+25}$$

$$=\frac{-13+13i}{26}$$

$$=\frac{13(-1+i)}{26}$$

$$=\frac{-1+i}{2}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$$

(2)　$(2-i)\div(1+2i)=\dfrac{2-i}{1+2i}$

$$=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$=\frac{2-4i-i+2i^2}{1^2-(2i)^2}$$

$$=\frac{2-5i-2}{1+4}$$

$$=\frac{-5i}{5}$$

$$=\boldsymbol{-i}$$

(3)　$\dfrac{2+i}{2-i}=\dfrac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$$=\frac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}$$

$$=\frac{2^2+2\times 2\times i+i^2}{2^2-i^2}$$

$$=\frac{4+4i-1}{4+1}$$

$$=\frac{3+4i}{5}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i}$$

(4)　$\dfrac{1}{4+i}=\dfrac{4-i}{(4+i)(4-i)}$

$$=\frac{4-i}{4^2-i^2}$$

$$=\frac{4-i}{16+1}$$

$$=\frac{4-i}{17}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{17}-\frac{1}{17}i}$$

2　2次方程式

教科書 P.22

問6 (1)　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2}$

$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}}$$

(2)　$x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times 9\times 4}}{2\times 9}$

$$=\frac{-12\pm\sqrt{0}}{18}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$$

(3)　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 3\times 2}}{2\times 3}$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-15}}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{15}i}{6}}$$

教科書 P.23

問7 (1)　2次方程式 $x^2-6x-3=0$ の判別式 D は

$$D=(-6)^2-4\times 1\times(-3)=48$$

1章

$D > 0$ であるから，**異なる 2 つの実数解をもつ。**

(2)　2 次方程式 $2x^2-5x+7=0$ の判別式 D は

$$D=(-5)^2-4\times2\times7=-31$$

$D < 0$ であるから，**異なる 2 つの虚数解をもつ。**

(3)　2 次方程式 $4x^2-12x+9=0$ の判別式 D は

$$D=(-12)^2-4\times4\times9=0$$

$D=0$ であるから，**重解をもつ。**

問 8　判別式 D は

$$D=(-10)^2-4\times5\times(-k)=100+20k$$

重解をもつのは $D=0$ のときであるから

$$100+20k=0$$

これを解くと　　$\boldsymbol{k=-5}$

3 解と係数の関係

教科書 P.25

問 9　(1)　和　$-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$

積　$\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

(2)　和　$-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

積　$\dfrac{-4}{2}=\mathbf{-2}$

(3)　和　$-\dfrac{-1}{1}=\mathbf{1}$

積　$\dfrac{-1}{1}=\mathbf{-1}$

問10　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{1}=4$$

$$\alpha\beta=\frac{5}{1}=5$$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=5\times4=\mathbf{20}$

(2)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

(3)　$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=4^2-2\times5\\&=\mathbf{6}\end{aligned}$$

チャレンジ　与えられた2つの数を解とする2次方程式

教科書 P.26

問 1　(1)　2 つの数 -3, 5 を解とする 2 次方程式の 1 つは

和　$(-3)+5=2$

積　$(-3)\times5=-15$

であるから

$$\boldsymbol{x^2-2x-15=0}$$

(2)　2 つの数 $2+3i$, $2-3i$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

和　$(2+3i)+(2-3i)=4$

積　$(2+3i)(2-3i)=2^2-(3i)^2=13$

であるから

$$\boldsymbol{x^2-4x+13=0}$$

復習問題

教科書 P.27

1　(1)　$(4x+1)+(3y-2)i=5+10i$

左辺と右辺が等しいから

$$\begin{cases}4x+1=5\\3y-2=10\end{cases}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=1,\ \ y=4}$

(2)　$(x+5)+(y-3)i=0$

左辺と右辺が等しいから

$$\begin{cases}x+5=0\\y-3=0\end{cases}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=-5,\ \ y=3}$

(3)　$x+(3-y)i=-4i$

左辺と右辺が等しいから

$$\begin{cases}x=0\\3-y=-4\end{cases}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=0,\ \ y=7}$

2　(1)　$\begin{aligned}(1+i)+(2+3i)&=(1+2)+(i+3i)\\&=\mathbf{3+4}\boldsymbol{i}\end{aligned}$

(2)　$\begin{aligned}(1+2i)(7-i)&=7-i+14i-2i^2\\&=7+13i-2\times(-1)\\&=\mathbf{9+13}\boldsymbol{i}\end{aligned}$

(3)　$\begin{aligned}(3+2i)(3-2i)&=3^2-(2i)^2\\&=9-4i^2\\&=9-4\times(-1)\\&=\mathbf{13}\end{aligned}$

(4)　$\dfrac{2-i}{3+i}=\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$$=\frac{6-2i-3i+i^2}{3^2-i^2}$$

$$=\frac{6-5i-1}{9+1}$$

$$=\frac{5-5i}{10}$$

$$=\frac{5(1-i)}{10}$$

$$=\frac{1-i}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$$

3 (1) $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}$

$$=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}}$$

(2) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times3\times1}}{2\times3}$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{8}\,i}{6}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4\times2}\,i}{6}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{2}\,i}{6}$$

$$=\frac{2(1\pm\sqrt{2}\,i)}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{2}\,i}{3}}$$

(3) $x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times16\times1}}{2\times16}$

$$=\frac{8\pm\sqrt{0}}{32}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

4 判別式 D は

$$D=(-2)^2-4\times1\times(k+6)$$
$$=4-4k-24$$
$$=-4k-20$$

異なる 2 つの実数解をもつのは $D>0$ のときであるから

$$-4k-20>0$$

これを解くと　$\boldsymbol{k<-5}$

5 (1) 和　$\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

積　$\dfrac{-1}{3}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}}$

(2) 和　$-\dfrac{-5}{2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

積　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

6 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=-2$$

$$\alpha\beta=\frac{-4}{1}=-4$$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$$=-4+(-2)+1$$
$$=\boldsymbol{-5}$$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-2}{-4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(-2)^2-2\times(-4)$$
$$=4+8$$
$$=\boldsymbol{12}$$

3節 高次方程式

1 整式の除法

教科書 P.29

問1 (1)

$$\begin{array}{rl}
 & \boxed{3}x+\boxed{2} \\
x-1 & \overline{)\,3x^2-\quad x+5} \\
 & 3x^2-\boxed{3}x \\
\hline
 & \boxed{2}x+5 \\
 & \boxed{2}x-\boxed{2} \\
\hline
 & \boxed{7}
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rl}
 & \boxed{2}x^2-\boxed{4}x+\boxed{3} \\
x+2 & \overline{)\,2x^3\qquad\quad-5x+7} \\
 & 2x^3+\boxed{4}x^2 \\
\hline
 & -\boxed{4}x^2-5x \\
 & -\boxed{4}x^2-\boxed{8}x \\
\hline
 & \boxed{3}x+7 \\
 & \boxed{3}x+\boxed{6} \\
\hline
 & \boxed{1}
\end{array}$$

問2 (1)

$$\begin{array}{rl}
 & x+6 \\
x+1 & \overline{)\,x^2+7x+2} \\
 & x^2+\ x \\
\hline
 & 6x+2 \\
 & 6x+6 \\
\hline
 & -4
\end{array}$$

したがって，**商は $x+6$，余りは -4**

(2)
$$\begin{array}{r}
2x^2+6x\;+10 \\
x-3\,\overline{)\,2x^3\qquad\quad -\;8x-15} \\
\underline{2x^3-6x^2\qquad\qquad\quad} \\
6x^2-\;8x\qquad\quad \\
\underline{6x^2-18x\qquad\quad} \\
10x-15 \\
\underline{10x-30} \\
15
\end{array}$$

したがって，**商は $2x^2+6x+10$，余りは 15**

問3
$$\begin{array}{r}
4x\;+1 \\
x-1\,\overline{)\,4x^2-3x+2} \\
\underline{4x^2-4x\quad} \\
x+2 \\
\underline{x-1} \\
3
\end{array}$$

よって，整式 $A=4x^2-3x+2$ を，整式 $B=x-1$ でわると商 $\boldsymbol{Q=4x+1}$，余り $\boldsymbol{R=3}$ となった。

このとき，$A=BQ+R$ が成り立つから

$$\boldsymbol{4x^2-3x+2=(x-1)(4x+1)+3}$$

2 因数定理

教科書 P.30

問4 (1) $P(1)=1^3-2\times1^2+1-3$
$=1-2+1-3$
$=\boldsymbol{-3}$

(2) $P(-2)=(-2)^3-2\times(-2)^2+(-2)-3$
$=-8-8-2-3$
$=\boldsymbol{-21}$

問5 (1) $P(2)=2^3-4\times2^2+6\times2+1$
$=8-16+12+1$
$=5$

したがって，余りは **5**

(2) $P(-1)$
$=(-1)^3-4\times(-1)^2+6\times(-1)+1$
$=-1-4-6+1$
$=-10$

したがって，余りは $\boldsymbol{-10}$

教科書 P.31

問6 (1) $P(1)=1^3-5\times1+2=-2$ であるから，$x-1$ は**因数ではない。**

(2) $P(2)=2^3-5\times2+2=0$ であるから，$x-2$ は**因数である。**

(3) $P(-1)=(-1)^3-5\times(-1)+2=6$ であるから，$x+1$ は**因数ではない。**

問7 (1) $P(x)=x^3+4x^2+x-6$ とおくと

$P(1)=1^3+4\times1^2+1-6=0$

よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$

さらに，x^2+5x+6 を因数分解すると

x^3+4x^2+x-6

$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)(x+3)}$

$$\begin{array}{r}
x^2+5x\;+6 \\
x-1\,\overline{)\,x^3+4x^2+\;x-6} \\
\underline{x^3-\;x^2\qquad\qquad} \\
5x^2+\;x\qquad \\
\underline{5x^2-5x\qquad} \\
6x-6 \\
\underline{6x-6} \\
0
\end{array}$$

(2) $P(x)=x^3-x^2-17x-15$ とおくと

$P(-1)$

$=(-1)^3-(-1)^2-17\times(-1)-15$

$=0$

よって，$x+1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3-x^2-17x-15$

$=(x+1)(x^2-2x-15)$

さらに，$x^2-2x-15$ を因数分解すると

$x^3-x^2-17x-15$

$=\boldsymbol{(x+1)(x+3)(x-5)}$

$$\begin{array}{r}
x^2-2x\;-15 \\
x+1\,\overline{)\,x^3-\;x^2-17x-15} \\
\underline{x^3+\;x^2\qquad\qquad\quad} \\
-2x^2-17x\qquad \\
\underline{-2x^2-\;2x\qquad} \\
-15x-15 \\
\underline{-15x-15} \\
0
\end{array}$$

(3) $P(x)=x^3+3x^2-25x+21$ とおくと

$P(1)=1^3+3\times1^2-25\times1+21=0$

よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3+3x^2-25x+21$

$=(x-1)(x^2+4x-21)$

さらに，$x^2+4x-21$ を因数分解すると

$x^3+3x^2-25x+21$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-3)(x+7)}$

$$
\begin{array}{r}
x^2+4x\ -21 \\
x-1\,\big)\,\overline{x^3+3x^2-25x+21} \\
\underline{x^3-\ \ x^2} \\
4x^2-25x \\
\underline{4x^2-\ \ 4x} \\
-21x+21 \\
\underline{-21x+21} \\
0
\end{array}
$$

(4) $P(x)=x^3-4x^2-11x+30$ とおくと

$$P(2)=2^3-4\times2^2-11\times2+30=0$$

よって，$x-2$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$$x^3-4x^2-11x+30$$
$$=(x-2)(x^2-2x-15)$$

さらに，$x^2-2x-15$ を因数分解すると

$$x^3-4x^2-11x+30$$
$$=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(x-5)}$$

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x\ -15 \\
x-2\,\big)\,\overline{x^3-4x^2-11x+30} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
-2x^2-11x \\
\underline{-2x^2+\ \ 4x} \\
-15x+30 \\
\underline{-15x+30} \\
0
\end{array}
$$

3 高次方程式

教科書 P.32

問8 (1) 左辺を因数分解すると

$$x(x^2+2x-8)=0$$
$$x(x-2)(x+4)=0$$
$$x=0 \quad \text{または} \quad x-2=0$$
$$\text{または} \quad x+4=0$$

したがって　$\boldsymbol{x=0,\ 2,\ -4}$

(2) 左辺を因数分解すると

$$x(x^2+x-1)=0$$
$$x=0 \quad \text{または} \quad x^2+x-1=0$$

$x^2+x-1=0$ より

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x=0,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

教科書 P.33

問9 (1) 左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

よって

$$x+1=0 \quad \text{または} \quad x^2-x+1=0$$

$x+1=0$ より　$x=-1$

$x^2-x+1=0$ より

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

(2) (左辺) $=x^3-2^3$

左辺を因数分解すると

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

よって

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x+4=0$$

$x-2=0$ より　$x=2$

$x^2+2x+4=0$ より

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{12}\,i}{2}$$
$$=\frac{-2\pm2\sqrt{3}\,i}{2}$$
$$=\frac{2(-1\pm\sqrt{3}\,i)}{2}$$
$$=-1\pm\sqrt{3}\,i$$

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{3}\,i}$

問10 (1) $x^2=X$ とおくと

$$X^2-10X+9=0$$

左辺を因数分解すると

$$(X-1)(X-9)=0$$
$$(x^2-1)(x^2-9)=0$$

よって

$$x^2-1=0 \quad \text{または} \quad x^2-9=0$$

$x^2=1$ より　$x=\pm1$

$x^2=9$ より　$x=\pm3$

したがって　$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm3}$

(2) $x^2=X$ とおくと

$$X^2+5X-36=0$$

左辺を因数分解すると

$$(X-4)(X+9)=0$$
$$(x^2-4)(x^2+9)=0$$

よって

$x^2-4=0$　または　$x^2+9=0$

$x^2=4$ より　　$x=\pm 2$

$x^2=-9$ より　　$x=\pm 3i$

したがって　　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \pm 3i}$

教科書 P.34

問11 (1)　$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ とおくと

$P(1)=1^3-6\times 1^2+11\times 1-6=0$

であるから，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

よって

$(x-1)(x^2-5x+6)=0$

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$x-1=0$　または　$x-2=0$

または　$x-3=0$

したがって　　$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ 3}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x+6 \\
\hline
x-1 & x^3-6x^2+11x-6 \\
 & x^3-x^2 \\
\hline
 & -5x^2+11x \\
 & -5x^2+5x \\
\hline
 & 6x-6 \\
 & 6x-6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(2)　$P(x)=x^3-3x^2-13x+15$ とおくと

$P(1)=1^3-3\times 1^2-13\times 1+15=0$

であるから，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x-1)(x^2-2x-15)$

よって

$(x-1)(x^2-2x-15)=0$

$(x-1)(x+3)(x-5)=0$

$x-1=0$　または　$x+3=0$

または　$x-5=0$

したがって　　$\boldsymbol{x=1,\ -3,\ 5}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-15 \\
\hline
x-1 & x^3-3x^2-13x+15 \\
 & x^3-x^2 \\
\hline
 & -2x^2-13x \\
 & -2x^2+2x \\
\hline
 & -15x+15 \\
 & -15x+15 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(3)　$P(x)=x^3-3x^2+x+2$ とおくと

$P(2)=2^3-3\times 2^2+2+2=0$

であるから，$x-2$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x-2)(x^2-x-1)$

よって

$(x-2)(x^2-x-1)=0$

$x-2=0$　または　$x^2-x-1=0$

$x-2=0$ より　　$x=2$

$x^2-x-1=0$ より

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-1)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x-1 \\
\hline
x-2 & x^3-3x^2+x+2 \\
 & x^3-2x^2 \\
\hline
 & -x^2+x \\
 & -x^2+2x \\
\hline
 & -x+2 \\
 & -x+2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

(4)　$P(x)=x^3-x^2-4x-2$ とおくと

$P(-1)$

$=(-1)^3-(-1)^2-4\times(-1)-2$

$=0$

であるから，$x+1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x+1)(x^2-2x-2)$

よって

$(x+1)(x^2-2x-2)=0$

$x+1=0$　または　$x^2-2x-2=0$

$x+1=0$ より　　$x=-1$

$x^2-2x-2=0$ より

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$=\frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2(1\pm\sqrt{3})}{2}$$

$$=1\pm\sqrt{3}$$

したがって　　$\boldsymbol{x=-1,\ 1\pm\sqrt{3}}$

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x\ \ -2 \\
x+1\,\big)\overline{x^3-\ \ x^2-4x-2} \\
\underline{x^3+\ \ x^2\qquad\qquad} \\
-2x^2-4x\quad\ \ \\
\underline{-2x^2-2x\quad\ \ } \\
-2x-2 \\
\underline{-2x-2} \\
0
\end{array}
$$

復習問題

教科書 P.35

1 (1)

$$
\begin{array}{r}
4x\ \ +1 \\
x-1\,\big)\overline{4x^2-3x+1} \\
\underline{4x^2-4x\quad} \\
x+1 \\
\underline{x-1} \\
2
\end{array}
$$

したがって，**商は $\boldsymbol{4x+1}$，余りは 2**

(2)

$$
\begin{array}{r}
x^2+3x\ \ -6 \\
x+2\,\big)\overline{x^3+5x^2\qquad\ -\ 6} \\
\underline{x^3+2x^2\qquad\qquad} \\
3x^2\qquad\qquad \\
\underline{3x^2+6x\quad\ \ } \\
-6x-\ \ 6 \\
\underline{-6x-12} \\
6
\end{array}
$$

したがって，**商は $\boldsymbol{x^2+3x-6}$，余りは 6**

2 (1) $P(1)=1^3+2\times1^2+2\times1-4$

$=1+2+2-4$

$=1$

したがって，余りは **1**

(2) $P(-2)$

$=(-2)^3+2\times(-2)^2+2\times(-2)-4$

$=-8+8-4-4$

$=-8$

したがって，余りは **−8**

3 (1) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とおくと

$P(-1)$

$=(-1)^3-4\times(-1)^2+(-1)+6$

$=0$

よって，$x+1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x^2-5x+6)$

さらに，x^2-5x+6 を因数分解すると

x^3-4x^2+x+6

$=\boldsymbol{(x+1)(x-2)(x-3)}$

$$
\begin{array}{r}
x^2-5x\ \ +6 \\
x+1\,\big)\overline{x^3-4x^2+\ \ x+6} \\
\underline{x^3+\ \ x^2\qquad\quad} \\
-5x^2+\ \ x\quad\ \ \\
\underline{-5x^2-5x\quad\ \ } \\
6x+6 \\
\underline{6x+6} \\
0
\end{array}
$$

(2) $P(x)=x^3-9x^2+23x-15$ とおくと

$P(1)=1^3-9\times1^2+23\times1-15=0$

よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3-9x^2+23x-15$

$=(x-1)(x^2-8x+15)$

さらに，$x^2-8x+15$ を因数分解すると

$x^3-9x^2+23x-15$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-3)(x-5)}$

$$
\begin{array}{r}
x^2-8x\ \ +15 \\
x-1\,\big)\overline{x^3-9x^2+23x-15} \\
\underline{x^3-\ \ x^2\qquad\qquad\ } \\
-8x^2+23x\qquad \\
\underline{-8x^2+\ \ 8x\qquad} \\
15x-15 \\
\underline{15x-15} \\
0
\end{array}
$$

(3) $P(x)=x^3-19x+30$ とおくと

$P(2)=2^3-19\times2+30=0$

よって，$x-2$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3-19x+30=(x-2)(x^2+2x-15)$

さらに，$x^2+2x-15$ を因数分解すると

$x^3-19x+30=\boldsymbol{(x-2)(x-3)(x+5)}$

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x\ \ -15 \\
x-2\,\big)\overline{x^3\qquad\ -19x+30} \\
\underline{x^3-2x^2\qquad\qquad\ } \\
2x^2-19x\qquad \\
\underline{2x^2-\ \ 4x\qquad} \\
-15x+30 \\
\underline{-15x+30} \\
0
\end{array}
$$

(4) $P(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$P(1)=1^3+3\times1^2-4=0$

よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)$

さらに，x^2+4x+4 を因数分解すると

$x^3+3x^2-4=\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2}$

$$\begin{array}{r}
x^2+4x+4 \\
x-1 \overline{\smash{)}\, x^3+3x^2 \qquad -4} \\
\underline{x^3-x^2 \qquad\quad} \\
4x^2 \qquad\quad \\
\underline{4x^2-4x} \\
4x-4 \\
\underline{4x-4} \\
0
\end{array}$$

4 (1) 左辺を因数分解すると

$x(x^2-x-20)=0$

$x(x+4)(x-5)=0$

$x=0$ または $x+4=0$

または $x-5=0$

したがって $\boldsymbol{x=0,\ -4,\ 5}$

(2) 左辺を因数分解すると

$x(3x^2-8x+5)=0$

$x(x-1)(3x-5)=0$

$x=0$ または $x-1=0$

または $3x-5=0$

したがって $\boldsymbol{x=0,\ 1,\ \dfrac{5}{3}}$

5 (1) (左辺) $=x^3+2^3$

左辺を因数分解すると

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

よって

$x+2=0$ または $x^2-2x+4=0$

$x+2=0$ より $x=-2$

$x^2-2x+4=0$ より

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{12}i}{2}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\frac{2(1\pm\sqrt{3}i)}{2}$$

$$=1\pm\sqrt{3}i$$

したがって $\boldsymbol{x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i}$

(2) (左辺) $=x^3-3^3$

左辺を因数分解すると

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

よって

$x-3=0$ または $x^2+3x+9=0$

$x-3=0$ より $x=3$

$x^2+3x+9=0$ より

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times9}}{2\times1}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{27}i}{2}$$

$$=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$$

したがって $\boldsymbol{x=3,\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$

6 (1) $x^2=X$ とおくと

$X^2-26X+25=0$

左辺を因数分解すると

$(X-1)(X-25)=0$

$(x^2-1)(x^2-25)=0$

よって

$x^2-1=0$ または $x^2-25=0$

$x^2=1$ より $x=\pm1$

$x^2=25$ より $x=\pm5$

したがって $\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm5}$

(2) $x^2=X$ とおくと

$X^2-8X-9=0$

左辺を因数分解すると

$(X+1)(X-9)=0$

$(x^2+1)(x^2-9)=0$

よって

$x^2+1=0$ または $x^2-9=0$

$x^2=-1$ より $x=\pm i$

$x^2=9$ より $x=\pm3$

したがって $\boldsymbol{x=\pm i,\ \pm3}$

7 (1) $P(x)=x^3+x^2-17x+15$ とおくと

$P(1)=1^3+1^2-17\times1+15$

$=1+1-17+15$

$=0$

であるから，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x-1)(x^2+2x-15)$

よって

$(x-1)(x^2+2x-15)=0$

$(x-1)(x-3)(x+5)=0$

$x-1=0$ または $x-3=0$

または $x+5=0$

したがって $\boldsymbol{x=1,\ 3,\ -5}$

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x-15 \\
x-1\,\big)\overline{x^3+x^2-17x+15} \\
\underline{x^3-x^2} \\
2x^2-17x \\
\underline{2x^2-2x} \\
-15x+15 \\
\underline{-15x+15} \\
0
\end{array}
$$

(2) $P(x)=x^3+8x^2+16x+9$ とおくと

$P(-1)$

$=(-1)^3+8\times(-1)^2+16\times(-1)+9$

$=-1+8-16+9$

$=0$

であるから，$x+1$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x+1)(x^2+7x+9)$

よって

$(x+1)(x^2+7x+9)=0$

$x+1=0$ または $x^2+7x+9=0$

$x+1=0$ より　$x=-1$

$x^2+7x+9=0$ より

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times9}}{2\times1}$$

$$=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}}$

$$
\begin{array}{r}
x^2+7x+9 \\
x+1\,\big)\overline{x^3+8x^2+16x+9} \\
\underline{x^3+x^2} \\
7x^2+16x \\
\underline{7x^2+7x} \\
9x+9 \\
\underline{9x+9} \\
0
\end{array}
$$

(3) $P(x)=x^3-6x^2+9x-2$ とおくと

$P(2)=2^3-6\times2^2+9\times2-2$

$=8-24+18-2$

$=0$

であるから，$x-2$ は $P(x)$ の因数である。

あとのわり算より

$P(x)=(x-2)(x^2-4x+1)$

よって

$(x-2)(x^2-4x+1)=0$

$x-2=0$ または $x^2-4x+1=0$

$x-2=0$ より　$x=2$

$x^2-4x+1=0$ より

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2(2\pm\sqrt{3})}{2}$$

$$=2\pm\sqrt{3}$$

したがって　$\boldsymbol{x=2,\ 2\pm\sqrt{3}}$

$$
\begin{array}{r}
x^2-4x+1 \\
x-2\,\big)\overline{x^3-6x^2+9x-2} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
-4x^2+9x \\
\underline{-4x^2+8x} \\
x-2 \\
\underline{x-2} \\
0
\end{array}
$$

4節 式と証明

1 等式の証明

教科書 P.36

問1 (1) 左辺と右辺を別々に計算すると

$(\text{左辺})=(a+b)^2+(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2$

$=2a^2+2b^2$

$(\text{右辺})=2(a^2+b^2)$

$=2a^2+2b^2$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

が成り立つ。

(2) 左辺と右辺を別々に計算すると

$(\text{左辺})=(x^2+1)(y^2+1)$

$=x^2y^2+x^2+y^2+1$

$(\text{右辺})=(xy-1)^2+(x+y)^2$

$=x^2y^2-2xy+1$

$\qquad +x^2+2xy+y^2$

$=x^2y^2+x^2+y^2+1$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから

$(x^2+1)(y^2+1)=(xy-1)^2+(x+y)^2$

が成り立つ。

教科書 P.37

問2 $x+y=1$ であるから　$y=1-x$

よって

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x(x+1)+(1-x)\{(1-x)+1\} \\
&= x^2+x+(1-x)(2-x) \\
&= x^2+x+2-x-2x+x^2 \\
&= 2x^2-2x+2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= 2\{1-x(1-x)\} \\
&= 2(1-x+x^2) \\
&= 2x^2-2x+2
\end{aligned}
$$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから

$$x(x+1)+y(y+1)=2(1-xy)$$

が成り立つ。

問3 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと

$\dfrac{a}{b}=k$ より　$a=bk$

$\dfrac{c}{d}=k$ より　$c=dk$

よって

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= bk(dk+d) \\
&= bdk(k+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= dk(bk+b) \\
&= bdk(k+1)
\end{aligned}
$$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから

$$a(c+d)=c(a+b)$$

が成り立つ。

2 不等式の証明

教科書 P.38

問4 (1) (左辺) − (右辺) を計算すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (x^2+4)-4x \\
&= x^2-4x+4 \\
&= (x-2)^2
\end{aligned}
$$

ここで，$(\text{実数})^2 \geqq 0$ であるから

$$(x-2)^2 \geqq 0$$

したがって，(左辺) − (右辺) $\geqq 0$ となるから

$$x^2+4 \geqq 4x$$

が成り立つ。

(2) (左辺) − (右辺) を計算すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (x^2+y^2)-2xy \\
&= x^2-2xy+y^2 \\
&= (x-y)^2
\end{aligned}
$$

ここで，$(\text{実数})^2 \geqq 0$ であるから

$$(x-y)^2 \geqq 0$$

したがって，(左辺) − (右辺) $\geqq 0$ となるから

$$x^2+y^2 \geqq 2xy$$

が成り立つ。

問5 (1) **相加平均** $\dfrac{9+16}{2}=\mathbf{\dfrac{25}{2}}$

相乗平均
$$
\begin{aligned}
\sqrt{9\times16} &= \sqrt{3^2\times4^2} \\
&= 3\times4 \\
&= \mathbf{12}
\end{aligned}
$$

(2) **相加平均** $\dfrac{15+15}{2}=\mathbf{15}$

相乗平均 $\sqrt{15\times15}=\mathbf{15}$

教科書 P.39

問6 $a>0$ であるから　$\dfrac{4}{a}>0$

よって，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right) \geqq \sqrt{a\times\frac{4}{a}}$$

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{a}\right) \geqq 2$$

したがって　$a+\dfrac{4}{a} \geqq 4$

(等号が成り立つのは $a=\dfrac{4}{a}$ のときで，$a>0$ より $a=2$ のときである。)

復習問題

教科書 P.40

1 左辺と右辺を別々に計算すると

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\
&= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \\
&= a^2c^2+2abcd+b^2d^2 \\
&\qquad +a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \\
&= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2
\end{aligned}
$$

したがって，(左辺) = (右辺) となるから

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2)(c^2+d^2) \\
&= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

2 $x-y=1$ であるから　$y=x-1$

よって

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= x^2+(x-1)^2 \\
&= x^2+x^2-2x+1 \\
&= 2x^2-2x+1
\end{aligned}
$$

$(右辺)=2x(x-1)+1$
$\quad =2x^2-2x+1$

したがって，(左辺)＝(右辺) となるから

$x^2+y^2=2xy+1$

が成り立つ。

3 (左辺)－(右辺) を計算すると

$$\begin{aligned}(左辺)-(右辺)&=(a^2+4b^2)-4ab\\&=a^2-4ab+4b^2\\&=(a-2b)^2\end{aligned}$$

ここで，$(実数)^2 \geqq 0$ であるから

$(a-2b)^2 \geqq 0$

したがって，(左辺)－(右辺) $\geqq 0$ となるから

$a^2+4b^2 \geqq 4ab$

が成り立つ。

4 $a>0$，$b>0$ であるから $\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$

よって，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geqq \sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geqq 1$$

したがって $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

(等号が成り立つのは $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$ のときで，

$a>0$，$b>0$ より $a=b$ のときである。)

章のまとめ

教科書 P.41

❶ (1) $(a+b)^3=\boxed{\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}}$

(2) $(a-b)^3=\boxed{\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}}$

❷ (1) $a^3+b^3=\boxed{\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)}}$

(2) $a^3-b^3=\boxed{\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)}}$

❸ $(a+b)^n$

$={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots$

$+\boxed{\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r}}\,a^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$

❹ a，b，c，d が実数のとき

$a+bi=c+di \iff \boxed{\boldsymbol{a=c}}$ かつ $\boxed{\boldsymbol{b=d}}$

❺ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式

$D=b^2-4ac$ と解について

$D\boxed{>}0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D\boxed{=}0 \iff$ 重解をもつ

$D\boxed{<}0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

❻ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

和 $\alpha+\beta=\boxed{\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}}$，　積 $\alpha\beta=\boxed{\boldsymbol{\dfrac{c}{a}}}$

❼ 整式 $P(x)$ において

$\boxed{\boldsymbol{P(\alpha)=0}}$

$\iff x-\alpha$ は $P(x)$ の因数である

❽ $a>0$，$b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2}\boxed{\geqq}\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$\boxed{\boldsymbol{a=b}}$ のときである。