１節 微分係数と導関数

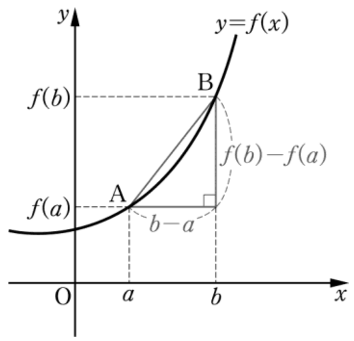
❶ 平均変化率

（教科書 p.182）

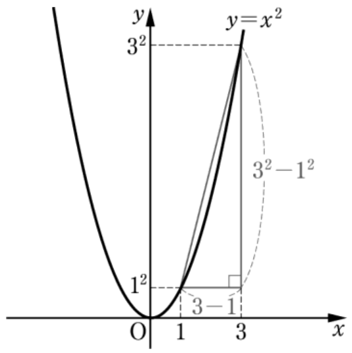
一般に，関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変わるとき，x の変化量に対する y の変化量の割合

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ……①

を，x が a から b まで変わるときの関数 $f(x)$ の
（① ）という。



例1 関数 $f(x)=x^2$ について，x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は



問1 次の関数について，x が 2 から 4 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1) $f(x)=2x+3$

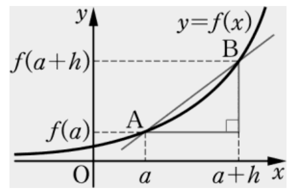
(2) $f(x)=-2x^2$

前ページの①において，$b-a=h$ と置き換えると，$b=a+h$ より

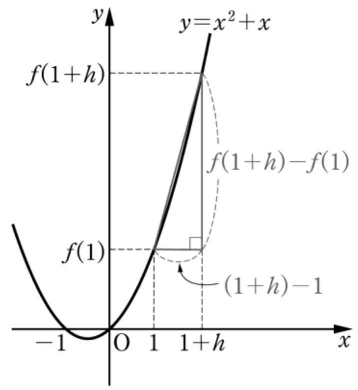
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となるから，次のことが成り立つ。

平均変化率
x が a から $a+h$ まで変わる ときの関数 $f(x)$の平均変化率は $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



例2 関数 $f(x)=x^2+x$ について，x が 1 から $1+h$ まで変わるときの平均変化率は



問2 関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。

(1)　x が 1 から $1+h$ まで変わるとき

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるとき

❷ 微分係数

（教科書 p.184）

関数 $f(x)=x^2$ において，x が 2 から $2+h$ まで変わるとき，

平均変化率は　$\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h$

である。ここで，h の値を限りなく 0 に近づけると，この平均変化率は下の表からもわかるように 4 に限りなく近づく。

h	⋯	-0.1	-0.01	-0.001	⋯	0	⋯	0.001	0.01	0.1	⋯
$4+h$	⋯	3.9	3.99	3.999	⋯	4	⋯	4.001	4.01	4.1	⋯

この値 4 を h が限りなく 0 に近づくときの $\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$ の（②　　　　　　）という。このことを，記号 lim を用いて次のように書く。

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4$$

微分係数の定義
$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

一般に，関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率において，h を限りなく 0 に近づけるときの極限値　$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$　が定まるならば，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における（③　　　　　　）といい，（④　　　　　　）で表す。

例3 関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$f'(1)=$

問3 関数 $f(x)=3x^2$ について，微分係数 $f'(1)$，$f'(-2)$ を求めよ。 p.192 Training 1 p.226 Level Up 1

微分係数と接線の傾き

（教科書 p.185）

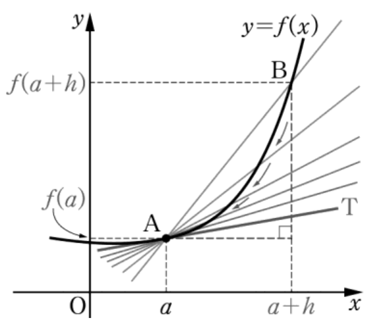
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると，平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は直線 AB の傾きを表している。

いま，h を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

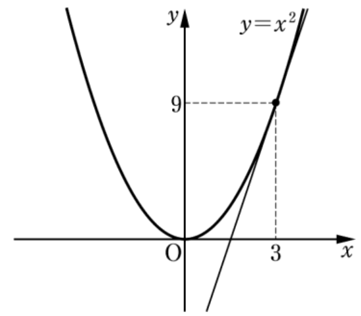
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$



であるから，直線 AB は，点 A を通り傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線 $y=f(x)$ の（⑤　　　　　　）といい，点 A を（⑥　　　　　　）という。

微分係数と接線の傾き
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における**接線の傾き**は，**微分係数 $f'(a)$** に等しい。

例4 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは，$f(x)=x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから



問4 放物線 $y=2x^2$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きを求めよ。

③ 導関数

（教科書 p.186）

一般に，関数 $y=f(x)$ について，x のおのおのの値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させれば，1 つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。

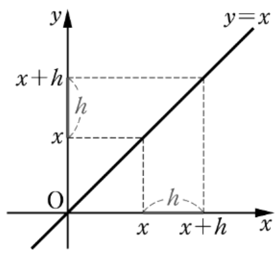
この関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の（⑦　　　　　　　　）という。

導関数の定義
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を（⑧　　　　　　　　　　），または単に（⑨　　　　　　　　）という。

例5 導関数の定義にしたがって，次の関数を微分してみよう。

(1)　$f(x)=x$ について



$f'(x)=$

(2)　$f(x)=x^3$ について

$f'(x)=$

問5 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=2x^2$ を微分せよ。 p.192 Training 2

④ 導関数の計算

x^n の導関数

（教科書 p.188）

一般に n が正の整数のとき，次の公式が成り立つ。 ← p.191 参考

x^n の導関数
$(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})' = \boldsymbol{n}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}$

定数関数の導関数

（教科書 p.188）

値が一定の関数を（⑩　　　　　　　　　）という。

定数関数の導関数
c が定数のとき　$(\boldsymbol{c})' = \mathbf{0}$

導関数の性質

（教科書 p.188）

一般に，関数の定数倍および和，差の導関数については，次のことが成り立つ。

定数倍，和，差の導関数
[1]　k が定数のとき　$\{\boldsymbol{kf}(\boldsymbol{x})\}' = \boldsymbol{kf}'(\boldsymbol{x})$ [2]　$\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$ [3]　$\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}' = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$

例6 上の性質を用いて，関数 $y = x^3 + 2x^2 - 3$ を微分してみよう。

← 性質 [2]，[3]

← 性質 [1]

問6 次の関数を微分せよ。 p.192 Training 3

（1）　$y = 2x + 3$

（2）　$y = x^2 + 4x + 6$

（3）　$y = -2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$

（4）　$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

例題 1 $(x+2)(3x-1)$ を微分せよ。

解

問7 次の関数を微分せよ。 p.192 Training 4

（1）　$y = x(3-4x)$

(2)　$y=(x-2)(2x+3)$

(3)　$y=(2x+1)(2x-1)$

(4)　$y=x(x+1)^2$

例7 r の関数 $S=\pi r^2$ を r で微分して得られる導関数 $\frac{dS}{dr}$ は

$\frac{dS}{dr}=$

問8 次の関数を〔　〕内の文字で微分せよ。

(1)　$h=10t-5t^2$〔t〕

(2)　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$〔r〕

微分係数の計算

（教科書 p.190）

例8 関数 $f(x)=x^2-3x-4$ について，$x=-2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると

よって

問9 関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$x=1$，$x=2$，$x=-3$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

例9 関数 $f(x)=3x^2+ax-1$ が，$f'(-1)=2$ を満たすとき，定数 a の値を求めてみよう。

$f(x)$ を x で微分すると

$f'(x)=$

であるから

$f'(-1)=2$ より

よって

問10 関数 $f(x)=ax^3-x^2+2ax+3$ が，$f'(2)=3$ を満たすとき，定数 a の値を求めよ。

p.192 Training 6　p.226 Level Up 2

参考　n次関数の微分

（教科書 p.191）

188 ページで示した次の公式が，すべての正の整数 n について成り立つことを証明してみよう。

$\boldsymbol{x^n}$ の導関数
$$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}}$$

二項定理により

$$(x+h)^n = x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} xh^{n-1} + h^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

右辺の x^n を左辺に移項して，両辺を h で割ると

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

したがって

$$(x^n)' =$$

Training

（教科書 p.192）

1 関数 $f(x)=-3x^2+4x$ について，次の問に答えよ。

(1) x が -1 から $-1+h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(2) (1)の結果を利用して，微分係数 $f'(-1)$ を求めよ。

2 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=3x^2+2x$ を微分せよ。

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=4x-5$

(2) $y=-2x^2+3x+1$

(3) $y=x^3+3x^2-1$

(4) $y=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+5$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(4x-3)(x^2+2x+6)$

(2) $y=(2x+3)^3$

5 次の関数の導関数を求め，〔　〕内に示した x の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=x^2+2x+2$　〔$x=-2$〕

(2) $f(x)=-x^3+3x-4$　〔$x=\frac{1}{2}$〕

6 関数 $f(x)=ax^2-7x+b$ が，$f(1)=1,\ f'(1)=-1$ を満たすとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

7 次のことを証明せよ。ただし，$a,\ b$ は定数とする。

(1) $y=(ax+b)^2$ ならば　$y'=2a(ax+b)$

(2) $y=(ax+b)^3$ ならば　$y'=3a(ax+b)^2$ *

＊ $y=(ax+b)^n$で表される関数の導関数については，次の公式が成り立つ。

$y=(ax+b)^n$　ならば　$y'=an(ax+b)^{n-1}$

ただし，$a,\ b$ は定数で，n は正の整数とする。

１節 微分係数と導関数

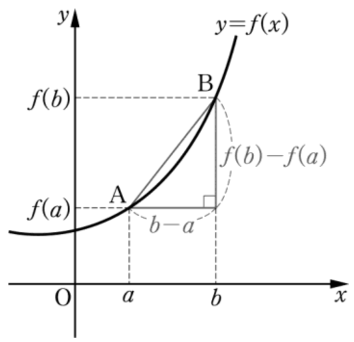
❶ 平均変化率

（教科書 p.182）

一般に，関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変わるとき，x の変化量に対する y の変化量の割合

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ……①

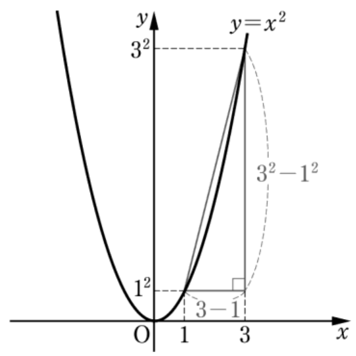
を，x が a から b まで変わるときの関数 $f(x)$ の（① 平均変化率 ）という。



例1 関数 $f(x)=x^2$ について，x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}$$

$$=4$$



問1 次の関数について，x が 2 から 4 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1) $f(x)=2x+3$

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{(2\cdot4+3)-(2\cdot2+3)}{4-2}=\mathbf{2}$$

(2) $f(x)=-2x^2$

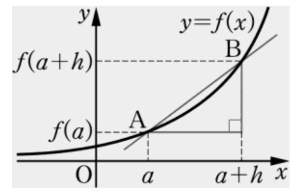
$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{(-2\cdot4^2)-(-2\cdot2^2)}{4-2}=\mathbf{-12}$$

前ページの①において，$b-a=h$ と置き換えると，$b=a+h$ より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となるから，次のことが成り立つ。

平均変化率
x が a から $a+h$ まで変わる ときの関数 $f(x)$の平均変化率は $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



例2 関数 $f(x)=x^2+x$ について，x が 1 から $1+h$ まで変わるときの平均変化率は

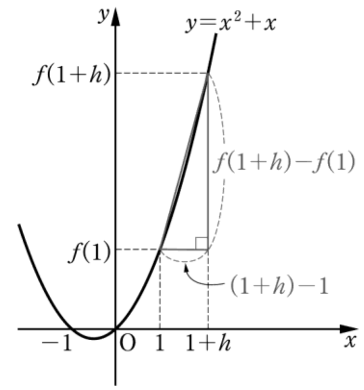
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{\{(1+h)^2+(1+h)\}-(1^2+1)}{h}$$

$$=\frac{3h+h^2}{h}$$

$$=\frac{h(3+h)}{h}$$

$$=3+h$$



問2 関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。

(1)　x が 1 から $1+h$ まで変わるとき

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{\{(1+h)^2-4(1+h)\}-(1^2-4\cdot 1)}{h}$$

$$=\frac{-2h+h^2}{h}=\frac{h(-2+h)}{h}$$

$$=\boldsymbol{-2+h}$$

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\frac{\{(a+h)^2-4(a+h)\}-(a^2-4a)}{h}$$

$$=\frac{2ah+h^2-4h}{h}=\frac{h(2a+h-4)}{h}$$

$$=\boldsymbol{2a+h-4}$$

② 微分係数

（教科書 p.184）

関数 $f(x)=x^2$ において，x が 2 から $2+h$ まで変わるとき，

平均変化率は　$\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h$

である。ここで，h の値を限りなく 0 に近づけると，この平均変化率は下の表からもわかるように 4 に限りなく近づく。

h	$\cdots$	-0.1	-0.01	-0.001	$\cdots$	0	$\cdots$	0.001	0.01	0.1	$\cdots$
$4+h$	$\cdots$	3.9	3.99	3.999	$\cdots$	4	$\cdots$	4.001	4.01	4.1	$\cdots$

この値 4 を h が限りなく 0 に近づくときの $\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$ の（② 極限値 ）という。このことを，

記号 lim を用いて次のように書く。

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4$$

微分係数の定義

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

一般に，関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率において，h を限りなく 0 に近づけるときの極限値　$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$　が定まるならば，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における（③ 微分係数 ）といい，（④ $\boldsymbol{f'(a)}$ ）で表す。

例3 関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

問3 関数 $f(x)=3x^2$ について，微分係数 $f'(1)$，$f'(-2)$ を求めよ。 p.192 Training 1 p.226 LevelUp 1

$$\boldsymbol{f'(1)}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3(1+h)^2-3\cdot1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{6h+3h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(6+3h)=\boldsymbol{6}$$

$$\boldsymbol{f'(-2)}=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3(-2+h)^2-3\cdot(-2)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-12h+3h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(-12+3h)=\boldsymbol{-12}$$

微分係数と接線の傾き

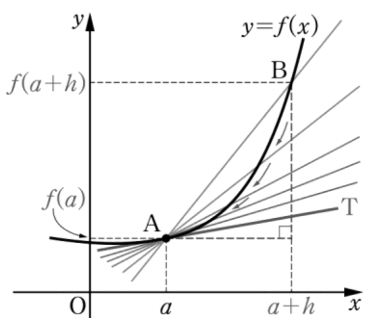
（教科書 p.185）

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると，平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は直線 AB の傾きを表している。

いま，h を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき



$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

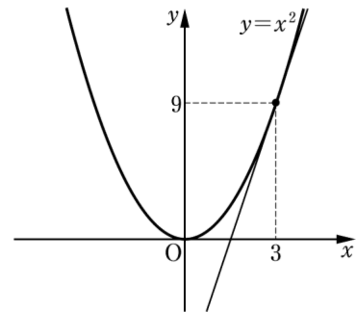
であるから，直線 AB は，点 A を通り傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線 $y=f(x)$ の（⑤ 接線 ）といい，点 A を（⑥ 接点 ）という。

微分係数と接線の傾き
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における**接線の傾き**は，**微分係数 $f'(a)$** に等しい。

例4 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは，$f(x)=x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$$f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(6+h)=6$$



問4 放物線 $y=2x^2$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きを求めよ。

$f(x)=2x^2$ とおくと，求める接線の傾きは

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{2(-1+h)^2-2\cdot(-1)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-4h+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(-4+2h)=\boldsymbol{-4}$$

③ 導関数

（教科書 p.186）

一般に，関数 $y=f(x)$ について，x のおのおのの値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させれば，1 つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。

この関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の（⑦　導関数　）という。

導関数の定義
$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を（⑧　x で微分する　），または単に（⑨　微分する　）という。

例5 導関数の定義にしたがって，次の関数を微分してみよう。

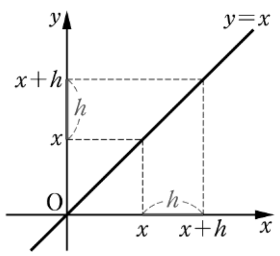
(1)　$f(x)=x$ について

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}1=1$$



(2)　$f(x)=x^3$ について

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

$$=3x^2$$

問5 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=2x^2$ を微分せよ。 p.192 Training 2

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4x+2h)=\boldsymbol{4x}$$

4 導関数の計算

x^n の導関数

（教科書 p.188）

一般に n が正の整数のとき，次の公式が成り立つ。 ← p.191 参考

x^n の導関数
$(x^n)' = nx^{n-1}$

定数関数の導関数

（教科書 p.188）

値が一定の関数を（⑩　定数関数　）という。

定数関数の導関数
c が定数のとき　$(c)' = 0$

導関数の性質

（教科書 p.188）

一般に，関数の定数倍および和，差の導関数については，次のことが成り立つ。

定数倍，和，差の導関数
[1]　k が定数のとき　$\{kf(x)\}' = kf'(x)$ [2]　$\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x)$ [3]　$\{f(x)-g(x)\}' = f'(x)-g'(x)$

例6 上の性質を用いて，関数 $y = x^3+2x^2-3$ を微分してみよう。

$y' = (x^3+2x^2-3)'$

$= (x^3)' + (2x^2)' - (3)'$ ← 性質 [2]，[3]

$= (x^3)' + 2(x^2)' - (3)'$ ← 性質 [1]

$= 3x^2 + 2\cdot 2x - 0 = 3x^2+4x$

問6 次の関数を微分せよ。 p.192 Training 3

(1)　$y = 2x+3$

$y' = (2x)' + (3)' = 2(x)' + (3)'$

$= 2\cdot 1 + 0 = \mathbf{2}$

(2)　$y = x^2+4x+6$

$y' = (x^2)' + (4x)' + (6)'$

$= (x^2)' + 4(x)' + (6)'$

$= 2x + 4\cdot 1 + 0 = \mathbf{2x+4}$

(3)　$y = -2x^3-5x^2+7x-8$

$y' = (-2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' - (8)'$

$= -2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' - (8)'$

$= -2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 7\cdot 1 - 0$

$= \mathbf{-6x^2-10x+7}$

(4)　$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

$y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (3x)' + (1)'$

$= \frac{1}{3}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' - 3(x)' + (1)'$

$= \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2x - 3\cdot 1 + 0$

$= \mathbf{x^2 - x - 3}$

例題 1 $(x+2)(3x-1)$ を微分せよ。

解 $y = 3x^2+5x-2$ であるから ← 展開してから微分する

$y' = (3x^2+5x-2)' = 3(x^2)' + 5(x)' - (2)'$

$= 3\cdot 2x + 5\cdot 1 - 0 = 6x+5$

問7 次の関数を微分せよ。 p.192 Training 4

(1)　$y = x(3-4x)$

$y = -4x^2+3x$ であるから

$y' = (-4x^2) ' + (3x)'$

$= -4(x^2)' + 3(x)'$

$= -4\cdot 2x + 3\cdot 1$

$= \mathbf{-8x+3}$

(2)　$y=(x-2)(2x+3)$

$y=2x^2-x-6$ であるから

$y'=(2x^2)'-(x)'-(6)'$

$=2(x^2)'-(x)'-(6)'$

$=2\cdot 2x-1-0=\mathbf{4x-1}$

(3)　$y=(2x+1)(2x-1)$

$y=4x^2-1$ であるから

$y'=(4x^2)'-(1)'=4(x^2)'-(1)'$

$=4\cdot 2x-0=\mathbf{8x}$

(4)　$y=x(x+1)^2$

$y=x^3+2x^2+x$ であるから

$y'=(x^3)'+(2x^2)'+(x)'$

$=(x^3)'+2(x^2)'+(x)'$

$=3x^2+2\cdot 2x+1$

$=\mathbf{3x^2+4x+1}$

例7 r の関数 $S=\pi r^2$ を r で微分して得られる導関数 $\frac{dS}{dr}$ は

$$\frac{dS}{dr}=\pi(r^2)'=\pi\cdot 2r=2\pi r$$

問8 次の関数を〔　〕内の文字で微分せよ。

(1)　$h=10t-5t^2$〔t〕

$$\frac{dh}{dt}=10(t)'-5(t^2)'=10-5\cdot 2t$$

$$=\mathbf{10-10t}$$

(2)　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$〔r〕

$$\frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\pi(r^3)'=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2=\mathbf{4\pi r^2}$$

微分係数の計算

（教科書 p.190）

例8 関数 $f(x)=x^2-3x-4$ について，$x=-2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=2x-3$

よって　　$f'(-2)=2\cdot(-2)-3=-7$

問9 関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$x=1$，$x=2$，$x=-3$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$f'(x)=4x-3$ であるから

$\mathbf{f'(1)}=4\cdot 1-3=\mathbf{1}$

$\mathbf{f'(2)}=4\cdot 2-3=\mathbf{5}$

$\mathbf{f'(-3)}=4\cdot(-3)-3=\mathbf{-15}$

例9 関数 $f(x)=3x^2+ax-1$ が，$f'(-1)=2$ を満たすとき，定数 a の値を求めてみよう。

$f(x)$ を x で微分すると

$f'(x)=6x+a$

であるから　　$f'(-1)=-6+a$

$f'(-1)=2$ より　　$-6+a=2$

よって　　$a=8$

問10 関数 $f(x)=ax^3-x^2+2ax+3$ が，$f'(2)=3$ を満たすとき，定数 a の値を求めよ。

p.192 Training 6　p.226 LevelUp 2

$f'(x)=3ax^2-2x+2a$ であるから

$f'(2)=3a\cdot 2^2-2\cdot 2+2a$

$=12a-4+2a=14a-4$

$f'(2)=3$ より　　$14a-4=3$

よって　$a=\mathbf{\frac{1}{2}}$

参考 n次関数の微分

（教科書 p.191）

188 ページで示した次の公式が，すべての正の整数 n について成り立つことを証明してみよう。

x^n の導関数
$$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}}$$

二項定理により

$$(x+h)^n = x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} xh^{n-1} + h^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

右辺の x^n を左辺に移項して，両辺を h で割ると

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

したがって

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right\}$$

$$= nx^{n-1}$$

Training

（教科書 p.192）

1 関数 $f(x)=-3x^2+4x$ について，次の問に答えよ。

(1) x が -1 から $-1+h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ。

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\frac{\{-3(-1+h)^2+4(-1+h)\}-\{-3\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)\}}{h}$$

$$=\frac{(-7+10h-3h^2)-(-7)}{h}$$

$$=\frac{10h-3h^2}{h}=\mathbf{10-3}\boldsymbol{h}$$

(2) (1)の結果を利用して，微分係数 $f'(-1)$ を求めよ。

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(10-3h)=\mathbf{10}$$

2 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=3x^2+2x$ を微分せよ。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{3(x+h)^2+2(x+h)\}-(3x^2+2x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3x^2+6xh+3h^2+2x+2h)-(3x^2+2x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2+2h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x+3h+2)$$

$$=\boldsymbol{6x+2}$$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=4x-5$

$$y'=(4x)'-(5)'=4(x)'-(5)'$$

$$=4\cdot 1-0=\mathbf{4}$$

(2) $y=-2x^2+3x+1$

$$y'=(-2x^2)'+(3x)'+(1)'$$

$$=-2(x^2)'+3(x)'+(1)'$$

$$=-2\cdot 2x+3\cdot 1+0$$

$$=\boldsymbol{-4x+3}$$

(3) $y=x^3+3x^2-1$

$$y'=(x^3)'+(3x^2)'-(1)'$$

$$=(x^3)'+3(x^2)'-(1)'$$

$$=3x^2+3\cdot 2x-0$$

$$=\boldsymbol{3x^2+6x}$$

(4) $y=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+5$

$$y'=\left(-\frac{2}{3}x^3\right)'+\left(\frac{3}{2}x^2\right)'-(2x)'+(5)'$$

$$=-\frac{2}{3}(x^3)'+\frac{3}{2}(x^2)'-2(x)'+(5)'$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot 3x^2+\frac{3}{2}\cdot 2x-2\cdot 1+0$$

$$=\boldsymbol{-2x^2+3x-2}$$

4 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(4x-3)(x^2+2x+6)$

$y=4x^3+5x^2+18x-18$ であるから

$y'=(4x^3)'+(5x^2)'+(18x)'-(18)'$

$=4\cdot 3x^2+5\cdot 2x+18\cdot 1-0$

$=\boldsymbol{12x^2+10x+18}$

(2) $y=(2x+3)^3$

$y=8x^3+36x^2+54x+27$ であるから

$y'=(8x^3)'+(36x^2)'+(54x)'+(27)'$

$=8\cdot 3x^2+36\cdot 2x+54\cdot 1+0$

$=\boldsymbol{24x^2+72x+54}$

5 次の関数の導関数を求め，〔　〕内に示した x の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=x^2+2x+2$　　〔$x=-2$〕

$\boldsymbol{f'(x)=2x+2}$

$\boldsymbol{f'(-2)}=2\cdot(-2)+2=\boldsymbol{-2}$

(2) $f(x)=-x^3+3x-4$　　〔$x=\frac{1}{2}$〕

$\boldsymbol{f'(x)=-3x^2+3}$

$\boldsymbol{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$

6 関数 $f(x)=ax^2-7x+b$ が，$f(1)=1$，$f'(1)=-1$ を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。

$f'(x)=2ax-7$ であるから

$f(1)=1$ より　　$a-7+b=1$

すなわち　　$a+b=8$　　……①

$f'(1)=-1$ より　　$2a-7=-1$

よって　　$a=3$

①に代入して　　$b=5$

したがって　　$\boldsymbol{a=3}$，$\boldsymbol{b=5}$

7 次のことを証明せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1) $y=(ax+b)^2$ ならば　$y'=2a(ax+b)$

$y=a^2x^2+2abx+b^2$ より

$y'=2a^2x+2ab=2a(ax+b)$

(2) $y=(ax+b)^3$ ならば　$y'=3a(ax+b)^2$ *

$y=a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3$ より

$y'=3a^3x^2+6a^2bx+3ab^2$

$=3a(a^2x^2+2abx+b^2)$

$=3a(ax+b)^2$

＊ $y=(ax+b)^n$で表される関数の導関数については，次の公式が成り立つ。

$y=(ax+b)^n$　ならば　$y'=an(ax+b)^{n-1}$

ただし，a，b は定数で，n は正の整数とする。