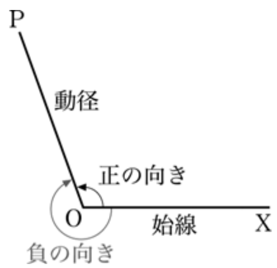
１節　三角関数

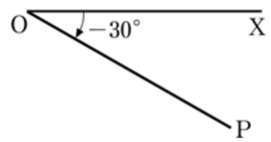
❶ 一般角

（教科書 p.110）

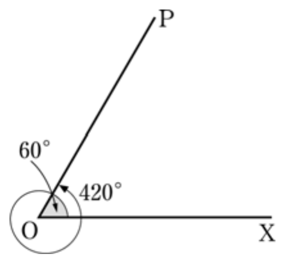
平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させせることを考える。このとき，半直線 OP を（① 　　　　　）といい，動径の始めの位置を示す半直線 OX を（② 　　　　　）という。



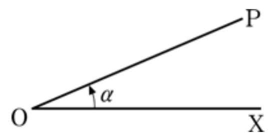
回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを（③ 　　　　　　　），時計の針の回転と同じ向きを（④ 　　　　　　　）という。



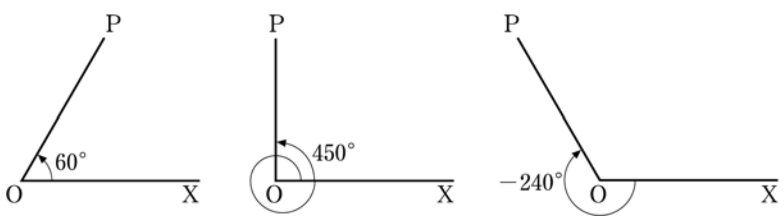
負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を（⑤ 　　　　　　）という。



また， α を一般角として，始線 OX の位置から点 O のまわりに α だけ回転した動径を，（⑥ 　　　　　　　）という。



例1 半直線 OX を始線として，60°，450°，−240° の動径を図示すると，それぞれ次のようになる。



問1 OX を始線として，次の角の動径 OP を図示せよ。

(1)　240°

(2)　−60°

(3)　765°

(4)　−210°

右の図のように，30° の動径を OP とする。

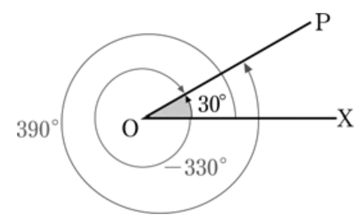
動径 OP は 360° 回転するともとの位置に戻るから，たとえば

$390° = 30° + 360° \times 1$

$750° = 30° + 360° \times 2$

$-330° = 30° + 360° \times (-1)$

などの角の動径の位置は，30° の動径の位置と同じである。



さらに，n を整数とするとき

$30° + 360° \times n$

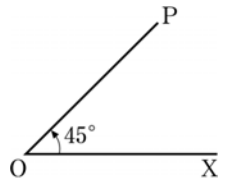
の形で表される角の動径の位置は，すべて 30° の動径の位置と一致する。これらの角を（⑦ 　　　　　　　　）という。

一般に，次のことがいえる。

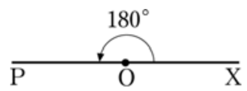
動径の表す一般角
角 α の動径が表す一般角は $\boldsymbol{\alpha + 360^\circ \times n}$　（n は整数）

問2 次の図で，OX を始線としたときの動径 OP の表す一般角を求めよ。

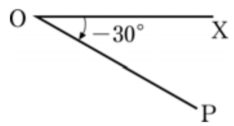
(1)



(2)



(3)



問3 次の角を $\alpha + 360^\circ \times n$（$n$ は整数）の形で表すとき，α を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ とする。

(1)　420°

(2)　730°

(3)　-210°

(4)　-675°

❷ 弧度法

（教科書 p.112）

半径 1 の円において長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを（⑧　　　　　　　）または（⑨　　　　　　　）といい，これを単位とする角の表し方を（⑩　　　　　　　）という。

中心角は弧の長さに比例するから，半径 1 の円の周の長さ 2π に対する中心角 360° を弧度法で表すと 2π ラジアンである。

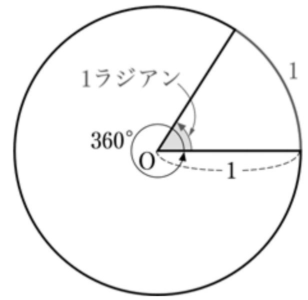
すなわち

$360^\circ = 2\pi$ ラジアン

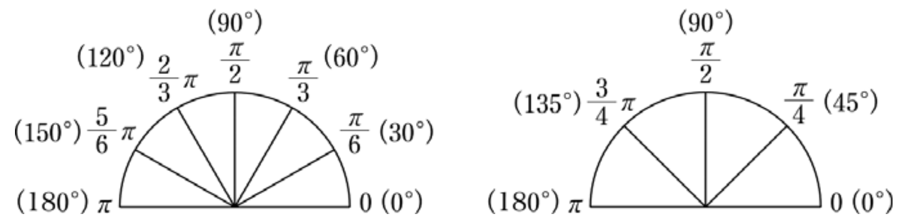
（⑪　　　　　　　　　　　　　　）

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ラジアン

1 ラジアン$= \frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.2958^\circ$



いろいろな角について，度と弧度の対応は，次の図のようになる。



注意　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

例2 240°を弧度法で表してみよう。

←— $180^\circ = \pi$

問4 270°, 315°, -60°, -225° を弧度法で表せ。

例3 弧度法による角 $\frac{5}{3}\pi$ を度で表してみよう。

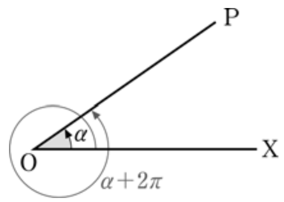
←― $\pi = 180°$

問5 弧度法による角 $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7}{6}\pi$, $-\frac{11}{6}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$ を度で表せ。

これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。

弧度法を用いると，角 α の動径が表す一般角 θ は，次のように表される。

（⑫　　　　　　　　　　　　）　（n は整数）



扇形の弧の長さと面積

（教科書 p.113）

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とする。1 つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから

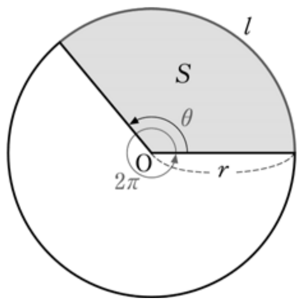
$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$,　$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$

よって　$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

すなわち

$$\boldsymbol{l = r\theta,\quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr}$$



例4 半径 6，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

問6 半径 8，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

③ 三角関数

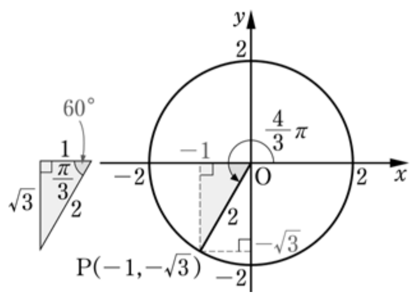
（教科書 p.114）

三角関数の定義
$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

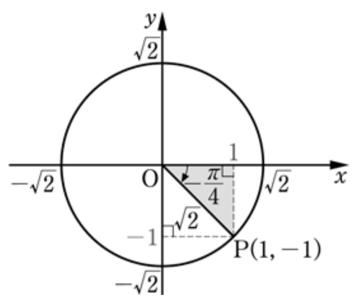
$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の（⑬　　　　　　　　）という。

注意　$\tan\theta$ は，$x=0$ となるような θ に対しては定義されない。

例5 右の図で，原点 O を中心とする半径 2 の円と $\frac{4}{3}\pi$ の動径の交点 P の座標は $(-1,\ -\sqrt{3})$ であるから



例6 右の図で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円と $-\frac{\pi}{4}$ の動径の交点 P の座標は $(1,\ -1)$ であるから



問7 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

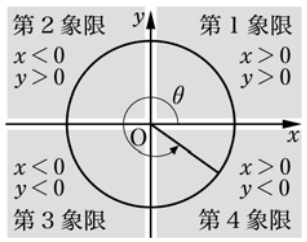
(1) $\dfrac{7}{6}\pi$

(2) $\dfrac{9}{4}\pi$

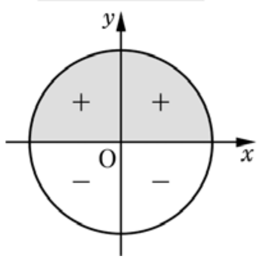
(3)　$-\frac{\pi}{3}$

(4)　-3π

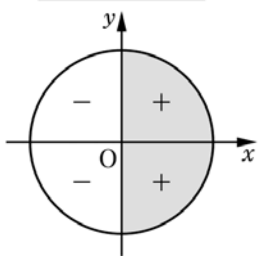
例６のように，角 θ の動径が第４象限にあるとき，θ を
(⑭　　　　　　　　　　　)という。



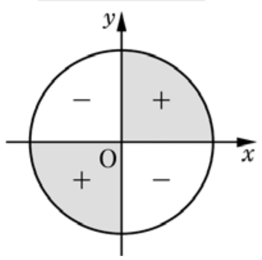
$\sin\theta$ の正負



$\cos\theta$ の正負



$\tan\theta$ の正負



次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

問8 (1)　$\sin\theta < 0$，$\cos\theta > 0$

(2)　$\tan\theta < 0$，$\cos\theta < 0$

三角関数と単位円

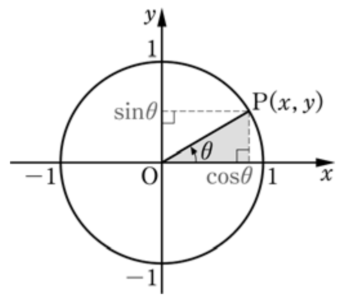
(教科書 p.116)

原点Ｏを中心とする半径１の円を(⑮　　　　　　　)という。単位円を用いて，三角関数の性質を調べてみよう。

右の図のように，単位円と角 θ の動径の交点を $P(x,\ y)$ とすると，三角関数の定義において，$r=1$ として

$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = \frac{y}{x}$

が成り立つ。すなわち，Ｐの座標は $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$



点Ｐは単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

(⑯　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)　　　←― $-1 \leqq y \leqq 1$，$-1 \leqq x \leqq 1$

次に，単位円を表す円の方程式 $x^2+y^2=1$ より

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

さらに，$\tan\theta = \frac{y}{x}$ より　　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

また，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって　　$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

したがって，一般角の三角関数についても，数学Ｉで学んだ三角比と同様に，次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係
[1]　$\boldsymbol{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$
[2]　$\boldsymbol{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　　[3]　$\boldsymbol{1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 1 θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解

問9 (1) θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

例題 2 θ が第 4 象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解

問 10 θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta = \frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

例題 3 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

解

問 11 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

例題 4 等式 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

証明

問 12 等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ を証明せよ。

④ 三角関数の性質

（教科書 p.119）

$\boldsymbol{\theta+2n\pi}$ の三角関数
[1] $\boldsymbol{\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta}$

例7 $\sin\frac{7}{3}\pi=$

$-\theta$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{-\theta}$ の三角関数
[2] $\boldsymbol{\sin(-\theta)=-\sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(-\theta)=\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(-\theta)=-\tan\theta}$

例8 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$

問 13 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。

$\theta+\pi$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+\pi}$ の三角関数
[3] $\boldsymbol{\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(\theta+\pi)=\tan\theta}$

例9 $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=$

問 14 $\sin\frac{5}{4}\pi$，$\cos\frac{5}{4}\pi$，$\tan\frac{5}{4}\pi$ の値を求めよ。

$\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+\frac{\pi}{2}}$ の三角関数
[4] $\boldsymbol{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta}$ $\boldsymbol{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta}$ $\boldsymbol{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}}$

さらに，公式 [3]，[4] の θ を $-\theta$ で置き換えることにより，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\pi-\theta,\ \frac{\pi}{2}-\theta}$ の三角関数	
[5] $\boldsymbol{\sin(\pi-\theta)=\sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta}$ $\boldsymbol{\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta}$	[6] $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta}$ $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta}$ $\boldsymbol{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}}$

例 10 $\sin\dfrac{7}{12}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}\right)=$　　公式[4]

$\sin\dfrac{5}{12}\pi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)=$　　公式[6]

問 15 次の$\square$にあてはまる鋭角を答えよ。

(1)　$\sin\frac{7}{8}\pi=\cos\square$

(2)　$\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{\tan\square}$

(3)　$\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\square$

(4)　$\cos\frac{5}{6}\pi=-\cos\square$

(5)　$\cos\frac{3}{8}\pi=\sin\square$

(6)　$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\tan\square}$

⑤ 三角関数のグラフ

$y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ のグラフ

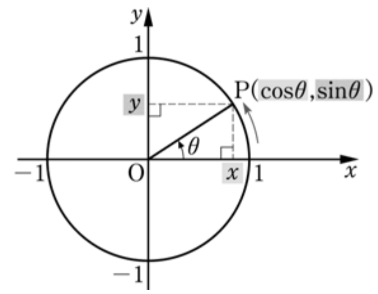
（教科書 p.122）

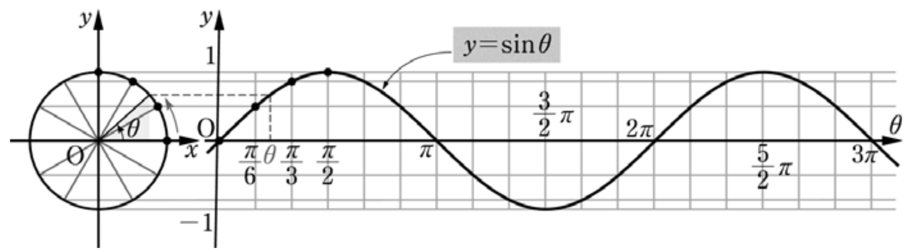
右の図において，角 θ の動径と単位円の交点 P の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。すなわち，P の y 座標が $\sin\theta$ である。

このことを利用すると，関数

$y=\sin\theta$

のグラフを次のようにしてかくことができる。





$y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を（⑰　　　　　　　　　）という。

$y = \tan\theta$ のグラフ

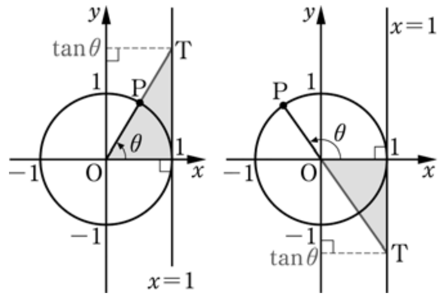
（教科書 p.123）

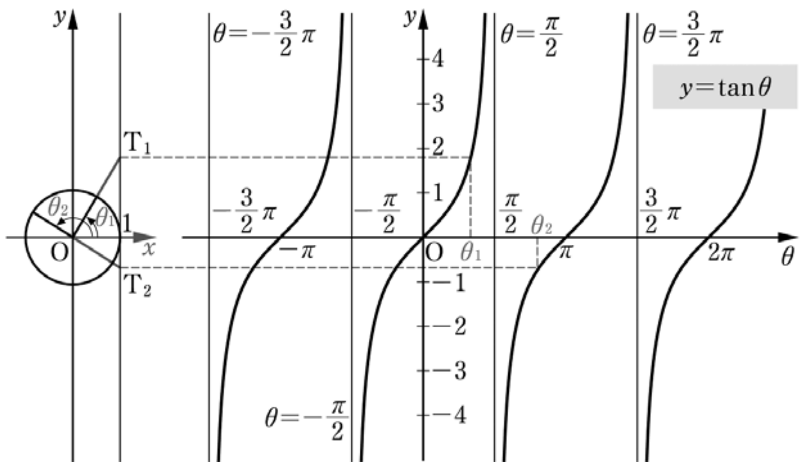
角 θ の動径を OP とし，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T とすると，T の y 座標は $\tan\theta$ である。

このことを利用すると，関数

$y = \tan\theta$

のグラフを次のようにしてかくことができる。





$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，θ が 0 から増加するにつれて，$\tan\theta$ の値も増加する。そして，θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づけば，$\tan\theta$ の値は限りなく大きくなり，グラフは直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このように，グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの（⑱　　　　　　　　）という。同様に考えると，直線

$\cdots,\ \theta = -\frac{3}{2}\pi,\ \theta = -\frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{3}{2}\pi,\ \cdots$

は，$y = \tan\theta$ のグラフの漸近線である。

三角関数のグラフの性質

（教科書 p.124）

一般に，関数 $y = f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

$\boldsymbol{f(x+p) = f(x)}$

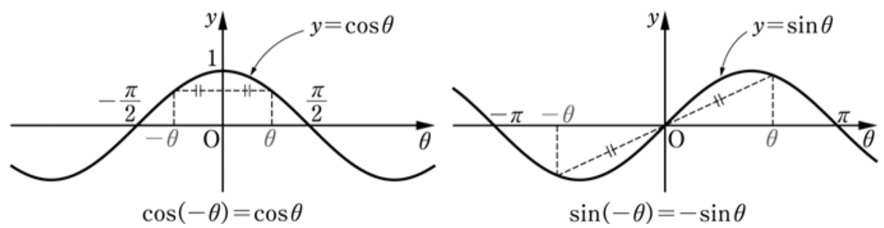
がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする（⑲　　　　　　　　）という。このとき，周期は無数にあるが，ふつうは，正で最小のものを（⑳　　　　　　）という。

三角関数は周期関数で，（㉑　　　　　　　　　　　　　　）である。また，$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ が成り立つので，（㉒　　　　　　　　　　　）である。

さらに，119 ページの公式 [2] より

$\cos(-\theta) = \cos\theta,\qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$

このことから，関数 $y = \cos\theta$ のグラフは（㉓　　　　　　　　　　　　）であり，関数 $y = \sin\theta$ のグラフは（㉔　　　　　　　　　　　）であることがわかる。



また，$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ が成り立つので，$y = \tan\theta$ のグラフは（㉕　　　　　　　　　）である。

いろいろな三角関数のグラフ

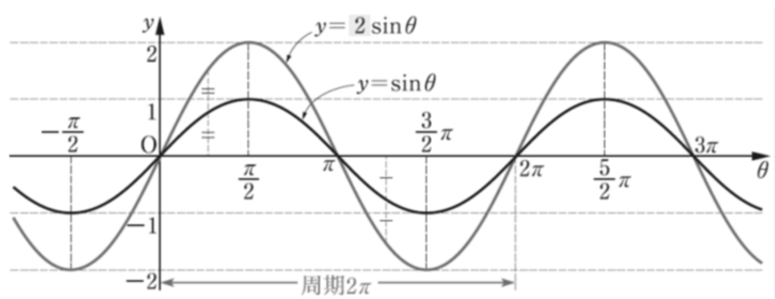
（教科書 p.125）

例 11　$y = \sin\theta$ のグラフをもとにして，$y = 2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

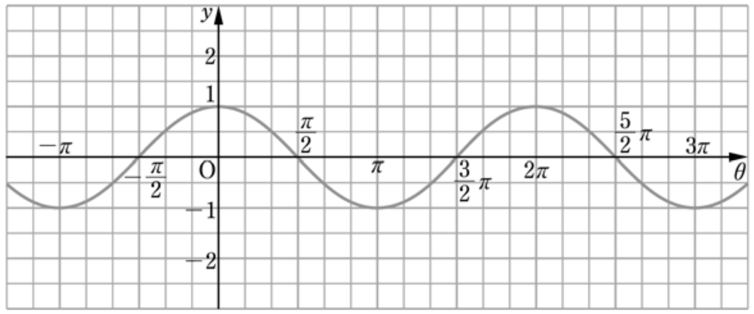
$y = 2\sin\theta$ のグラフは

$y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

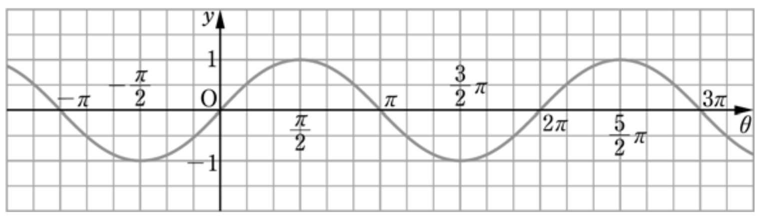
関数 $y = 2\sin\theta$ の周期は $y = \sin\theta$ と同じく 2π である。



問 16 $y=2\cos\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



問 17 $y=\frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

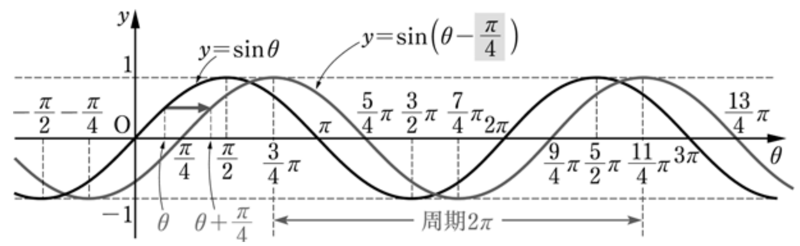


例 12 $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかいてみよう。

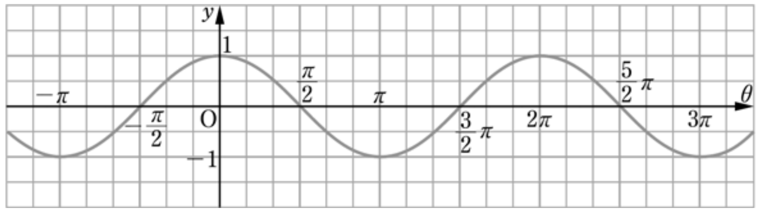
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

上の表からわかるように，$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。

関数 $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ の周期は，$y=\sin\theta$ と同じく（　　　　　　）である。



問 18 $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



例 13 $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin 2\theta$ の

グラフをかいてみよう。

右の表からわかるように

$y=\sin 2\theta$

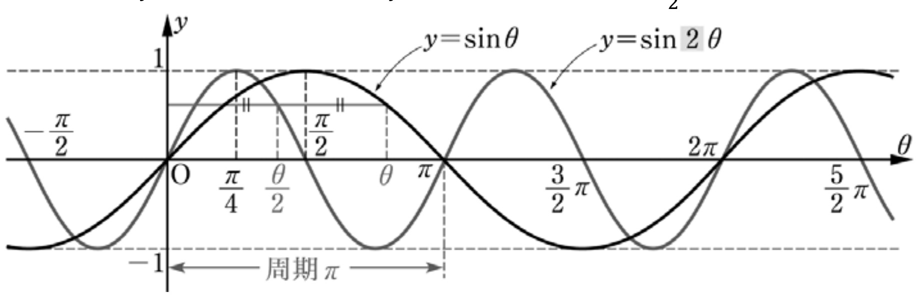
のグラフは

$y=\sin\theta$

のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ の周期 2π の $\frac{1}{2}$ 倍で，　である。

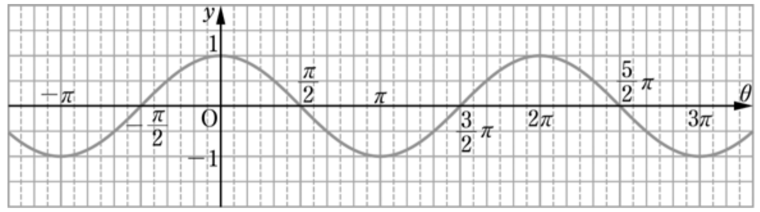
θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			



上と同様に考えると，a を正の定数とするとき，(㉖　　　　　　　　　　　　)であり，

(㉗　　　　　　　　　　　　)である。また，(㉘　　　　　　　　　　　　)のである。

問 19 $y=\cos 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



問 20 $y=\tan 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

⑥ 三角関数を含む方程式・不等式

（教科書 p.128）

例題 5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

（1） $\sin\theta = \frac{1}{2}$　　　（2） $\tan\theta = \sqrt{3}$

解

問 21 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

（1） $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2） $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

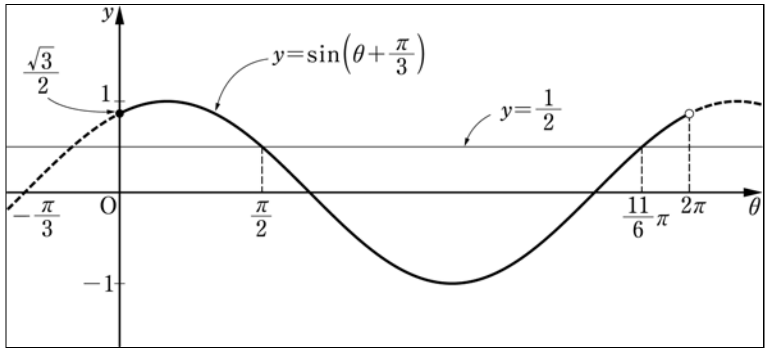
（3） $\tan\theta = -1$

例題 6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。

考え方 $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値の範囲に注意して，まず $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値を求める。

解

注意　例題 6 の解は，関数 $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフが直線 $y=\frac{1}{2}$ と交わる点の θ の値である。



問 22 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

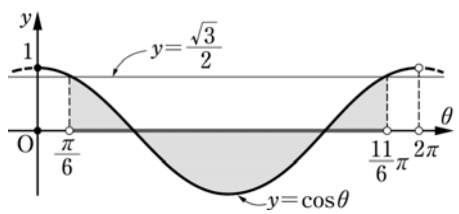
(2)　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

例題 7 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{2}$

解

注意　例題 7 (1)の解は，関数 $y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ の値の範囲である。



問 23 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta \leqq -\frac{1}{2}$

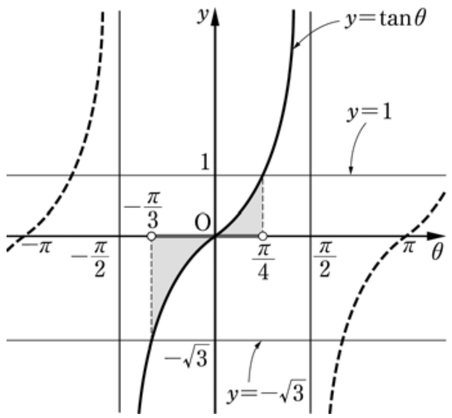
(2)　$\cos\theta > \frac{1}{2}$

(3)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

例題 8 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3} < \tan\theta < 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

解

注意 例題８の解は，関数 $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = 1$ より下側で，しかも直線 $y = -\sqrt{3}$ より上側にある θ の値の範囲である。



問 24 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $-1 < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$

Challenge 例題 三角関数を含む関数の最大･最小

（教科書 p.132）

例題 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

$y = \sin^2\theta + \sin\theta$

考え方 $\sin\theta = t$ とおくことによって，与えられた関数を t の 2 次関数とみて考える。

解

問1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$

(2) $y = \cos^2\theta + \sin\theta$

Training

（教科書 p.133）

1 半径 4，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

2 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\frac{11}{6}\pi$

(2) $\frac{11}{4}\pi$

(3) $-\frac{2}{3}\pi$

(4) 5π

3 次の問に答えよ。

(1) θ が第 4 象限の角で $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が第 3 象限の角で $\tan\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

4 θ は第 1 象限の角で，$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin\theta + \cos\theta$

(3) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

5 等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$ を証明せよ。

6 $\sin\frac{5}{8}\pi = a$，$\cos\frac{5}{8}\pi = b$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ。

(1) $\sin\frac{9}{8}\pi$

(2) $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$

(3) $\tan\frac{17}{8}\pi$

7 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y = -\tan\theta$

(2) $y = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

(3) $y = \frac{1}{2}\cos 3\theta$

8 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

(2) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

10 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $2\sin\theta - \sqrt{3} \geqq 0$

(2) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 > 0$

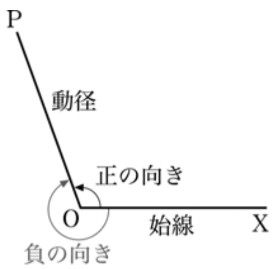
(3) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 \geqq 0$

１節 三角関数

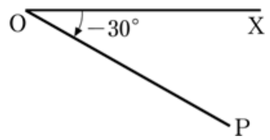
❶ 一般角

（教科書 p.110）

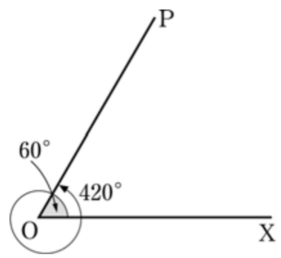
平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させることを考える。このとき，半直線 OP を（① 動径 ）といい，動径の始めの位置を示す半直線 OX を（② 始線 ）という。



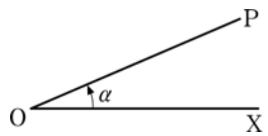
回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを（③ 正の向き ），時計の針の回転と同じ向きを（④ 負の向き ）という。



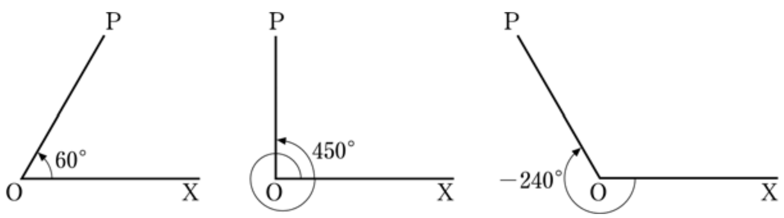
負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を（⑤ 一般角 ）という。



また，α を一般角として，始線 OX の位置から点 O のまわりに α だけ回転した動径を，（⑥ 角 α の動径 ）という。

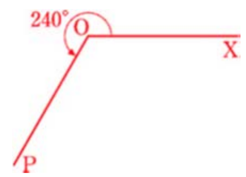


例1 半直線 OX を始線として，60°，450°，−240° の動径を図示すると，それぞれ次のようになる。

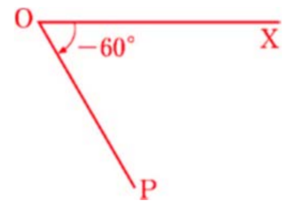


問1 OX を始線として，次の角の動径 OP を図示せよ。

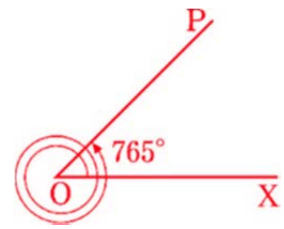
(1) 240°



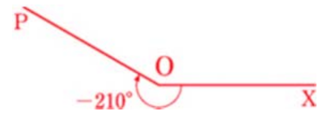
(2) −60°



(3) 765°



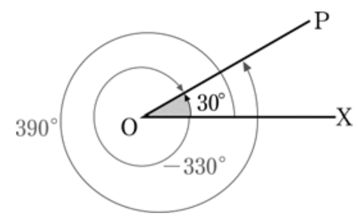
(4) −210°



右の図のように，30° の動径を OP とする。

動径 OP は 360° 回転するともとの位置に戻るから，たとえば

$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 1$$
$$750^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 2$$
$$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-1)$$



などの角の動径の位置は，30° の動径の位置と同じである。

さらに，n を整数とするとき

$30^\circ + 360^\circ \times n$

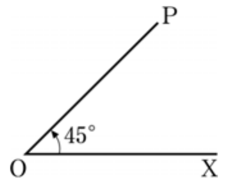
の形で表される角の動径の位置は，すべて 30° の動径の位置と一致する。これらの角を（⑦ 動径OPの表す角 ）という。

一般に，次のことがいえる。

動径の表す一般角
角 α の動径が表す一般角は $\boldsymbol{\alpha+360°\times n}$　（n は整数）

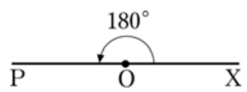
問2 次の図で，OX を始線としたときの動径 OP の表す一般角を求めよ。

(1)



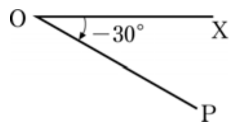
$\mathbf{45°+360°\times} \boldsymbol{n}$　（$\boldsymbol{n}$ は整数）

(2)



$\mathbf{180°+360°\times} \boldsymbol{n}$　（$\boldsymbol{n}$ は整数）

(3)



$\mathbf{-30°+360°\times} \boldsymbol{n}$　（$\boldsymbol{n}$ は整数）

問3 次の角を $\alpha+360°\times n$（n は整数）の形で表すとき，α を求めよ。ただし，$0°\leqq\alpha<360°$ とする。

(1)　420°

$420°=60°+360°\times 1$ より

$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{60°}$

(2)　730°

$730°=10°+360°\times 2$ より

$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{10°}$

(3)　$-210°$

$-210°=150°+360°\times(-1)$ より

$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{150°}$

(4)　$-675°$

$-675°=45°+360°\times(-2)$ より

$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{45°}$

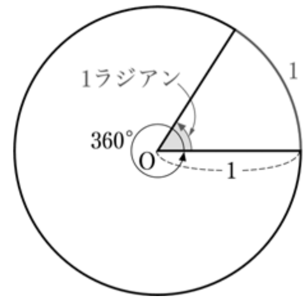
❷ 弧度法

（教科書 p.112）

半径 1 の円において長さ 1 の弧に対する中心角の大きさを（⑧　1 ラジアン　）または（⑨　1 弧度　）といい，これを単位とする角の表し方を（⑩　弧度法　）という。

中心角は弧の長さに比例するから，半径 1 の円の周の長さ 2π に対する中心角 360° を弧度法で表すと 2π ラジアンである。

すなわち



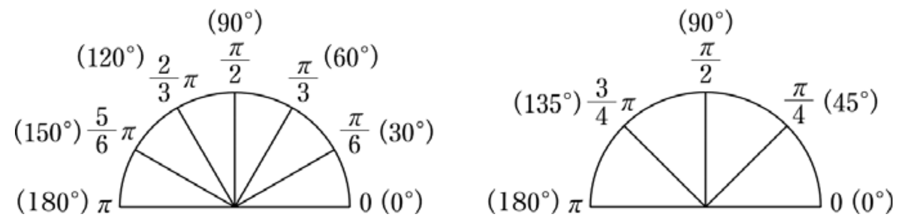
$360°=2\pi$ ラジアン

（⑪　$\mathbf{180°=\boldsymbol{\pi}}$ **ラジアン**　）

$1°=\frac{\pi}{180}$ ラジアン

1 ラジアン$=\frac{180°}{\pi}\fallingdotseq 57.2958°$

いろいろな角について，度と弧度の対応は，次の図のようになる。



注意　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

例2 240°を弧度法で表してみよう。

$240°=\frac{240}{180}\times 180°=\frac{4}{3}\pi$　⟵ $180°=\pi$

問4 270°，315°，−60°，−225° を弧度法で表せ。

$$\mathbf{270°}=\frac{270}{180}\times 180°=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

$$\mathbf{315°}=\frac{315}{180}\times 180°=\boldsymbol{\frac{7}{4}\pi}$$

$$\mathbf{-60°}=\frac{-60}{180}\times 180°=\boldsymbol{-\frac{\pi}{3}}$$

$$\mathbf{-225°}=\frac{-225}{180}\times 180°=\boldsymbol{-\frac{5}{4}\pi}$$

例3 弧度法による角 $\frac{5}{3}\pi$ を度で表してみよう。

$\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3} \times 180° = 300°$ ← $\pi = 180°$

問5 弧度法による角 $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7}{6}\pi$, $-\frac{11}{6}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$ を度で表せ。

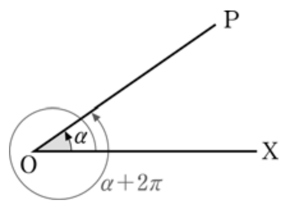
$$\boldsymbol{\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{5} \times 180° = \mathbf{36°}$$

$$\boldsymbol{\frac{7}{6}\pi} = \frac{7}{6} \times 180° = \mathbf{210°}$$

$$\boldsymbol{-\frac{11}{6}\pi} = -\frac{11}{6} \times 180° = \mathbf{-330°}$$

$$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\pi} = -\frac{3}{2} \times 180° = \mathbf{-270°}$$

これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。
弧度法を用いると，角 α の動径が表す一般角 θ は，次のように表される。
（⑫ $\theta = \alpha + 2n\pi$ ）　（n は整数）



扇形の弧の長さと面積

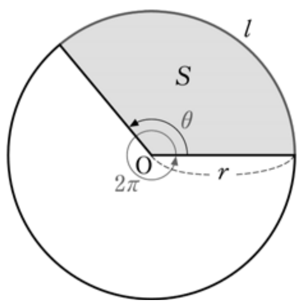
（教科書 p.113）

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とする。1 つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから

$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$,　$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$

よって　$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$



すなわち

$$\boldsymbol{l = r\theta}, \quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr}$$

例4 半径 6，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$l = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$,　$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$

問6 半径 8，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

$r = 8$，$\theta = \frac{3}{4}\pi$ とおくと

弧の長さは　$l = r\theta = 8 \times \frac{3}{4}\pi = \boldsymbol{6\pi}$

面積は

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{3}{4}\pi$$

$$= \boldsymbol{24\pi}$$

③ 三角関数

（教科書 p.114）

三角関数の定義
$\sin\theta=\dfrac{y}{r},\quad \cos\theta=\dfrac{x}{r},\quad \tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の（⑬　三角関数　）という。

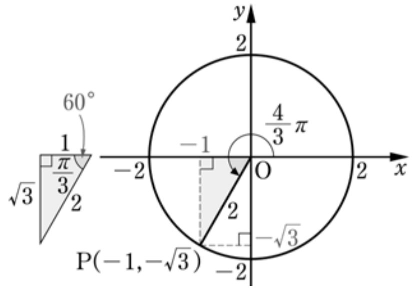
注意　$\tan\theta$ は，$x=0$ となるような θ に対しては定義されない。

例5 右の図で，原点 O を中心とする半径 2 の円と $\frac{4}{3}\pi$ の動径の交点 P の座標は $(-1,\ -\sqrt{3})$であるから

$\sin\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$

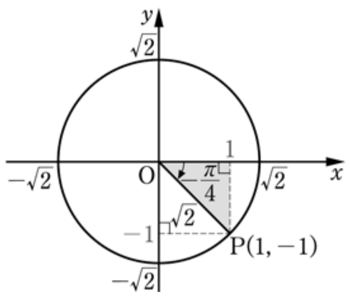


例6 右の図で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円と $-\frac{\pi}{4}$ の動径の交点 P の座標は $(1,\ -1)$ であるから

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1}{1}=-1$



問7 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\dfrac{7}{6}\pi$

右の図で

$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \ \mathrm{OP}=2$

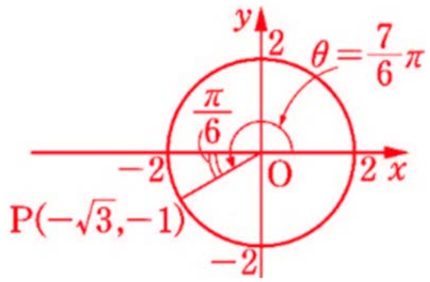
とすると　$\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ -1)$

であるから

$\sin\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



(2) $\dfrac{9}{4}\pi$

右の図で

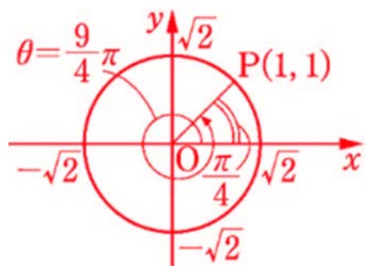
$\theta=\dfrac{9}{4}\pi,\ \ \mathrm{OP}=\sqrt{2}$

とすると　$\mathrm{P}(1,\ 1)$

であるから

$\sin\dfrac{9}{4}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\dfrac{9}{4}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\dfrac{9}{4}\pi=\dfrac{1}{1}=1$



(3)　$-\frac{\pi}{3}$

右の図で

$\theta = -\frac{\pi}{3}$,　$\mathrm{OP} = 2$

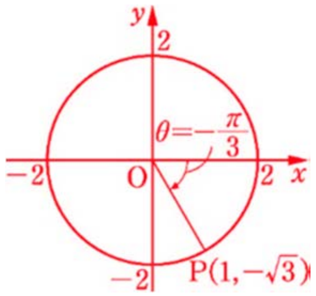
とすると　$\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{3})$

であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$



(4)　-3π

右の図で

$\theta = -3\pi$,　$\mathrm{OP} = 1$

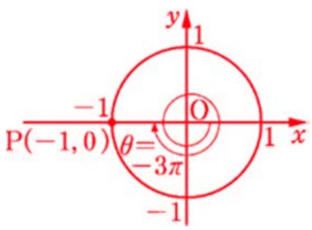
とすると　$\mathrm{P}(-1,\ 0)$

であるから

$$\sin(-3\pi) = \frac{0}{1} = 0$$

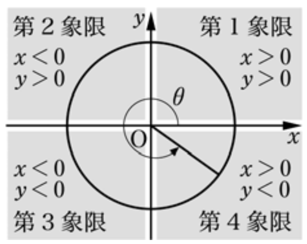
$$\cos(-3\pi) = \frac{-1}{1} = -1$$

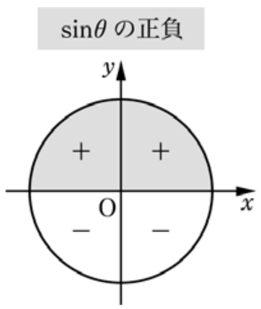
$$\tan(-3\pi) = \frac{0}{-1} = 0$$

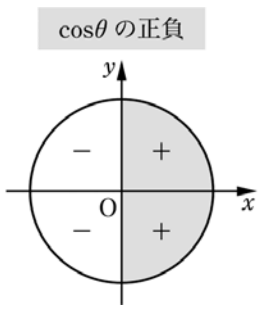


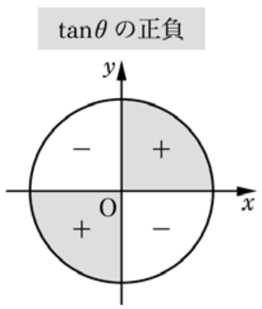
例６のように，角 θ の動径が第４象限にあるとき，θ を

(⑭　　第４象限の角　　)という。









次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

問8　(1)　$\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$

第４象限の角

(2)　$\tan\theta < 0$, $\cos\theta < 0$

第２象限の角

三角関数と単位円

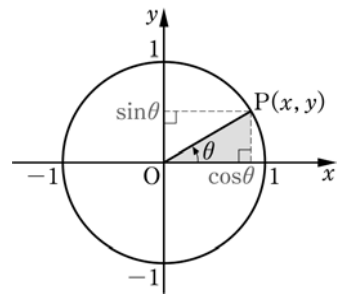
(教科書 p.116)

原点Ｏを中心とする半径１の円を（⑮　　単位円　　）という。単位円を用いて，三角関数の性質を調べてみよう。

右の図のように，単位円と角 θ の動径の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，三角関数の定義において，$r = 1$ として

$\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

が成り立つ。すなわち，Ｐの座標は $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$



点Ｐは単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

（⑯　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$,　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$　）　　←― $-1 \leqq y \leqq 1$,　$-1 \leqq x \leqq 1$

次に，単位円を表す円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ より

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

さらに，$\tan\theta = \frac{y}{x}$ より　　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

また，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって　　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

したがって，一般角の三角関数についても，数学Ｉで学んだ三角比と同様に，次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係	
[1]　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	
[2]　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	[3]　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

例題 1 θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

θ が第 3 象限の角であるから，$\sin\theta < 0$ である。

よって　$\sin\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$　……答

また　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}$　……答

問9 (1)　θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

θ が第 4 象限の角であるから，$\sin\theta < 0$ である。

よって　$\boldsymbol{\sin\theta} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\boldsymbol{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \div \frac{1}{3} = \boldsymbol{-2\sqrt{2}}$$

(2)　θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

θ が第 3 象限の角であるから，$\cos\theta < 0$である。

よって　$\boldsymbol{\cos\theta} = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\boldsymbol{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \div \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

例題 2 θ が第 4 象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解 $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5$ より　$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

θ が第 4 象限の角であるから，$\cos\theta > 0$ である。

よって　$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$　……答

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = (-2)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$　……答

問 10 θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta = \frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ より

$$\cos^2\theta = \frac{4}{5}$$

θ が第 3 象限の角であるから，$\cos\theta < 0$ である。

よって

$$\boldsymbol{\cos\theta} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\boldsymbol{\sin\theta} = \tan\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= -\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

例題 3 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

解 与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$2\sin\theta\cos\theta+1=\frac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{8}$ ……答

また　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　← $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$ ……答

問 11 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-1\right)=\mathbf{\frac{12}{25}}$

また

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{25}\right)=\mathbf{\frac{37}{125}}$

例題 4 等式 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

証明 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$　← $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

ゆえに　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

問 12 等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ を証明せよ。

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

左辺 $=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$

$=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}=$ 右辺

ゆえに　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

④ 三角関数の性質

（教科書 p.119）

$\boldsymbol{\theta+2n\pi}$ の三角関数
[1] $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$ $\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$ $\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

例7 $\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\theta$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{-\theta}$ の三角関数
[2] $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

例8 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 13 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta+\pi$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+\pi}$ の三角関数
[3] $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

例9 $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

問 14 $\sin\frac{5}{4}\pi$，$\cos\frac{5}{4}\pi$，$\tan\frac{5}{4}\pi$ の値を求めよ。

$$\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)$$
$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)$$
$$=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+\frac{\pi}{2}}$ の三角関数
[4] $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

さらに，公式 [3]，[4] の θ を $-\theta$ で置き換えることにより，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\pi-\theta,\ \frac{\pi}{2}-\theta}$ の三角関数	
[5] $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	[6] $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

例 10 $\sin\frac{7}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ ←― 公式 [4]

$\sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ ←― 公式 [6]

問 15 次の□にあてはまる鋭角を答えよ。

(1)　$\sin\frac{7}{8}\pi = \cos\square$

$\sin\frac{7}{8}\pi = \sin\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\cos\frac{3}{8}\pi}$

(2)　$\tan\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{\tan\square}$

$\tan\frac{5}{6}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = -\boldsymbol{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}}$

(3)　$\sin\frac{3}{4}\pi = \sin\square$

$\sin\frac{3}{4}\pi = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\sin\frac{\pi}{4}}$

(4)　$\cos\frac{5}{6}\pi = -\cos\square$

$\cos\frac{5}{6}\pi = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \boldsymbol{-\cos\frac{\pi}{6}}$

(5)　$\cos\frac{3}{8}\pi = \sin\square$

$\cos\frac{3}{8}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \boldsymbol{\sin\frac{\pi}{8}}$

(6)　$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\tan\square}$

$\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}}$

⑤ 三角関数のグラフ

$y=\sin\theta,\ y=\cos\theta$ のグラフ

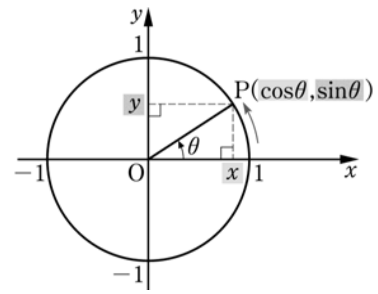
（教科書 p.122）

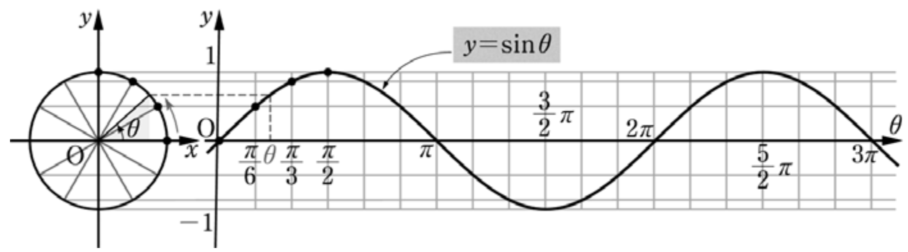
右の図において，角 θ の動径と単位円の交点 P の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。すなわち，P の y 座標が $\sin\theta$ である。

このことを利用すると，関数

$y=\sin\theta$

のグラフを次のようにしてかくことができる。





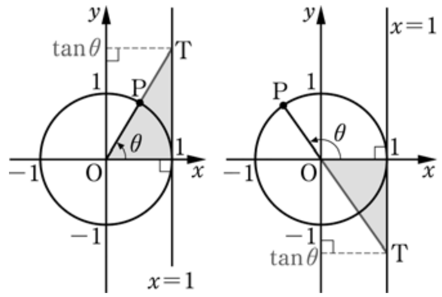
$y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を（⑰　　正弦曲線　　）という。

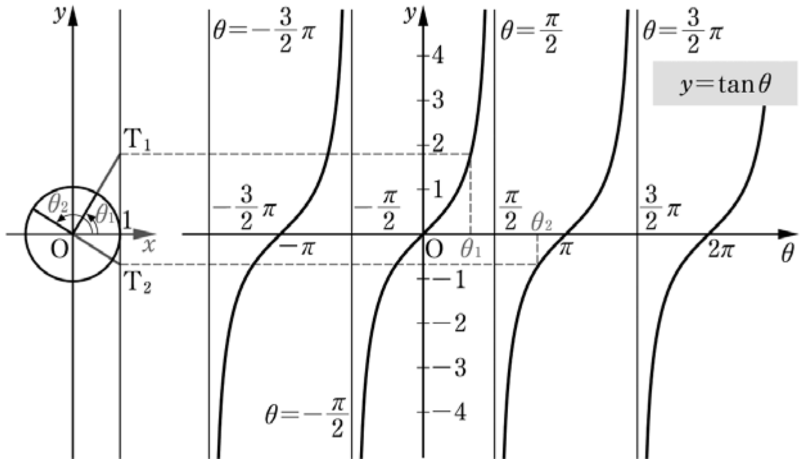
$y=\tan\theta$ のグラフ

（教科書 p.123）

角 θ の動径を OP とし，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を T とすると，T の y 座標は $\tan\theta$ である。

このことを利用すると，関数
$y=\tan\theta$
のグラフを次のようにしてかくことができる。





$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，θ が 0 から増加するにつれて，$\tan\theta$ の値も増加する。そして，θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づけば，$\tan\theta$ の値は限りなく大きくなり，グラフは直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このように，グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの（⑱　　漸近線　　）という。同様に考えると，直線

$\cdots,\ \theta=-\frac{3}{2}\pi,\ \theta=-\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{3}{2}\pi,\ \cdots$

は，$y=\tan\theta$ のグラフの漸近線である。

三角関数のグラフの性質

（教科書 p.124）

一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

$\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}$

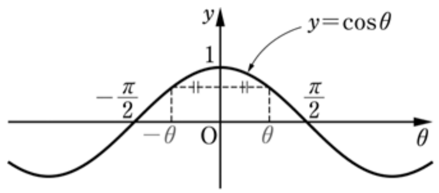
がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする（⑲　　周期関数　　）という。このとき，周期は無数にあるが，ふつうは，正で最小のものを（⑳　　周期　　）という。

三角関数は周期関数で，（㉑　　$\sin\theta$，$\cos\theta$ の周期は 2π　　）である。また，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ が成り立つので，（㉒　　$\tan\theta$ の周期は π　　）である。

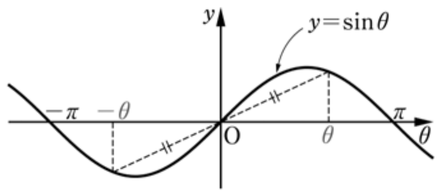
さらに，119 ページの公式 [2] より

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

このことから，関数 $y=\cos\theta$ のグラフは（㉓　　y 軸に関して対称　　）であり，関数 $y=\sin\theta$ のグラフは（㉔　　原点に関して対称　　）であることがわかる。



$\cos(-\theta)=\cos\theta$



$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

また，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ が成り立つので，$y=\tan\theta$ のグラフは（㉕　　原点に関して対称　　）である。

いろいろな三角関数のグラフ

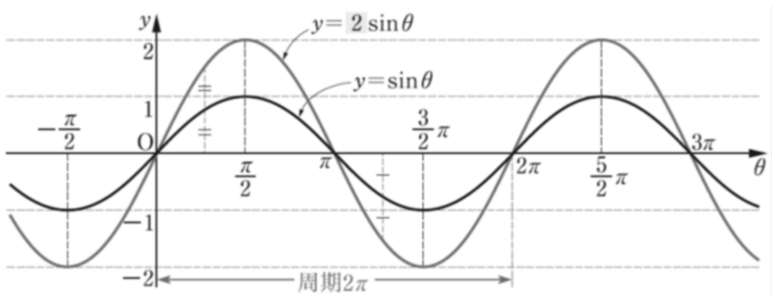
（教科書 p.125）

例 11 $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

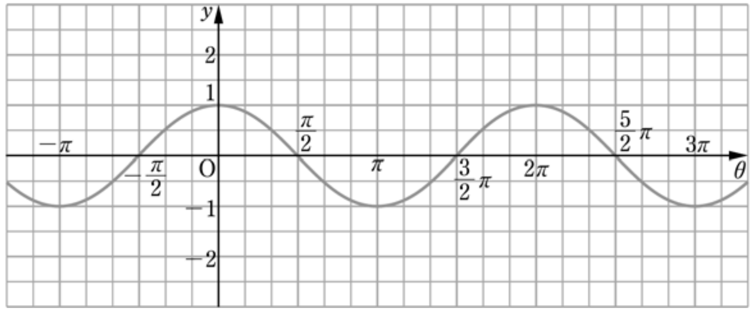
$y=2\sin\theta$ のグラフは

$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

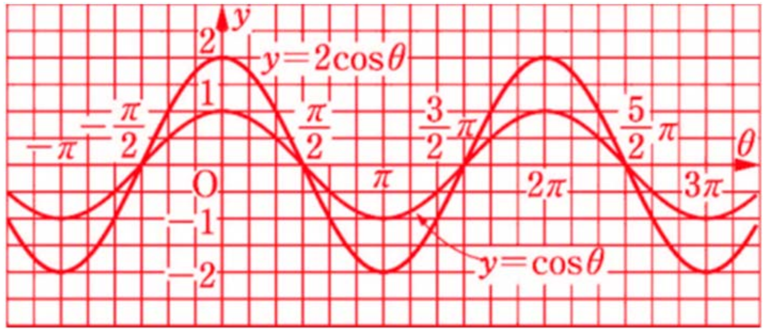
関数 $y=2\sin\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ と同じく 2π である。



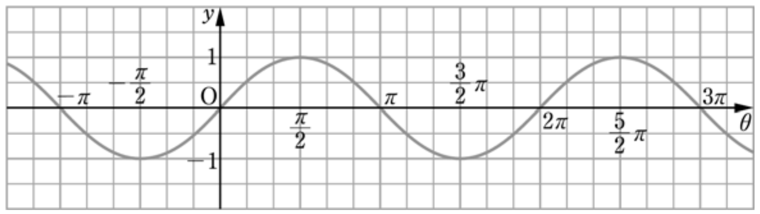
問 16 $y=2\cos\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



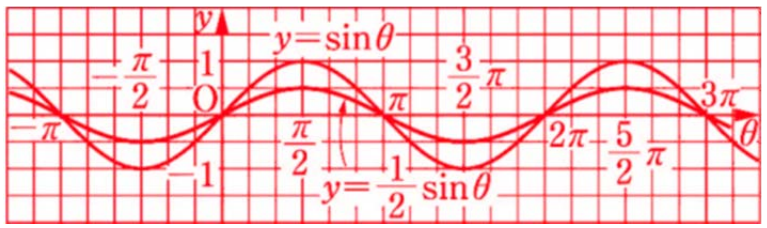
$y=2\cos\theta$ のグラフは $y=\cos\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。その周期は $y=\cos\theta$ と同じく $\boldsymbol{2\pi}$ である。



問 17 $y=\frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



$y=\frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。
その周期は $y=\sin\theta$ と同じく $\boldsymbol{2\pi}$ である。

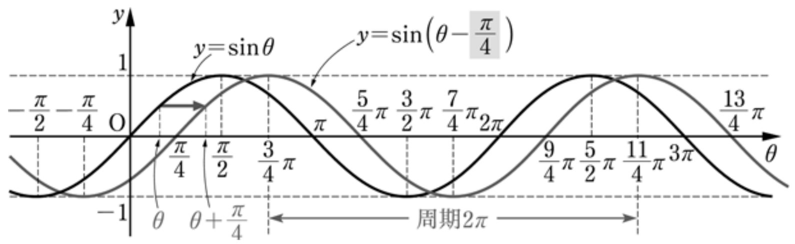


例 12 $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかいてみよう。

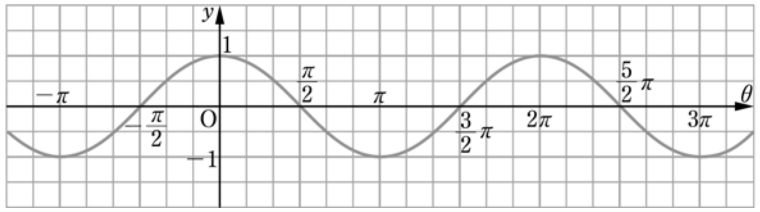
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

上の表からわかるように，$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。

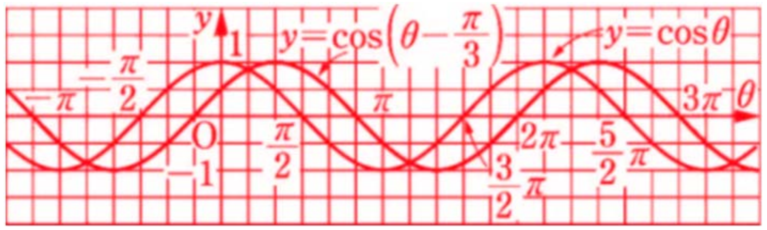
関数 $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ の周期は，$y=\sin\theta$ と同じく（　2π　）である。



問 18 $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



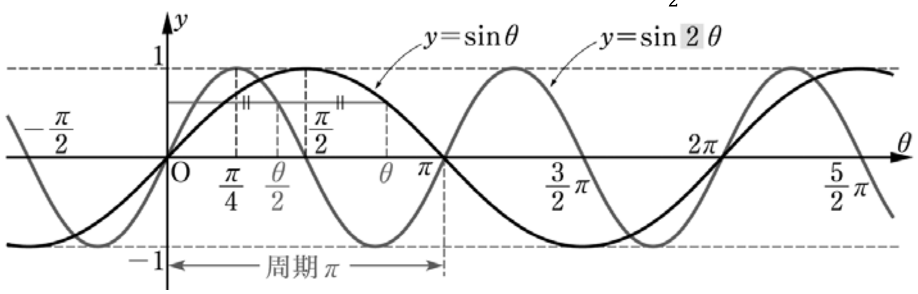
$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。その周期は $y=\cos\theta$ と同じく $\boldsymbol{2\pi}$ である。



例 13 $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

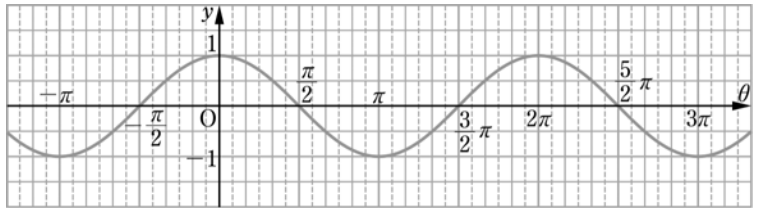
右の表からわかるように
$y=\sin 2\theta$
のグラフは
$y=\sin\theta$
のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。
したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ の周期 2π の $\frac{1}{2}$ 倍で，π である。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			

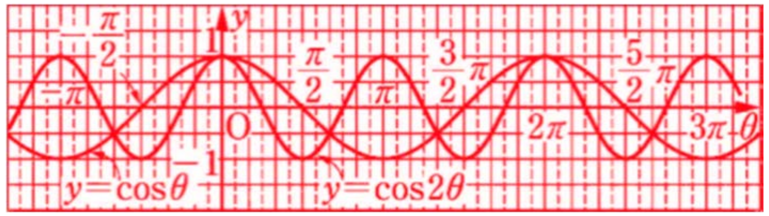


上と同様に考えると，a を正の定数とするとき，(㉖ $\sin a\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{a}$) であり，(㉗ $\cos a\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{a}$) である。また，(㉘ $\tan a\theta$ の周期は $\frac{\pi}{a}$) のである。

問 19 $y=\cos 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

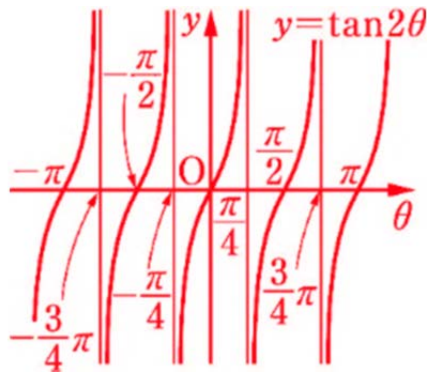


$y=\cos 2\theta$ のグラフは $y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。その周期は $y=\cos\theta$ の周期 2π の $\frac{1}{2}$ 倍で，$\boldsymbol{\pi}$ である。



問 20 $y=\tan 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

$y=\tan 2\theta$ のグラフは $y=\tan\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。その周期は $y=\tan\theta$ の周期 π の $\frac{1}{2}$ 倍で，$\frac{\pi}{2}$ である。



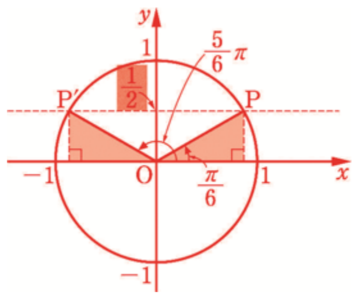
⑥ 三角関数を含む方程式・不等式

（教科書 p.128）

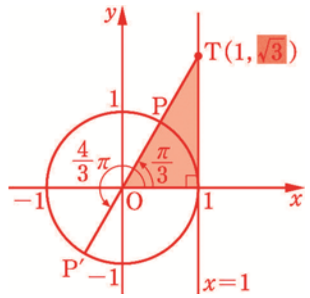
例題 5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$　　　(2) $\tan\theta = \sqrt{3}$

解 (1) 右の図のように，単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。
よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると
$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$



(2) 右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ と原点を通る直線と単位円の交点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると
$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

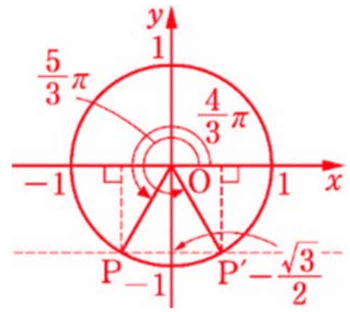


問 21 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

単位円の周上で，y 座標が $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点を P，P′とすると，
動径OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると

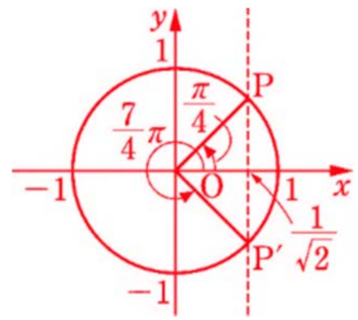
$\boldsymbol{\theta = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$



(2) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

単位円の周上で，x 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点を P，P′ とすると，
動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると

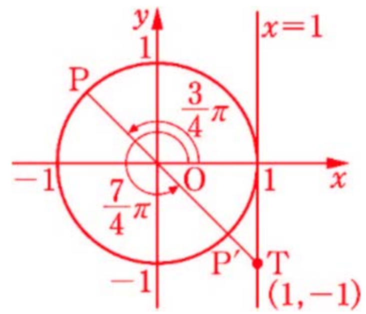
$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{7}{4}\pi}$



(3) $\tan\theta = -1$

点 $\mathrm{T}(1,\ -1)$
と原点を通る直線と単位円の交点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。
よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると

$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi}$



例題 6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。

考え方 $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値の範囲に注意して，まず $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値を求める。

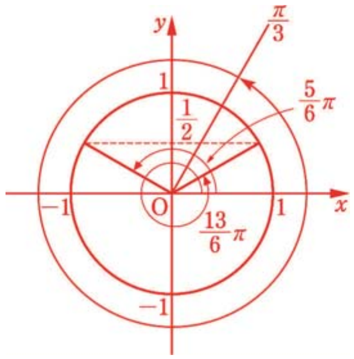
解 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$ ……①

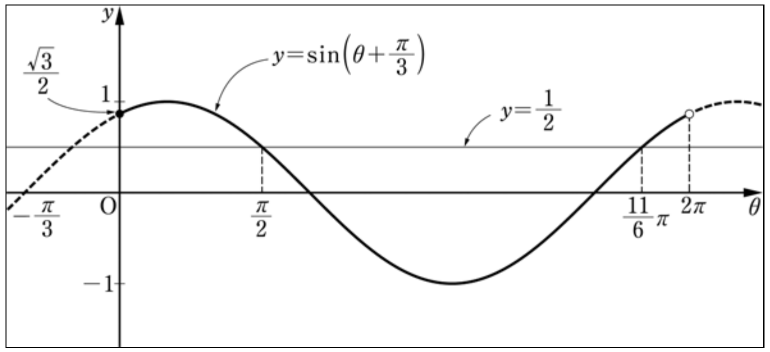
単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値は，①の範囲で

$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$



注意　例題 6 の解は，関数 $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフが直線 $y=\frac{1}{2}$ と交わる点の θ の値である。



問 22 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

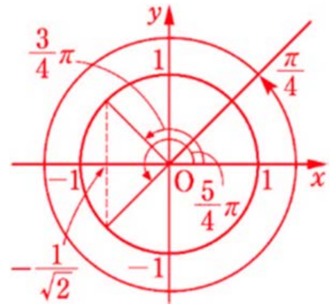
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ ……①

単位円の周上で，x 座標が$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる$\theta+\frac{\pi}{4}$ の値は，①の範囲で

$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

ゆえに　$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2},\ \pi}$



(2)　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

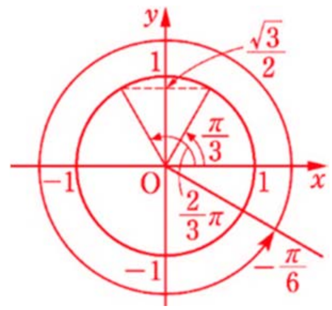
$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta-\frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ ……①

単位円の周上で，y 座標が$\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる $\theta-\frac{\pi}{6}$の値は，①の範囲で

$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

ゆえに

$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi}$



例題 7 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

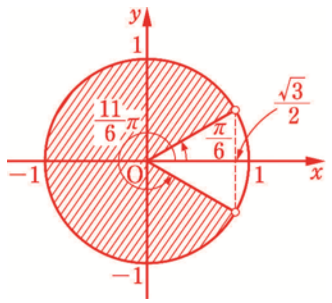
(1)　$\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{2}$

解　(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{11}{6}\pi$

であるから，求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$

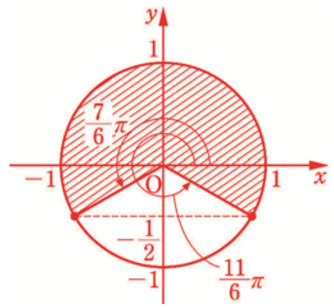


(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ となる θ の値は

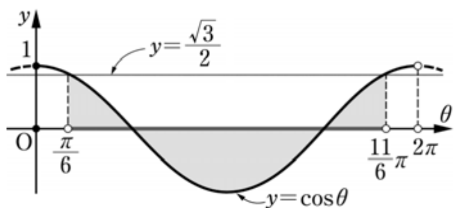
$\theta = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

であるから，求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに　$0 \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$



注意　例題 7 (1)の解は，関数 $y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ の値の範囲である。



問 23 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta \leqq -\frac{1}{2}$

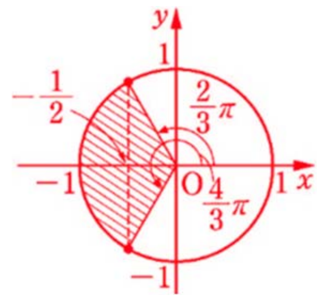
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ となるθ の値は

$\theta = \frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

求める角 θ の動径は右の図の斜線部分にある。

よって

$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \frac{4}{3}\pi}$



(2)　$\cos\theta > \frac{1}{2}$

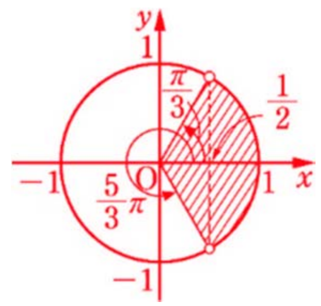
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる θの値は

$\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

求める角 θ の動径は図の斜線部分にある。

よって

$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}，\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi}$



(3)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

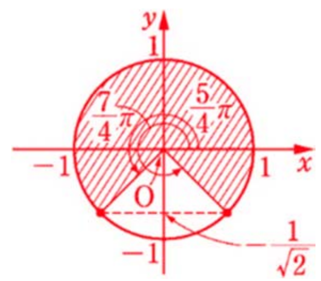
となる θ の値は

$\theta = \frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$

求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

よって

$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi，\frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi}$



例題 8 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3} < \tan\theta < 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

解 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で，$\tan\theta = -\sqrt{3}$ となる θ の値は

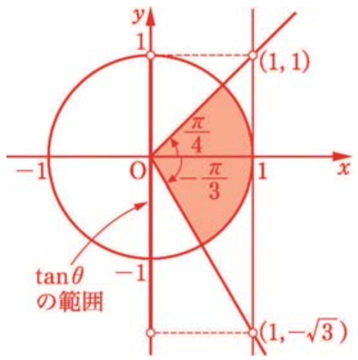
$\theta = -\frac{\pi}{3}$

$\tan\theta = 1$ となる θ の値は

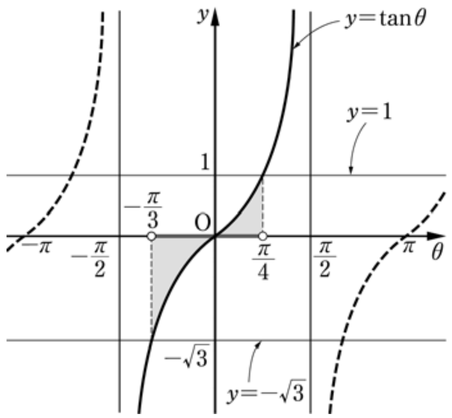
$\theta = \frac{\pi}{4}$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}$



注意 例題 8 の解は，関数 $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = 1$ より下側で，しかも直線 $y = -\sqrt{3}$ より上側にある θ の値の範囲である。



問 24 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $-1 < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で， $\tan\theta = -1$ となる θ の値は

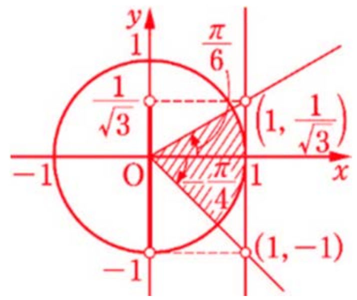
$\theta = -\frac{\pi}{4}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{6}$

よって，図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$\boldsymbol{-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{6}}$



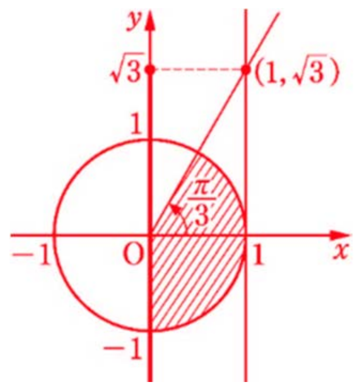
(2) $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{3}$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{\pi}{3}}$



Challenge 例題 三角関数を含む関数の最大･最小

（教科書 p.132）

例題 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

$y = \sin^2\theta + \sin\theta$

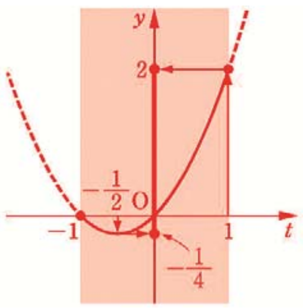
考え方 $\sin\theta = t$ とおくことによって，与えられた関数を t の 2 次関数とみて考える。

解 $\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$ ……①

また，y を t で表すと

$$y = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$



よって，①の範囲でこの関数は

$t = 1$ のとき　最大値 2

$t = -\frac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\sin\theta = 1$ となるのは　$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ となるのは　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき

したがって

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき　最大値 2

$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき　最小値 $-\frac{1}{4}$

問1 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$

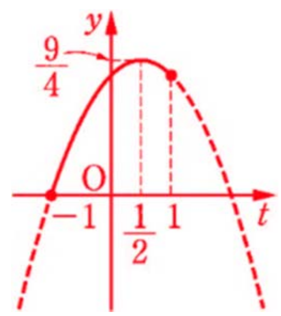
$\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$ ……①

また，y を t で表すと

$$y = -t^2 + t + 2$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$



よって，①の範囲でこの関数は

$t = \frac{1}{2}$ のとき　最大値 $\frac{9}{4}$

$t = -1$ のとき　最小値 0

をとる。ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となるのは　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

$\cos\theta = -1$ となるのは　$\theta = \pi$

のときである。したがって

$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$ のとき　最大値 $\frac{9}{4}$

$\theta = \pi$ のとき　最小値 0

(2) $y = \cos^2\theta + \sin\theta$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$ ……①

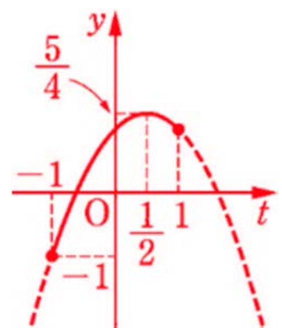
また，y を t で表すと

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta$$

$$= 1 - \sin^2\theta + \sin\theta$$

$$= -t^2 + t + 1$$

$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$



よって，①の範囲でこの関数は

$t = \frac{1}{2}$ のとき　最大値 $\frac{5}{4}$

$t = -1$ のとき　最小値 -1

をとる。ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$より

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ となるのは　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

$\sin\theta = -1$ となるのは　$\theta = \frac{3}{2}\pi$

のときである。したがって

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ のとき　最大値 $\frac{5}{4}$

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき　最小値 -1

Training

（教科書 p.133）

1 半径 4，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

$r=4,\ \theta=\frac{2}{3}\pi$ とおくと

弧の長さ l は　$l=r\theta=4\times\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$

面積 S は

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{2}{3}\pi$$

$$=\boldsymbol{\frac{16}{3}\pi}$$

2 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\frac{11}{6}\pi$

$$\sin\frac{11}{6}\pi=-\boldsymbol{\frac{1}{2}},\quad \cos\frac{11}{6}\pi=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan\frac{11}{6}\pi=-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(2)　$\frac{11}{4}\pi$

$$\sin\frac{11}{4}\pi=\sin\frac{3}{4}\pi=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\cos\frac{11}{4}\pi=\cos\frac{3}{4}\pi=-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\tan\frac{11}{4}\pi=\tan\frac{3}{4}\pi=\boldsymbol{-1}$$

(3)　$-\frac{2}{3}\pi$

$$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=-\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(4)　5π

$\sin5\pi=\sin\pi=\mathbf{0}$

$\cos5\pi=\cos\pi=\mathbf{-1}$

$\tan5\pi=\tan\pi=\mathbf{0}$

3 次の問に答えよ。

(1)　θ が第 4 象限の角で $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$$

θ が第 4 象限の角であるから，$\sin\theta<0$ である。

よって　$\boldsymbol{\sin\theta}=-\sqrt{\frac{2}{3}}=-\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$$\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\div\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=-\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(2)　θ が第 3 象限の角で $\tan\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$$

より　$\cos^2\theta=\frac{9}{10}$

θ が第 3 象限の角であるから，$\cos\theta<0$ である。

よって　$\boldsymbol{\cos\theta}=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\boldsymbol{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cos\theta=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$=-\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{10}}$$

4 θ は第 1 象限の角で，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$

与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{2}{9}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{9}$$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}-1\right)=\boldsymbol{\frac{7}{18}}$

(2) $\sin\theta+\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{7}{18}=\frac{16}{9}$

θ が第 1 象限の角であることから

$\sin\theta+\cos\theta>0$

よって　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{16}{9}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(3) $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{18}\right)=\boldsymbol{\frac{25\sqrt{2}}{54}}$

5 等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$ を証明せよ。

左辺 $=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}=$ 右辺

ゆえに　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$

6 $\sin\frac{5}{8}\pi=a,\ \cos\frac{5}{8}\pi=b$ とおくとき，次の値を $a,\ b$ を用いて表せ。

(1) $\sin\frac{9}{8}\pi$

$=\sin\left(\frac{5}{8}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5}{8}\pi$

$=\boldsymbol{b}$

(2) $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$

$=\cos\frac{3}{8}\pi=\cos\left(\pi-\frac{5}{8}\pi\right)$

$=-\cos\frac{5}{8}\pi=\boldsymbol{-b}$

(3) $\tan\frac{17}{8}\pi$

$=\tan\left(\frac{9}{8}\pi+\pi\right)=\tan\frac{9}{8}\pi$

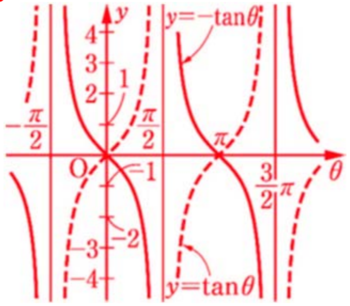
$=\tan\left(\frac{5}{8}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{5}{8}\pi}$

$=-\frac{\cos\frac{5}{8}\pi}{\sin\frac{5}{8}\pi}=\boldsymbol{-\frac{b}{a}}$

7 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

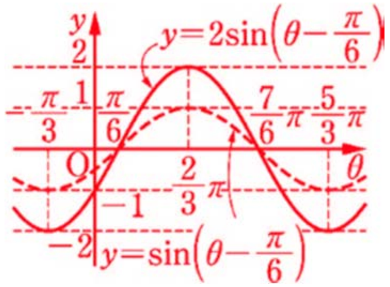
(1) $y=-\tan\theta$

$y=-\tan\theta$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを y 軸方向に -1 倍，すなわち θ 軸に関して対称移動したものである。周期は$y=\tan\theta$ と同じく $\boldsymbol{\pi}$ である。



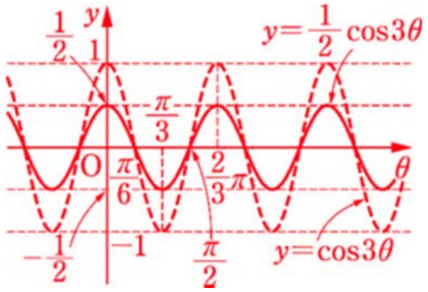
(2) $y=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

$y=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動して得られる $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフを，さらに y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。周期は $y=\sin\theta$ と同じく $\boldsymbol{2\pi}$ である。



(3) $y=\frac{1}{2}\cos3\theta$

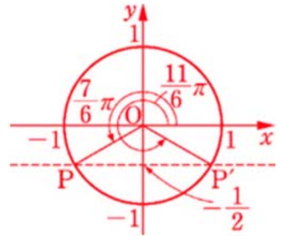
$y=\frac{1}{2}\cos3\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍に縮小して得られる $y=\cos3\theta$ のグラフを，さらに y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。周期は$y=\cos\theta$ の周期 2π の $\frac{1}{3}$ 倍で，$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$ である。



8 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

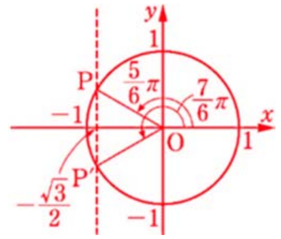
単位円の周上で，y座標が $-\frac{1}{2}$ となる点をP，P′ とすると，動径OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲でθ の値を求めると



$\boldsymbol{\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi}$

(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

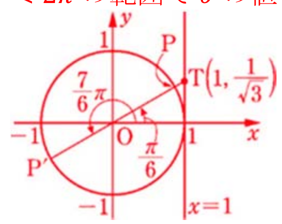
単位円の周上で，x座標が $-\frac{\sqrt{3}}{2}$となる点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値を求めると



$\boldsymbol{\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi}$

(3) $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

点 T$\left(1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ と原点を通る直線と単位円の交点をP，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で θ の値を求めると



$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi}$

9 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

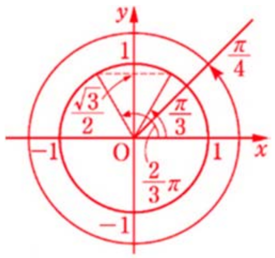
(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ ……①

単位円の周上で，y座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる $\theta + \frac{\pi}{4}$ の値は，①の範囲で

$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$



ゆえに

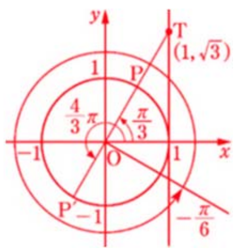
$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{12}}$，$\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi}$

(2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$ ……①

右の図のように，点$\mathrm{T}(1, \sqrt{3})$ と原点を通る直線と単位円の交点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角は，



①の範囲で $\frac{\pi}{3}$，$\frac{4}{3}\pi$

よって

$\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$，$\frac{4}{3}\pi$

ゆえに

$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$

10 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

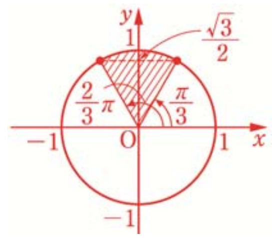
(1) $2\sin\theta - \sqrt{3} \geqq 0$

$2\sin\theta - \sqrt{3} \geqq 0$より

$\sin\theta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$



求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{2}{3}\pi}$

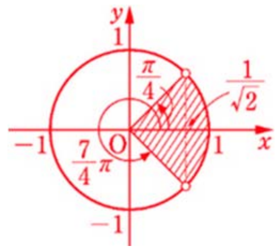
(2) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 > 0$

$\sqrt{2}\cos\theta - 1 > 0$ より

$\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{4}$，$\frac{7}{4}\pi$



求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに $\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}}$，$\boldsymbol{\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi}$

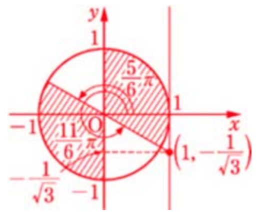
(3) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 \geqq 0$

$\sqrt{3}\tan\theta + 1 \geqq 0$ より

$\tan\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{5}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$



求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに

$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{\frac{5}{6}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi}$，$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi}$