１節 整式・分数式の計算

❶ 整式の乗法と因数分解

3 次式の乗法公式

（教科書 p.8）

例1 (1)　$(a+b)^3$ を展開してみよう。

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$
$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{array}{rrrrr} & a^2 & +2ab & +b^2 & \\ \times) & a & +b & & \\ \hline & a^3 & +2a^2b & +ab^2 & \\ & & a^2b & +2ab^2 & +b^3 \\ \hline & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 \end{array}$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式(1)
[1]　$\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ [2]　$\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

問1 公式 [2] が成り立つことを示せ。

例2 (1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$
$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$
(2)　$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$
$(a-b)^3=\ a^3\ -\ 3\cdot a^2\cdot b\ +\ 3\cdot a\cdot b^2-b^3$
$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

問2 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)^3$

(2)　$(2x-1)^3$

(3)　$(x+3y)^3$

(4)　$(3x-2y)^3$

例3 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$を展開してみよう。

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$

$$\begin{array}{rrrrr} & a^2 & -ab & +b^2 & \\ \times) & a & +b & & \\ \hline & a^3 & -a^2b & +ab^2 & \\ & & a^2b & -ab^2 & +b^3 \\ \hline & a^3 & & & +b^3 \end{array}$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式(2)
[3]　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$ [4]　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

問3 公式 [4] が成り立つことを示せ。

例4 (1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3$

$(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$

$=x^3+27$

(2)　$(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\cdot 5y+(5y)^2\}=(2x)^3-(5y)^3$

$(a-b)(a^2+a\cdot b+b^2)\ =a^3-b^3$

$=8x^3-125y^3$

問4 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x^2-x+1)$

(2)　$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

(3)　$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

(4)　$(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$

3 次式の因数分解

(教科書 p.10)

乗法公式［3]，［4］から，次の公式が成り立つ。

因数分解の公式
[1]　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ [2]　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例5 (1)　$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

(2)　$x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+\ a\cdot b+b^2)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

問5 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3-1

(2)　x^3+125

(3)　x^3-27y^3

(4)　$8x^3+y^3$

例題 1 次の式を因数分解せよ。

x^6-1

考え方 $x^6=(x^3)^2$ より，$x^3=A$ とおくと $x^6-1=A^2-1$ と表される。

解

問6 次の式を展開せよ。

(1)　a^6-b^6

(2)　x^6+2x^3+1

② 二項定理

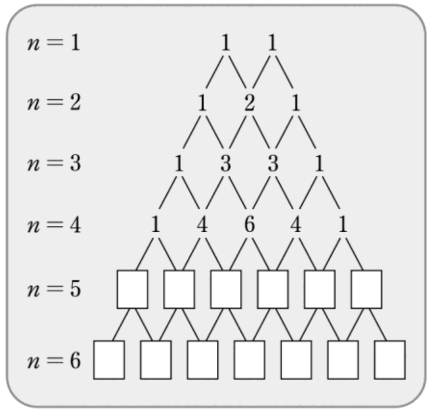
パスカルの三角形

（教科書 p.11）

問7 $(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が $(a+b)^4$ の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求めて右のように並べたものを（①　　　　　　　　　）という。

問8 右のパスカルの三角形で，$n=5$, $n=6$ の行の□をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。



二項定理

（教科書 p.12）

一般に，次の（② 　　　　　　　　）が成り立つ。

*異なる n 個のものから r 個を取り出してつくった組合せを

（③ 　　　　　　　　　　　　）

といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。このとき，次の公式が成り立つ。

$$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

ここで，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ である。

ただし，$\mathbf{0! = 1}$，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_0 = 1}$ と定める。

二項定理
$\boldsymbol{(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots}$ $\boldsymbol{+ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n}$

例6 $(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

問9 二項定理を用いて，$(a+b)^6$ を展開せよ。

二項定理により $(a+b)^n$ の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と表される。これを $(a+b)^n$ の展開式の（④ 　　　　　　）という。ただし，$a^0 = 1$，$b^0 = 1$ とする。また，${}_n\mathrm{C}_r$ を（⑤ 　　　　　　）ともいう。

例題 2 $(2a-b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数を求めよ。

解

問 10 $(3a-2b)^4$ の展開式における a^3b の係数を求めよ。

例7 二項定理において，$a=1$，$b=x$ とおくと

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1x + {}_n\mathrm{C}_2x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_rx^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nx^n$$

さらに，$x=1$ を代入すると，次の等式が得られる。

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

問 11 等式 $3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$ を示せ。

Challenge 例題 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}$ の展開

（教科書 p.14）

例題 $(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数を求めよ。

解

←― a^2b^2c が現れるのはこの式のみ

問1 (1)　$(a+b+c)^6$ の展開式における $a^2b^2c^2$ の係数を求めよ。

(2)　$(a+2b+3c)^6$ の展開式における a^2b^3c の係数を求めよ。

＊　一般に，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものをすべて並べる並べ方の総数は

$\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ である。

3 整式の除法

整式の除法

（教科書 p.15）

例8 $A=2x^2+7x+5$，$B=x+3$のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x+1 \quad \leftarrow \text{商} \\
x+3\,\big) & 2x^2+7x+5 \\
 & \underline{2x^2+6x} \quad \longleftarrow (x+3)\times 2x \\
 & x+5 \\
 & \underline{x+3} \quad \longleftarrow (x+3)\times 1 \\
 & 2 \quad \leftarrow \text{余り}
\end{array}
$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x+3$ よりも次数が低いので，これ以上計算を続けることができない。

このとき，$2x^2+7x+5$ を $x+3$ で割ったときの

商は $2x+1$，**余り**は 2

であるという。上の割り算から

$A=B(2x+1)+2$　……①　←― 割られる式 ＝ 割る式 × 商 ＋ 余り

が成り立つことがわかる。

問 12 $A=6x^2-5x+1$ を $B=3x-4$ で割る計算をせよ。また，例 8 にならって，A を①の形で表せ。

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$\boldsymbol{A=BQ+R}$　　ただし，R の次数 $<$ B の次数

このような Q，R はただ 1 つ定まる。とくに，$R=0$ となるとき，A は B で（⑥　　　　　　）といい，B は A の（⑦　　　　　）であるという。

例題 3 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3-7x^2+3x+8$,　$B=x^2-x-3$

(2)　$A=2x^3+4x^2+7$,　$B=2x^2-3$

解 (1)

(2)

注意　このような計算では，割る式も割られる式も，文字xについて降べきの順に整理しておくとよい。

問 13 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3+3x^2-8x+1$,　$B=x^2+3x-2$

(2)　$A=x^3-x^2-1$,　$B=x^2+2$

例題 4　整式 x^3-3x^2-6x-2 をある整式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $3x-4$ である。整式 B を求めよ。

解

問 14　整式 $3x^3+14x^2-4x+5$ をある整式 B で割ると，商が $3x-1$，余りが $7x+3$ である。整式 B を求めよ。

Challenge　例題　2 種類の文字を含む整式の除法

（教科書 p.17）

例題　$A=2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3$，$B=x-2a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

問 1　$A=x^3-2ax^2-a^2x+2a^3$，$B=x-a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

④ 分数式とその計算

（教科書 p.18）

$\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+2}{x^2-1}$ のように，$\frac{\text{整式}}{\text{1 次以上の整式}}$ の形で表される式を（⑧　　　　　　）という。整式と分数式を合わせて（⑨　　　　　　）という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。したがって，分母と分子に共通な因数があれば，（⑩　　　　　　）することができる。それ以上約分できない分数式は（⑪　　　　　　）であるという。

例9 (1) $\dfrac{4xy^2}{6x^3y}=\dfrac{2y}{3x^2}$

(2) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

問 15 次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1) $\dfrac{3x^2y}{9xyz}$

(2) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$

(3) $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}$

乗法・除法

（教科書 p.18）

分数式の乗法，除法は次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 10 $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x+1}{x-2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{x+2}{x-3}$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 16 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\times\dfrac{x+2}{x-7}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$

加法･減法

（教科書 p.19）

分母が等しい分数式の加法，減法は次のようにする。

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}},\qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}-\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}$$

例 11

$$\frac{3}{x^2-4}-\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3-(x+1)}{x^2-4}=\frac{-x+2}{x^2-4}$$
$$=\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{x+2}$$

問 17 次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{x+1}{x^2-x}+\frac{x^2-x-1}{x^2-x}$

(2)　$\frac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\frac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

たとえば $\frac{2}{xy}$，$\frac{x}{y^2}$ は $\frac{2}{xy}=\frac{2\times y}{xy\times y}=\frac{2y}{xy^2}$，$\frac{x}{y^2}=\frac{x\times x}{y^2\times x}=\frac{x^2}{xy^2}$

のように，分母が同じ分数式になおすことができる。このように，いくつかの分数式の分母を同じにすることを（⑫　　　　　　　）するという。

例 12

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}-\frac{x+2}{(x+2)(2x+1)}$$ ← 通分する

$$=\frac{4x+2-(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$$

$$=\frac{3x}{(x+2)(2x+1)}$$ ← 分母は展開しなくてもよい

問 18 次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}$

(2)　$\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x-3}$

例題 5 $\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}$ を計算せよ。

解

問 19 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}$

(2) $\frac{x-6}{x^2-9}+\frac{x-1}{x^2-2x-3}$

(3) $\frac{x^3+8x}{x^2-x-2}-\frac{8}{x-2}$

例 13

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\div\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\div\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

注意　上の例 13 は，分母と分子に x を掛けて

右のように計算してもよい。

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}\times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x}=\frac{1}{x+1}$$

問 20 次の式を簡単にせよ。

(1)　$\frac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}}$

(2)　$\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Training

（教科書 p.21）

1　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+3y)^3$

(2)　$(4a-b)^3$

(3)　$(5x+2)(25x^2-10x+4)$

(4)　$(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$27x^3+8y^3$

(2)　a^3-64b^3

(3)　$ax^3+125ay^3$

(4)　$8a^3b-27bc^3$

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　$(a+b)^3+1$

(2)　$(2x+y)^3-(2x-y)^3$

(3)　x^6+16x^3+64

(4)　$a^6-7a^3b^3-8b^6$

4　次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x-3y)^7$ における x^5y^2

(2)　$(3x^2+2)^6$ における x^2

5　次の等式が成り立つことを示せ。

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=0$$

6　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=6x^3+7x^2-9x+2,\quad B=2x-1$

(2)　$A=x^3+2x^2+3,\quad B=x^2+4$

7　整式 $2x^3-8x+7$ をある整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $3x+1$ である。整式 B を求めよ。

8 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{6x+6}{x^2-4}\times\frac{x^3-8}{2x^2+2x}$

(2) $\frac{x^2-x}{x^2-2x-3}\div\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15}\times\frac{x^2-1}{x}$

9 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{2x-1}{x^2-3x}-\frac{2x+1}{x^2+3x}$

(2) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^3-1}$

10　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

(2)　$\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$

1 節 整式・分数式の計算

❶ 整式の乗法と因数分解

3 次式の乗法公式

（教科書 p.8）

例1 (1)　$(a+b)^3$ を展開してみよう。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\
&= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\
&= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)\\
&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a^2 & +2ab & +b^2 & \\
\times) & a & +b & & \\
\hline
 & a^3 & +2a^2b & +ab^2 & \\
 & & a^2b & +2ab^2 & +b^3\\
\hline
 & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3
\end{array}
$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式(1)
[1]　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3$ [2]　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$

問1 公式 [2] が成り立つことを示せ。

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\
&= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\
&= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\
&= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\
&= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{aligned}
$$

例2 (1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

$\qquad = x^3+6x^2+12x+8$

(2)　$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$

$(a-b)^3=\ \ a^3\ \ -\ \ 3\cdot a^2\cdot b\ \ +\ \ 3\cdot a\cdot b^2-b^3$

$\qquad = 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

問2 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)^3$

$= x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$

$= \boldsymbol{x^3+3x^2+3x+1}$

(2)　$(2x-1)^3$

$= (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3$

$= \boldsymbol{8x^3-12x^2+6x-1}$

(3)　$(x+3y)^3$

$= x^3+3\cdot x^2\cdot 3y+3\cdot x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$= \boldsymbol{x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3}$

(4)　$(3x-2y)^3$

$= (3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$= \boldsymbol{27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3}$

例3 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$を展開してみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&= a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\
&= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\
&= a^3+b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a^2 & -ab & +b^2 & \\
\times) & a & +b & & \\
\hline
 & a^3 & -a^2b & +ab^2 & \\
 & & a^2b & -ab^2 & +b^3\\
\hline
 & a^3 & & & +b^3
\end{array}
$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式(2)
[3]　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\boldsymbol{a}^3+\boldsymbol{b}^3$ [4]　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)=\boldsymbol{a}^3-\boldsymbol{b}^3$

問3 公式 [4] が成り立つことを示せ。

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(a^2+ab+b^2)\\
&= a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)\\
&= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3\\
&= a^3-b^3
\end{aligned}
$$

例4 (1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3$

$(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$

$=x^3+27$

(2)　$(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\cdot 5y+(5y)^2\}=(2x)^3-(5y)^3$

$(a-b)(a^2+a\cdot b+b^2)\ =a^3-b^3$

$=8x^3-125y^3$

問4 次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x^2-x+1)$

$(x+1)(x^2-x+1)$

$=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$

$=x^3+1^3=\boldsymbol{x^3+1}$

(2)　$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$=(2x-1)\{(2x)^2+2x\cdot 1+1^2\}$

$=(2x)^3-1^3=\boldsymbol{8x^3-1}$

(3)　$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

$=(3x+y)\{(3x)^2-3x\cdot y+y^2\}$

$=(3x)^3+y^3=\boldsymbol{27x^3+y^3}$

(4)　$(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$

$(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$

$=(x-10y)\{x^2+x\cdot 10y+(10y)^2\}$

$=x^3-(10y)^3=\boldsymbol{x^3-1000y^3}$

3 次式の因数分解

（教科書 p.10）

乗法公式［3］，［4］から，次の公式が成り立つ。

因数分解の公式
[1]　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ [2]　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例5 (1)　$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

(2)　$x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+\ a\cdot b+b^2)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

問5 次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3-1

$=x^3-1^3$

$=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)}$

(2)　x^3+125

$=x^3+5^3$

$=(x+5)(x^2-x\cdot 5+5^2)$

$=\boldsymbol{(x+5)(x^2-5x+25)}$

(3)　x^3-27y^3

$=x^3-(3y)^3$

$=(x-3y)\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}$

$=\boldsymbol{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}$

(4)　$8x^3+y^3$

$=(2x)^3+y^3$

$=(2x+y)\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}$

$=\boldsymbol{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}$

例題 1　次の式を因数分解せよ。

x^6-1

考え方　$x^6=(x^3)^2$ より，$x^3=A$ とおくと $x^6-1=A^2-1$ と表される。

解　$x^3=A$ とおくと

$x^6-1=A^2-1=(A+1)(A-1)$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)\times(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

問6　次の式を展開せよ。

(1)　a^6-b^6

$a^3=A$，$b^3=B$ とおくと

a^6-b^6

$=A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=\boldsymbol{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

(2)　x^6+2x^3+1

$x^3=A$ とおくと

x^6+2x^3+1

$=A^2+2A+1=(A+1)^2=(x^3+1)^2$

$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}^2$

$=\boldsymbol{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}$

② 二項定理

パスカルの三角形

（教科書 p.11）

問7　$(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が $(a+b)^4$ の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^5$

$=(a+b)(a+b)^4$

$=(a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$

$=1a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+1ab^4+1a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+1b^5$

$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

上の展開式において，両端の 1 以外の係数は

$5=1+4$，$10=4+6$，$10=6+4$，$5=4+1$

より，$(a+b)^4$ の展開式における隣り合った係数の和となっている。

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求めて右のように並べたものを（① 　パスカルの三角形　）という。

問8　右のパスカルの三角形で，$n=5$，$n=6$ の行の $\square$ をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$n=5$ の行は左から順に

1，5，10，10，5，1

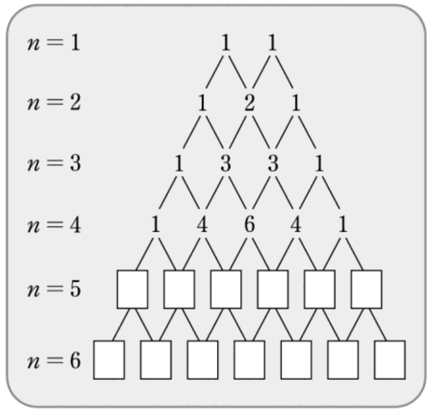
$n=6$ の行は左から順に

1，6，15，20，15，6，1

これより

$(a+b)^6$

$=\boldsymbol{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$



二項定理

（教科書 p.12）

一般に，次の（② 二項定理 ）が成り立つ。

*異なる n 個のものから r 個を取り出してつくった組合せを

（③ n 個から r 個とる組合せ ）

といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。このとき，次の公式が成り立つ。

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{個}}}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

ここで，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ である。

ただし，$0! = 1$，${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定める。

二項定理
$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots$ $+ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$

例6 $(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0 a^5 + {}_5\mathrm{C}_1 a^4 b + {}_5\mathrm{C}_2 a^3 b^2 + {}_5\mathrm{C}_3 a^2 b^3 + {}_5\mathrm{C}_4 ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5 b^5$

$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$

問9 二項定理を用いて，$(a+b)^6$ を展開せよ。

$(a+b)^6$

$= {}_6\mathrm{C}_0 a^6 + {}_6\mathrm{C}_1 a^5 b + {}_6\mathrm{C}_2 a^4 b^2 + {}_6\mathrm{C}_3 a^3 b^3 + {}_6\mathrm{C}_4 a^2 b^4 + {}_6\mathrm{C}_5 ab^5 + {}_6\mathrm{C}_6 b^6$

$= \boldsymbol{a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6}$

二項定理により $(a+b)^n$ の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と表される。これを $(a+b)^n$ の展開式の（④ 一般項 ）という。ただし，$a^0 = 1$，$b^0 = 1$ とする。また，${}_n\mathrm{C}_r$ を（⑤ 二項係数 ）ともいう。

例題 2 $(2a-b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数を求めよ。

解 $(2a-b)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5\mathrm{C}_r (2a)^{5-r}(-b)^r \quad (r = 0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$$

と表される。a^2b^3 の項は，$r = 3$ の場合であるから

$${}_5\mathrm{C}_3 (2a)^2(-b)^3 = 10\cdot 2^2\cdot(-1)^3 a^2 b^3 = -40a^2b^3$$

よって，a^2b^3 の係数は -40 である。

問10 $(3a-2b)^4$ の展開式における a^3b の係数を求めよ。

$(3a-2b)^4$ の展開式の一般項は

$${}_4\mathrm{C}_r (3a)^{4-r}(-2b)^r \ (r = 0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$$

と表される。a^3b の項は，$r = 1$ の場合であるから

$${}_4\mathrm{C}_1 (3a)^3(-2b) = 4\cdot 3^3\cdot(-2)a^3b$$
$$= -216a^3b$$

よって，a^3b の係数は　$\boldsymbol{-216}$

例7 二項定理において，$a = 1$，$b = x$ とおくと

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r x^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

さらに，$x = 1$ を代入すると，次の等式が得られる。

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

問11 等式 $3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$ を示せ。

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

に $x = 2$ を代入すると

$$3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\cdot 2 + {}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\cdot 2^n$$
$$= {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

が成り立つ。

Challenge 例題 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}$ の展開

（教科書 p.14）

例題 $(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数を求めよ。

解 $\{(a+b)+c\}^5$ の展開式において $(a+b)^4c$ が現れるのは

$${}_5\mathrm{C}_1(a+b)^4c$$

←― a^2b^2c が現れるのはこの式のみ

であり，$(a+b)^4$ を展開したときの a^2b^2 の係数は ${}_4\mathrm{C}_2$ である。

したがって，a^2b^2c の係数は

$${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=30$$

一般に，次のことが成り立つ。

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}a^pb^qc^r \quad \text{ただし，} p+q+r=n$$

問1 (1)　$(a+b+c)^6$ の展開式における $a^2b^2c^2$ の係数を求めよ。

$\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において $(a+b)^4c^2$ が現れるのは

$${}_6\mathrm{C}_2(a+b)^4c^2$$

であり，$(a+b)^4$ を展開したときの a^2b^2 の係数は ${}_4\mathrm{C}_2$ である。

したがって，$a^2b^2c^2$ の係数は

$${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=\mathbf{90}$$

(2)　$(a+2b+3c)^6$ の展開式における a^2b^3c の係数を求めよ。

$\{(a+2b)+3c\}^6$ の展開式において

$(a+2b)^5\cdot 3c$ が現れるのは

$${}_6\mathrm{C}_1(a+2b)^5\cdot 3c$$

であり，$(a+2b)^5$ の展開式において

$a^2\cdot(2b)^3$ が現れるのは

$${}_5\mathrm{C}_3a^2(2b)^3$$

であるから，文字の部分が a^2b^3c の項は

$${}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3\cdot a^2(2b)^3\cdot 3c$$

よって，a^2b^3c の係数は

$${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3\times 2^3\times 3=\mathbf{1440}$$

＊ 一般に，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものをすべて並べる並べ方の総数は $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ である。

③ 整式の除法

整式の除法

（教科書 p.15）

例8 $A=2x^2+7x+5$, $B=x+3$のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$
\begin{array}{rl}
 & \;2x+1 \quad \leftarrow \text{商} \\
x+3 \,\big) & \overline{2x^2+7x+5} \\
 & \underline{2x^2+6x} \quad \longleftarrow (x+3)\times 2x \\
 & \qquad x+5 \\
 & \qquad \underline{x+3} \quad \longleftarrow (x+3)\times 1 \\
 & \qquad\quad 2 \quad \leftarrow \text{余り}
\end{array}
$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x+3$ よりも次数が低いので，これ以上計算を続けることができない。

このとき，$2x^2+7x+5$ を $x+3$ で割ったときの

　商は $2x+1$，**余り**は 2

であるという。上の割り算から

$A=B(2x+1)+2$　……①　　←― 割られる式 ＝ 割る式 × 商 ＋ 余り

が成り立つことがわかる。

問 12 $A=6x^2-5x+1$ を $B=3x-4$ で割る計算をせよ。また，例 8 にならって，A を①の形で表せ。

$$
\begin{array}{rl}
 & \;2x+1 \\
3x-4 \,\big) & \overline{6x^2-5x+1} \\
 & \underline{6x^2-8x} \\
 & \qquad 3x+1 \\
 & \qquad \underline{3x-4} \\
 & \qquad\quad 5
\end{array}
$$

$\boldsymbol{A=B(2x+1)+5}$

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$\boldsymbol{A=BQ+R}$　　ただし，R の次数 ＜ B の次数

このような Q, R はただ 1 つ定まる。とくに，$R=0$ となるとき，A は B で（⑥　割り切れる　）といい，B は A の（⑦　因数　）であるという。

例題 3 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3-7x^2+3x+8$,　$B=x^2-x-3$

(2)　$A=2x^3+4x^2+7$,　$B=2x^2-3$

解 (1)

$$
\begin{array}{rl}
 & \;2x-5 \\
x^2-x-3 \,\big) & \overline{2x^3-7x^2+3x+8} \\
 & \underline{2x^3-2x^2-6x} \\
 & \quad -5x^2+9x+8 \\
 & \quad \underline{-5x^2+5x+15} \\
 & \qquad\qquad 4x-7
\end{array}
$$

〈答〉商 $2x-5$,
余り $4x-7$

(2)

$$
\begin{array}{rl}
 & \;x+2 \\
2x^2\,\boxed{}-3 \,\big) & \overline{2x^3+4x^2\,\boxed{}+7} \\
 & \underline{2x^3\,\boxed{}-3x} \\
 & \quad 4x^2+3x+7 \\
 & \quad \underline{4x^2\,\boxed{}-6} \\
 & \qquad\quad 3x+13
\end{array}
$$

←― 項がないときはあけておく

〈答〉商 $x+2$,
余り $3x+13$

注意　このような計算では，割る式も割られる式も，文字xについて降べきの順に整理しておくとよい。

問 13 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=2x^3+3x^2-8x+1$,　$B=x^2+3x-2$

$$
\begin{array}{rl}
 & \;2x-3 \\
x^2+3x-2 \,\big) & \overline{2x^3+3x^2-8x+1} \\
 & \underline{2x^3+6x^2-4x} \\
 & \quad -3x^2-4x+1 \\
 & \quad \underline{-3x^2-9x+6} \\
 & \qquad\qquad 5x-5
\end{array}
$$

商 $\boldsymbol{2x-3}$，余り $\boldsymbol{5x-5}$

(2)　$A=x^3-x^2-1$,　$B=x^2+2$

$$
\begin{array}{rl}
 & \;x-1 \\
x^2\,\boxed{}+2 \,\big) & \overline{x^3-x^2\,\boxed{}-1} \\
 & \underline{x^3\,\boxed{}+2x} \\
 & \quad -x^2-2x-1 \\
 & \quad \underline{-x^2\,\boxed{}-2} \\
 & \qquad\quad -2x+1
\end{array}
$$

商 $\boldsymbol{x-1}$，余り $\boldsymbol{-2x+1}$

例題 4 整式 x^3-3x^2-6x-2 をある整式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $3x-4$ である。整式 B を求めよ。

解 $x^3-3x^2-6x-2=B(x+2)+(3x-4)$

が成り立つから

$B(x+2)=(x^3-3x^2-6x-2)-(3x-4)$

$\qquad\quad =x^3-3x^2-9x+2$

x^3-3x^2-9x+2 を $x+2$ で割って

$B=x^2-5x+1$

$$\begin{array}{r@{\,}l} & x^2-5x+1 \\ \cline{2-2} x+2 \big) & x^3-3x^2-9x+2 \\ & x^3+2x^2 \\ \cline{2-2} & -5x^2-9x \\ & -5x^2-10x \\ \cline{2-2} & x+2 \\ & x+2 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

問 14 整式 $3x^3+14x^2-4x+5$ をある整式 B で割ると，商が $3x-1$，余りが $7x+3$ である。整式 B を求めよ。

$3x^3+14x^2-4x+5$

$=B(3x-1)+(7x+3)$

が成り立つから

$B(3x-1)$

$=(3x^3+14x^2-4x+5)-(7x+3)$

$=3x^3+14x^2-11x+2$

$3x^3+14x^2-11x+2$ を $3x-1$ で割って

$$\begin{array}{r@{\,}l} & x^2+5x-2 \\ \cline{2-2} 3x-1 \big) & 3x^3+14x^2-11x+2 \\ & 3x^3-x^2 \\ \cline{2-2} & 15x^2-11x \\ & 15x^2-5x \\ \cline{2-2} & -6x+2 \\ & -6x+2 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

よって　　$\boldsymbol{B=x^2+5x-2}$

Challenge 例題 2 種類の文字を含む整式の除法

（教科書 p.17）

例題 $A=2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3$，$B=x-2a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

$$\begin{array}{r@{\,}l} & 2x^2-ax+4a^2 \\ \cline{2-2} x-2a \big) & 2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3 \\ & 2x^3-4ax^2 \\ \cline{2-2} & -ax^2+6a^2x \\ & -ax^2+2a^2x \\ \cline{2-2} & 4a^2x-8a^3 \\ & 4a^2x-8a^3 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

〈答〉商 $2x^2-ax+4a^2$，余り 0

問 1 $A=x^3-2ax^2-a^2x+2a^3$，$B=x-a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

$$\begin{array}{r@{\,}l} & x^2-ax-2a^2 \\ \cline{2-2} x-a \big) & x^3-2ax^2-a^2x+2a^3 \\ & x^3-ax^2 \\ \cline{2-2} & -ax^2-a^2x \\ & -ax^2+a^2x \\ \cline{2-2} & -2a^2x+2a^3 \\ & -2a^2x+2a^3 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

商 $\boldsymbol{x^2-ax-2a^2}$，余り $\boldsymbol{0}$

④ 分数式とその計算

（教科書 p.18）

$\frac{1}{x}$, $\frac{x^2+2}{x^2-1}$ のように，$\frac{\text{整式}}{\text{1 次以上の整式}}$ の形で表される式を（⑧　分数式　）という。整式と分数式を合わせて（⑨　有理式　）という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。したがって，分母と分子に共通な因数があれば，（⑩　約分　）することができる。それ以上約分できない分数式は（⑪　既約　）であるという。

例9 (1) $\frac{4xy^2}{6x^3y}=\frac{2y}{3x^2}$

(2) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$

問 15 次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1) $\frac{3x^2y}{9xyz}$

$\frac{3x^2y}{9xyz}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3z}}$

(2) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$

$\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-2)}$

$=\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x-2}}$

(3) $\frac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}$

$\frac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}=\frac{x(x+1)(x+2)}{8(x+1)(x-1)}$

$\frac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}=\frac{x(x+1)(x+2)}{8(x+1)(x-1)}$

$=\frac{\boldsymbol{x(x+2)}}{\boldsymbol{8(x-1)}}$

乗法・除法

（教科書 p.18）

分数式の乗法，除法は次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 10 $\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\frac{x+1}{x-2}$

$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+2}{x-3}$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 16 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{x^2-49}{x^2+2x}\times\frac{x+2}{x-7}$

$=\frac{(x+7)(x-7)}{x(x+2)}\times\frac{x+2}{x-7}=\frac{\boldsymbol{x+7}}{\boldsymbol{x}}$

(2) $\frac{2x-1}{x^2-2x+1}\div\frac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$

$=\frac{2x-1}{x^2-2x+1}\times\frac{x^2-5x+4}{4x^2-1}$

$=\frac{2x-1}{(x-1)^2}\times\frac{(x-1)(x-4)}{(2x+1)(2x-1)}$

$=\frac{\boldsymbol{x-4}}{\boldsymbol{(x-1)(2x+1)}}$

加法･減法

（教科書 p.19）

分母が等しい分数式の加法，減法は次のようにする。

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

例 11
$$\frac{3}{x^2-4}-\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3-(x+1)}{x^2-4}=\frac{-x+2}{x^2-4}$$
$$=\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{x+2}$$

問 17 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{x+1}{x^2-x}+\frac{x^2-x-1}{x^2-x}$

$$=\frac{(x+1)+(x^2-x-1)}{x^2-x}=\frac{x^2}{x^2-x}$$
$$=\frac{x^2}{x(x-1)}=\boldsymbol{\frac{x}{x-1}}$$

(2) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\frac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

$$=\frac{(x^2+3x+1)-(x^2+x-3)}{x^2+5x+6}$$
$$=\frac{2x+4}{x^2+5x+6}=\frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{x+3}}$$

たとえば $\frac{2}{xy}$, $\frac{x}{y^2}$ は $\frac{2}{xy}=\frac{2\times y}{xy\times y}=\frac{2y}{xy^2}$, $\frac{x}{y^2}=\frac{x\times x}{y^2\times x}=\frac{x^2}{xy^2}$

$\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x+1}$ は $\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}$, $\frac{3}{x+1}=\frac{3x}{x(x+1)}$

のように，分母が同じ分数式になおすことができる。このように，いくつかの分数式の分母を同じにすることを（⑫　通分　）するという。

例 12
$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}-\frac{x+2}{(x+2)(2x+1)}$$ ← 通分する
$$=\frac{4x+2-(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$$
$$=\frac{3x}{(x+2)(2x+1)}$$ ← 分母は展開しなくてもよい

問 18 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}$

$$=\frac{x-1}{(x+3)(x-1)}-\frac{x+3}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\frac{x-1-(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=-\boldsymbol{\frac{4}{(x+3)(x-1)}}$$

(2) $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2x-3}$

$$=\frac{2x-3}{(x+1)(2x-3)}+\frac{3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$$
$$=\frac{2x-3+3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5x}{(x+1)(2x-3)}}$$

例題 5 $\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}$ を計算せよ。

解 $\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{x+4}{x(x-2)}-\frac{3}{(x-1)(x-2)}$

分母を因数分解する

$=\frac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}-\frac{3x}{x(x-1)(x-2)}$

通分する

$$=\frac{(x+4)(x-1)-3x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-4}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x(x-1)}$$

問 19 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x-1-2x}{(x+1)(x-1)}=\frac{-x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x-1}}$$

(2) $\frac{x-6}{x^2-9}+\frac{x-1}{x^2-2x-3}$

$$=\frac{x-6}{(x+3)(x-3)}+\frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x+3)(x-3)}+\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-6)(x+1)+(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-3x-9}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{(x-3)(2x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{2x+3}}{\boldsymbol{(x+1)(x+3)}}$$

(3) $\frac{x^3+8x}{x^2-x-2}-\frac{8}{x-2}$

$$=\frac{x^3+8x}{(x-2)(x+1)}-\frac{8}{x-2}$$

$$=\frac{x^3+8x}{(x-2)(x+1)}-\frac{8(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{x^3+8x-8(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{x^3-8}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{x^2+2x+4}}{\boldsymbol{x+1}}$$

例 13 $\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\div\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\div\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$

注意　上の例 13 は，分母と分子に x を掛けて

右のように計算してもよい。　$\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}\times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{1}{x+1}$

問 20 次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}}$

$=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\div\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\dfrac{x+2}{x}\div\dfrac{3x-1}{x}$

$=\dfrac{x+2}{x}\times\dfrac{x}{3x-1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{3x-1}}$

(2)　$\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$=\dfrac{x^2-1}{x}\div\dfrac{x+1}{x}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}\times\dfrac{x}{x+1}$

$=\boldsymbol{x-1}$

Training

（教科書 p.21）

1　次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+3y)^3$

$= (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot(3y)^2 + (3y)^3$

$= \boldsymbol{8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3}$

(2)　$(4a-b)^3$

$= (4a)^3 - 3\cdot(4a)^2\cdot b + 3\cdot 4a\cdot b^2 - b^3$

$= \boldsymbol{64a^3 - 48a^2b + 12ab^2 - b^3}$

(3)　$(5x+2)(25x^2-10x+4)$

$= (5x+2)\{(5x)^2 - 5x\cdot 2 + 2^2\}$

$= (5x)^3 + 2^3 = \boldsymbol{125x^3 + 8}$

(4)　$(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

$= (3a-4b)\{(3a)^2 + 3a\cdot 4b + (4b)^2\}$

$= (3a)^3 - (4b)^3 = \boldsymbol{27a^3 - 64b^3}$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$27x^3 + 8y^3$

$= (3x)^3 + (2y)^3$

$= (3x+2y)\{(3x)^2 - 3x\cdot 2y + (2y)^2\}$

$= \boldsymbol{(3x+2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)}$

(2)　$a^3 - 64b^3$

$= a^3 - (4b)^3$

$= (a-4b)\{a^2 + a\cdot 4b + (4b)^2\}$

$= \boldsymbol{(a-4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)}$

(3)　$ax^3 + 125ay^3$

$= a(x^3 + 125y^3)$

$= a\{x^3 + (5y)^3\}$

$= a(x+5y)\{x^2 - x\cdot 5y + (5y)^2\}$

$= \boldsymbol{a(x+5y)(x^2 - 5xy + 25y^2)}$

(4)　$8a^3b - 27bc^3$

$= b(8a^3 - 27c^3)$

$= b\{(2a)^3 - (3c)^3\}$

$= b(2a-3c)\{(2a)^2 + 2a\cdot 3c + (3c)^2\}$

$= \boldsymbol{b(2a-3c)(4a^2 + 6ac + 9c^2)}$

3　次の式を因数分解せよ。

(1)　$(a+b)^3 + 1$

$a+b=A$ とおくと

$(a+b)^3 + 1 = A^3 + 1$

$= (A+1)(A^2 - A + 1)$

$= (a+b+1)\{(a+b)^2 - (a+b) + 1\}$

$= \boldsymbol{(a+b+1)(a^2 + 2ab + b^2 - a - b + 1)}$

(2)　$(2x+y)^3 - (2x-y)^3$

$2x+y=A$，$2x-y=B$ とおくと

$(2x+y)^3 - (2x-y)^3$

$= A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

$= \{(2x+y) - (2x-y)\}\times\{(2x+y)^2 + (2x+y)(2x-y) + (2x-y)^2\}$

$= 2y \times \{(4x^2 + 4xy + y^2) + (4x^2 - y^2) + (4x^2 - 4xy + y^2)\}$

$= \boldsymbol{2y(12x^2 + y^2)}$

(3)　$x^6 + 16x^3 + 64$

$x^3 = A$ とおくと

$x^6 + 16x^3 + 64$

$= A^2 + 16A + 64$

$= (A+8)^2 = (x^3+8)^2 = (x^3 + 2^3)^2$

$= \{(x+2)(x^2 - 2x + 4)\}^2$

$= \boldsymbol{(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)^2}$

(4)　$a^6-7a^3b^3-8b^6$

$a^3=A$，$b^3=B$ とおくと

$a^6-7a^3b^3-8b^6$

$=A^2-7AB-8B^2$

$=(A+B)(A-8B)$

$=(a^3+b^3)(a^3-8b^3)$

$=(a^3+b^3)\{a^3-(2b)^3\}$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)\times(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

$=\boldsymbol{(a+b)(a-2b)(a^2-ab+b^2)(a^2+2ab+4b^2)}$

4　次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x-3y)^7$ における x^5y^2

$(x-3y)^7$ の展開式の一般項は

${}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}(-3y)^r$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

と表される。x^5y^2 の項は $r=2$ の場合で

あるから　${}_7\mathrm{C}_2 x^5(-3y)^2=21\cdot 9x^5y^2=189x^5y^2$

よって，x^5y^2 の係数は　**189**

(2)　$(3x^2+2)^6$ における x^2

$(3x^2+2)^6$ の展開式の一般項は

${}_6\mathrm{C}_r(3x^2)^{6-r}\cdot 2^r$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

と表される。x^2 の項は $r=5$ の場合であるから

${}_6\mathrm{C}_5(3x^2)\cdot 2^5=6\cdot 3\cdot 32x^2=576x^2$

よって，x^2の係数は　**576**

5　次の等式が成り立つことを示せ。

${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=0$

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$

に $x=-1$ を代入すると

$0^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1(-1)+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$

$={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

よって

${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=0$

が成り立つ。

6　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=6x^3+7x^2-9x+2$,　$B=2x-1$

商 $\boldsymbol{3x^2+5x-2}$，余り 0

$$\begin{array}{rr}
 & 3x^2+5x-2 \\
2x-1\,\big) & \overline{6x^3+7x^2-9x+2} \\
 & \underline{6x^3-3x^2} \\
 & 10x^2-9x \\
 & \underline{10x^2-5x} \\
 & -4x+2 \\
 & \underline{-4x+2} \\
 & 0
\end{array}$$

(2)　$A=x^3+2x^2+3$,　$B=x^2+4$

商 $\boldsymbol{x+2}$，余り $\boldsymbol{-4x-5}$

$$\begin{array}{rr}
 & x+2 \\
x^2+4\,\big) & \overline{x^3+2x^2+3} \\
 & \underline{x^3+4x} \\
 & 2x^2-4x+3 \\
 & \underline{2x^2+8} \\
 & -4x-5
\end{array}$$

7　整式 $2x^3-8x+7$ をある整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $3x+1$ である。整式 B を求めよ。

$2x^3-8x+7=B(x-2)+(3x+1)$

が成り立つから

$B(x-2)=(2x^3-8x+7)-(3x+1)$

$=2x^3-11x+6$

$2x^3-11x+6$ を $x-2$ で割って

よって　$\boldsymbol{B=2x^2+4x-3}$

$$\begin{array}{rr}
 & 2x^2+4x-3 \\
x-2\,\big) & \overline{2x^3-11x+6} \\
 & \underline{2x^3-4x^2} \\
 & 4x^2-11x \\
 & \underline{4x^2-8x} \\
 & -3x+6 \\
 & \underline{-3x+6} \\
 & 0
\end{array}$$

8　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{6x+6}{x^2-4}\times\frac{x^3-8}{2x^2+2x}$

$$=\frac{6(x+1)}{(x+2)(x-2)}\times\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2x(x+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3(x^2+2x+4)}{x(x+2)}}$$

(2)　$\frac{x^2-x}{x^2-2x-3}\div\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15}\times\frac{x^2-1}{x}$

$$=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)^2}\times\frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$=\boldsymbol{x-5}$$

9　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{2x-1}{x^2-3x}-\frac{2x+1}{x^2+3x}$

$$=\frac{2x-1}{x(x-3)}-\frac{2x+1}{x(x+3)}$$

$$=\frac{(2x-1)(x+3)-(2x+1)(x-3)}{x(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{(2x^2+5x-3)-(2x^2-5x-3)}{x(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{10x}{x(x+3)(x-3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{10}{(x+3)(x-3)}}$$

(2)　$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^3-1}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)-(x+1)(x^2+x+1)+(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x^3-1)-(x^3+2x^2+2x+1)+(2x^2+3x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}}$$

10 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\div\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\dfrac{x+1}{x}\div\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$=\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-1}}$

(2) $\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$

$=(a+2)\div\left(a-\dfrac{2}{a+1}\right)$

$=(a+2)\div\dfrac{a(a+1)-2}{a+1}$

$=(a+2)\times\dfrac{a+1}{a^2+a-2}$

$=(a+2)\times\dfrac{a+1}{(a+2)(a-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{a+1}{a-1}}$