数学 II　Standard　P.182

1 節　微分係数と導関数

❶　平均変化率

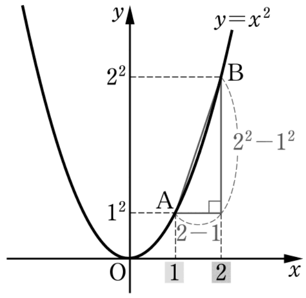
2 次関数 $y=x^2$ について，x が 1 から 2 まで変わるとき，x の値の変化に対する y の値の変化の割合を求めてみよう。

x の変化量は　　$2-1$

y の変化量は　　2^2-1^2

であるから，変化の割合は

$$\frac{2^2-1^2}{2-1}=3$$



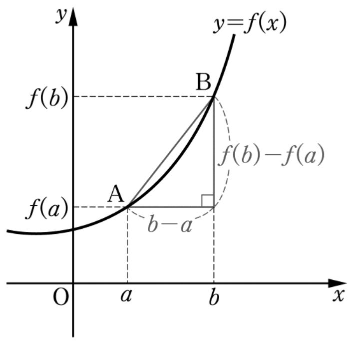
この値は，グラフ上の 2 点 A(1, 1)，B(2, 4) を通る直線 AB の傾きを表している。

一般に，関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変わるとき，x の変化量に対する y の変化量の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \cdots\cdots ①$$

を，x が a から b まで変わるときの関数 $f(x)$ の**平均変化率**という。

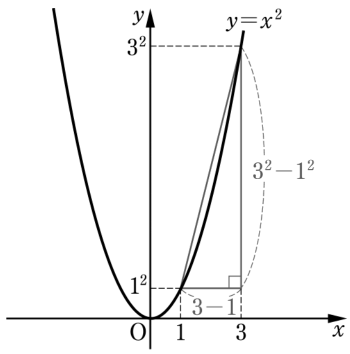
平均変化率①は，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を結ぶ直線の傾きを表している。



例 1　関数 $f(x)=x^2$ について，x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2-1^2}{2}$$

$$=4$$



問 1　次の関数について，x が 2 から 4 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=2x+3$　　　　(2)　$f(x)=-2x^2$

前ページの①において，$b-a=h$ と置き換えると，$b=a+h$ より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となるから，次のことが成り立つ。

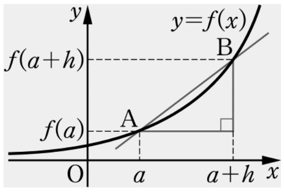
平均変化率

x が

　a から $a+h$ まで変わる

ときの関数 $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



例 2　関数 $f(x)=x^2+x$ について，x が 1 から $1+h$ まで変わるときの平均変化率は

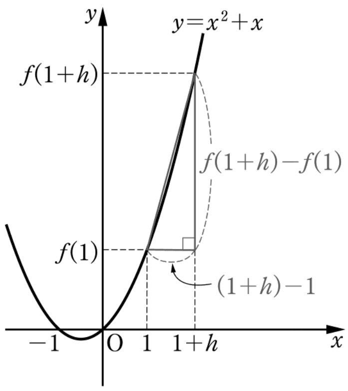
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{\{(1+h)^2+(1+h)\}-(1^2+1)}{h}$$

$$=\frac{3h+h^2}{h}$$

$$=\frac{h(3+h)}{h}$$

$$=3+h$$



問 2　関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。

(1)　x が 1 から $1+h$ まで変わるとき

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるとき

❷　微分係数

関数 $f(x)=x^2$ において，x が 2 から $2+h$ まで変わるとき，

平均変化率は　$\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=\frac{h(4+h)}{h}=4+h$

である。ここで，h の値を限りなく 0 に近づけると，この平均変化率は下の表からもわかるように 4 に限りなく近づく。

h	⋯	-0.1	-0.01	-0.001	⋯	0	⋯	0.001	0.01	0.1	⋯
$4+h$	⋯	3.9	3.99	3.999	⋯	4	⋯	4.001	4.01	4.1	⋯

この値 4 を h が限りなく 0 に近づくときの $\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$ の**極限値**という。このことを，記号 limを用いて次のように書く。*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4$$

一般に，関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率において，h を限りなく 0 に近づけるときの極限値　$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$　が定まるならば，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す。

微分係数の定義
$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

例 3　関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

問 3　関数 $f(x)=3x^2$ について，微分係数 $f'(1)$，$f'(-2)$ を求めよ。

p.192 Training 1　p.226 Level Up 1

＊limは極限を意味する limit に由来する記号であり，“リミット”と読む。

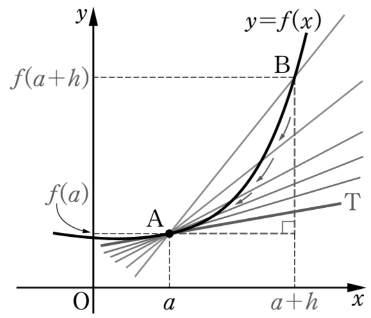
微分係数と接線の傾き

微分係数の意味を関数のグラフにおいて考えてみよう。

関数 $y = f(x)$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると，平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は直線 AB の傾きを表している。



いま，h を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

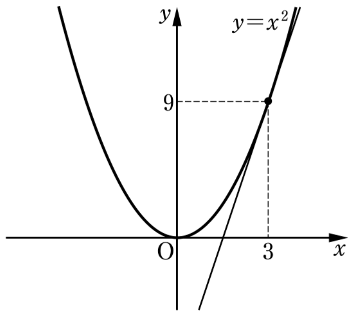
であるから，直線 AB は，点 A を通り傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線 $y = f(x)$ の**接線**といい，点 A を**接点**という。

微分係数と接線の傾き
曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\left(a,\ f(a)\right)$ における**接線の傾き**は，**微分係数 $f'(a)$** に等しい。

例 4　放物線 $y = x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは，
$f(x) = x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$$f'(3) = \lim_{h \to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(6+h) = 6$$



問 4　放物線 $y = 2x^2$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きを求めよ。

数学 II　Standard　P.186

❸　導関数

関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h) = 2a$$

である。この式で，a の値を変えると，$f'(a)$ の値も変わる。

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

すなわち，a を変数とみなせば，微分係数 $f'(a)$ は a の関数になる。

そこで, 文字 a を文字 x で置き換えて得られる関数 $f'(x) = 2x$ を関数 $f(x) = x^2$ の “導関数” という。

一般に，関数 $y = f(x)$ について，x のおのおのの値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させれば，1 つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。

この関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の**導関数**という。

導関数の定義
$$\boldsymbol{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

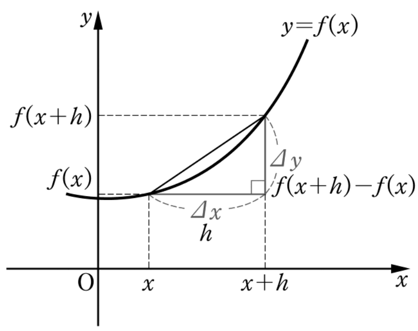
上の式において

　x の変化量 h を Δx

　y の変化量 $f(x+h) - f(x)$ をΔy で表す。Δx, Δy をそれぞれ x の増分，y の増分という。*

Δx, Δy の記号を用いて，導関数は次のように表すこともある。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



＊Δ はギリシャ文字で，“デルタ”と読む。

数学 II　Standard　P.187

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

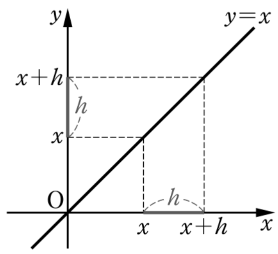
$$y',\qquad \frac{dy}{dx},\qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

などの記号も用いられる。

x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を **x で微分する**，または単に**微分する**という。

例 5　導関数の定義にしたがって，次の関数を微分してみよう。

(1)　$f(x)=x$ について



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2)　$f(x)=x^3$ について

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

$$=3x^2$$

関数を微分した結果を表すのに，次のように書くこともある。

$$(x)'=1\qquad (x^3)'=3x^2$$

問 5　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=2x^2$ を微分せよ。

p.192 Training 2

数学 II　Standard　P.188

❹　導関数の計算

x^n の導関数

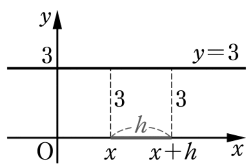
すでに学んだように，x，x^2，x^3 の導関数は次のようになる。

$$(x)' = 1,\qquad (x^2)' = 2x,\qquad (x^3)' = 3x^2$$

一般に n が正の整数のとき，次の公式が成り立つ。　←― p.191 参考

x^n の導関数
$(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}}$

定数関数の導関数



値が一定の関数を**定数関数**という。

定数関数 $y = 3$ を微分してみよう。

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

同様にして，定数関数 $y = c$ の導関数は次のようになる。

$$y' = (c)' = 0$$

定数関数の導関数
c が定数のとき　　$(\boldsymbol{c})' = \boldsymbol{0}$

導関数の性質

まず，関数 $y = 4x^2$ を微分してみよう。

$$y' = (4x^2)' = \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4\left\{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4\left(\frac{2xh + h^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0} 4(2x+h)$$

$$= 4\cdot 2x = 8x$$

$(x^2)' = 2x$ であるから　　　$(4x^2)' = 4(x^2)'$

次に，関数 $y=x^2+x$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' = (x^2+x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+\frac{(x+h)-x}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh+h^2}{h}+\frac{h}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\{(2x+h)+1\} = 2x+1 \end{aligned}$$

$(x^2)'=2x$，$(x)'=1$ であるから

$$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$$

が成り立つ。同様に考えて

$$(x^2-x)'=(x^2)'-(x)'$$

が成り立つことがわかる。

一般に，関数の定数倍および和，差の導関数については，次のことが成り立つ。

定数倍，和，差の導関数
[1]　k が定数のとき　$\{\boldsymbol{kf(x)}\}'=\boldsymbol{kf'(x)}$
[2]　$\{\boldsymbol{f(x)+g(x)}\}'=\boldsymbol{f'(x)+g'(x)}$
[3]　$\{\boldsymbol{f(x)-g(x)}\}'=\boldsymbol{f'(x)-g'(x)}$

例 6　上の性質を用いて，関数 $y=x^3+2x^2-3$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (x^3+2x^2-3)' \\ &= (x^3)'+(2x^2)'-(3)' && \longleftarrow \text{性質 [2]，[3]} \\ &= (x^3)'+2(x^2)'-(3)' && \longleftarrow \text{性質 [1]} \\ &= 3x^2+2\cdot 2x-0 = 3x^2+4x \end{aligned}$$

問 6　次の関数を微分せよ。　p.192 Training 3

(1)　$y=2x+3$　　(2)　$y=x^2+4x+6$

(3)　$y=-2x^3-5x^2+7x-8$　　(4)　$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+1$

例題 1　導関数の計算

関数 $y=(x+2)(3x-1)$ を微分せよ。

解　$y=3x^2+5x-2$ であるから　　←展開してから微分する

$$y'=(3x^2+5x-2)'=3(x^2)'+5(x)'-(2)'$$
$$=3\cdot 2x+5\cdot 1-0=6x+5$$

問 7　次の関数を微分せよ。　　p.192 Training 4

(1)　$y=x(3-4x)$　　(2)　$y=(x-2)(2x+3)$

(3)　$y=(2x+1)(2x-1)$　　(4)　$y=x(x+1)^2$

これまでは，おもに x の関数を微分することを考えてきたが，x 以外の文字を変数とする関数の微分についても同様である。

例 7　r の関数 $S=\pi r^2$ を r で微分して得られる導関数 $\frac{dS}{dr}$ は

$$\frac{dS}{dr}=\pi(r^2)'=\pi\cdot 2r=2\pi r$$

問 8　次の関数を〔　〕内の文字で微分せよ。

(1)　$h=10t-5t^2$〔t〕　　(2)　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$〔r〕

微分係数の計算

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がわかっているときには，$f'(x)$ の x に a を代入すれば，微分係数 $f'(a)$ を求めることができる。

例 8　関数 $f(x)=x^2-3x-4$ について，$x=-2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=2x-3$

よって　　$f'(-2)=2\cdot(-2)-3=-7$

問 9　関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$x=1,\ x=2,\ x=-3$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

p.192 Training 5

例 9　関数 $f(x) = 3x^2 + ax - 1$ が, $f'(-1) = 2$ を満たすとき, 定数 a の値を求めてみよう。

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = 6x + a$$

であるから　　$f'(-1) = -6 + a$

$f'(-1) = 2$ より　　$-6 + a = 2$

よって　　$a = 8$

問 10　関数 $f(x) = ax^3 - x^2 + 2ax + 3$ が，$f'(2) = 3$ を満たすとき，定数 a の値を求めよ。

p.192 Training 6　p.226 Level Up 2

参考　n 次関数の微分

188 ページで示した次の公式が, すべての正の整数 n について成り立つことを証明してみよう。

x^n の導関数
$(x^n)' = nx^{n-1}$

二項定理により

$$(x+h)^n = x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} xh^{n-1} + h^n$$

$$= x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

右辺の x^n を左辺に移項して，両辺を h で割ると

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

したがって

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right\}$$

$$= nx^{n-1}$$

Training

1　関数 $f(x)=-3x^2+4x$ について，次の問に答えよ。 p.184

(1)　x が -1 から $-1+h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(2)　(1)の結果を利用して，微分係数 $f'(-1)$ を求めよ。

2　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=3x^2+2x$ を微分せよ。 p.187

3　次の関数を微分せよ。 p.189

(1)　$y=4x-5$　　(2)　$y=-2x^2+3x+1$

(3)　$y=x^3+3x^2-1$　　(4)　$y=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+5$

4　次の関数を微分せよ。 p.190

(1)　$y=(4x-3)(x^2+2x+6)$

(2)　$y=(2x+3)^3$

5　次の関数の導関数を求め，〔　〕内に示した x の値における微分係数を求めよ。 p.190

(1)　$f(x)=x^2+2x+2$　　〔$x=-2$〕

(2)　$f(x)=-x^3+3x-4$　　〔$x=\frac{1}{2}$〕

6　関数 $f(x)=ax^2-7x+b$ が，$f(1)=1$，$f'(1)=-1$ を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。 p.191

7　次のことを証明せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1)　$y=(ax+b)^2$ ならば　$y'=2a(ax+b)$

(2)　$y=(ax+b)^3$ ならば　$y'=3a(ax+b)^2$ *

＊ $y=(ax+b)^n$で表される関数の導関数については，次の公式が成り立つ。

$y=(ax+b)^n$　ならば　$y'=an(ax+b)^{n-1}$

ただし，a，b は定数で，n は正の整数とする。