数学II　Standard　P.150

1節　指数関数

❶　整数の指数

a を n 個掛け合わせたものを a^n と書き，a の n 乗とよぶ。また，n を a^n の**指数**といい，$a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots$ を a の**累乗**という。

$$\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ 個}} = a^{\overset{\text{指数}}{\downarrow}n}$$

指数法則

指数 n が 0 または負の整数であるとき，累乗 a^n をどのように定めればよいか考えてみよう。

たとえば，累乗 2^n の指数 n が正の整数のとき，指数 n が 1 増えるごとに 2^n の値は 2 倍になる。

このことを逆に見ると，指数 n が 1 減るごとに 2^n の値は $\frac{1}{2}$ 倍になる。

よって，指数が 0 や負の整数のときにもこの規則が成り立つように，$2^0,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ \cdots$ を次のように定めればよいことがわかる。

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \times\frac{1}{2} & & \times\frac{1}{2} & & \times\frac{1}{2} & & \times\frac{1}{2} & & \times\frac{1}{2} & & \times\frac{1}{2} & & \times\frac{1}{2} & \\
\cdots\ 2^{-3}, & \curvearrowleft & 2^{-2}, & \curvearrowleft & 2^{-1}, & \curvearrowleft & 2^{0}, & \curvearrowleft & 2^{1}, & \curvearrowleft & 2^{2}, & \curvearrowleft & 2^{3}, & \curvearrowleft & 2^{4},\ \cdots \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & \times 2 & \| & \times 2 & \| & \times 2 & \| \\
\frac{1}{2^3} & & \frac{1}{2^2} & & \frac{1}{2^1} & & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16
\end{array}$$

一般に，指数が 0 または負の整数のときの累乗を，次のように定める。

$\boldsymbol{a^0}$，$\boldsymbol{a^{-n}}$ **の定義**
$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^0 = 1,\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

例1　(1)　$3^0 = 1$　　　(2)　$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

問1　次の値を求めよ。

(1)　3^{-2}　　(2)　5^0　　(3)　6^{-2}　　(4)　$(-4)^{-3}$

一般に，$m,\ n$ が正の整数のとき，次の指数法則が成り立つ。

(1)　$a^m a^n = a^{m+n}$　　(2)　$(a^m)^n = a^{mn}$　　(3)　$(ab)^n = a^n b^n$

指数が 0 または負の整数であるときの累乗を，前ページのように定めると，$m,\ n$ がどのような整数であっても，次の**指数法則**が成り立つ。

指数法則
$a \neq 0,\ b \neq 0$ で，$m,\ n$ が整数のとき (1)　$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$　　(1′)　$\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$ (2)　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ (3)　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$　　(3′)　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

$m = 5,\ n = -3$ のとき，上の指数法則(1)，(2)，(3)が成り立つことを確かめてみよう。

(1)　$a^5 \times a^{-3} = a^5 \times \frac{1}{a^3} = a^2 = a^{5+(-3)}$

(2)　$(a^5)^{-3} = \frac{1}{(a^5)^3} = \frac{1}{a^{5\times3}} = \frac{1}{a^{15}} = a^{-15} = a^{5\times(-3)}$

(3)　$(ab)^{-3} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3b^3} = \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{b^3} = a^{-3}b^{-3}$

問 2　$m = 5,\ n = -3$ のとき，上の指数法則(1′)，(3′)が成り立つことを確かめよ。

例 2　(1)　$a^{-5} \times a^3 = a^{(-5)+3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

(2)　$(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} = a^{12}$

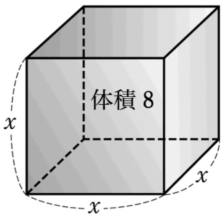
(3)　$(a^2b^{-1})^{-2} = (a^2)^{-2} \times (b^{-1})^{-2} = a^{-4}b^2 = \frac{b^2}{a^4}$

問 3　次の計算をせよ。　p.162 Training 1　p.176 LevelUp 1

(1)　$a^{-3} \times a^{-5}$　　(2)　$a^{-3} \div a^{-5}$　　(3)　$(a^2b^{-3})^{-2}$

(4)　$a^3 \times a^{-5} \div a^{-4}$　　(5)　$(2a)^3 \div a^{-4} \times a^{-6}$

❷　累乗根



体積が 8 の立方体の 1 辺の長さは 2 である。
すなわち　　$x^3=8$
を満たす x の値は 2 である。

一般に，ある実数 a に対して，3 乗して a になる数，すなわち

$$x^3=a$$

を満たす x の値を，a の **3 乗根**という。たとえば，2 は 8 の 3 乗根である。

実数の範囲で考えれば，実数 a の 3 乗根はただ 1 つしかない。これを $\boldsymbol{\sqrt[3]{a}}$ と表す。たとえば，$\sqrt[3]{8}=2$ である。

$\boxed{\text{例 3}}$　$(-2)^3=-8$ であるから

$$\sqrt[3]{-8}=-2$$

$\boxed{\text{問 4}}$　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{27}$　　(2)　$\sqrt[3]{-27}$　　(3)　$\sqrt[3]{64}$　　(4)　$\sqrt[3]{-64}$

一般に，正の整数 n に対して，n 乗して実数 a になる数，すなわち

$$\boldsymbol{x^n=a}$$

を満たす x の値を，a の **n 乗根**という。平方根は 2 乗根である。

2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて**累乗根**という。

この章では，累乗根は実数の範囲で考えることにする。

$\boxed{\text{例 4}}$　(1)　$5^3=125$ であるから

5 は 125 の 3 乗根である。

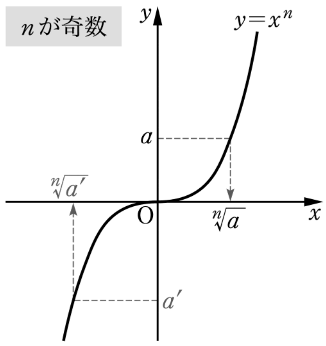
(2)　$2^4=16$，$(-2)^4=16$ であるから

2，-2 は 16 の 4 乗根である。

$\boxed{\text{問 5}}$　次の値を求めよ。

(1)　81 の平方根　　(2)　216 の 3 乗根　　(3)　625 の 4 乗根

実数 a の n 乗根について，次のことがいえる。



(1)　**n が奇数のとき**

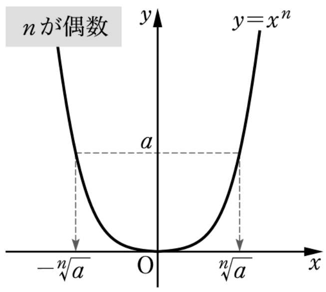
a の n 乗根は a の正負に関係なくただ 1 つある。それを $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ と表す。

たとえば

32 の 5 乗根は　　$\sqrt[5]{32} = 2$

-32 の 5 乗根は　　$\sqrt[5]{-32} = -2$

0 の 5 乗根は　　$\sqrt[5]{0} = 0$



(2)　**n が偶数のとき**

(i)　$a > 0$ ならば，a の n 乗根は正と負の 2 つある。正の方を $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$，負の方を $\boldsymbol{-\sqrt[n]{a}}$ と表す。

たとえば，16 の 4 乗根は

$\sqrt[4]{16} = 2$ と $-\sqrt[4]{16} = -2$

(ii)　$a = 0$ ならば，a の n 乗根は

ただ 1 つであり　　$\boldsymbol{\sqrt[n]{0} = 0}$

(iii)　$a < 0$ ならば，a の n 乗根は存在しない。

注意　$\sqrt[2]{a}$ はふつう $\sqrt{a}$ と書く。

例 5　(1)　$(-2)^7 = -128$ であるから

$\sqrt[7]{-128} = -2$

(2)　$\sqrt[4]{81}$ は 81 の 4 乗根 ± 3 のうち，正の方であるから

$\sqrt[4]{81} = 3$

問 6　次の値を求めよ。　p.162 Training 2

(1)　$\sqrt[4]{256}$　　(2)　$\sqrt[5]{-243}$　　(3)　$\sqrt[6]{64}$

数学 II　Standard　P.154

累乗根の性質

累乗根の定義から，正の整数 n について次のことが成り立つ。

$\boldsymbol{a>0}$ のとき　　$\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a}$

また，累乗根について，次の性質が成り立つ。

累乗根の性質

$a>0,\ b>0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき

(1) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}}$　　(2) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

(3) $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}}$　　(4) $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}}$

(3)の証明

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=x$ とおくと　　$x^{n}=\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}\right\}^{n}=\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}\right\}^{m}=a^{m}$

$x>0$ であるから，x は a^{m} の正の n 乗根である。

よって　　$x=\sqrt[n]{a^{m}}$

すなわち　　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}$

問 7　上の(3)の証明にならって，(4)を証明せよ。

例 6　(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2\times3}=\sqrt[3]{6}$　　← $\sqrt[\blacksquare]{a}\sqrt[\blacksquare]{b}=\sqrt[\blacksquare]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{12}{2}}=\sqrt[4]{6}$　　← $\dfrac{\sqrt[\blacksquare]{a}}{\sqrt[\blacksquare]{b}}=\sqrt[\blacksquare]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $\left(\sqrt[6]{9}\right)^{3}=\sqrt[6]{9^3}=\sqrt[6]{(3^2)^3}$　　← $\left(\sqrt[\blacksquare]{a}\right)^{\blacktriangle}=\sqrt[\blacksquare]{a^{\blacktriangle}}$

$=\sqrt[6]{3^6}=3$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4}$　　← $\sqrt[\blacksquare]{\sqrt[\blacktriangle]{a}}=\sqrt[\blacksquare\times\blacktriangle]{a}$

$=\sqrt[3]{\sqrt[2]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt{4}}=\sqrt[3]{2}$

問 8　次の計算をせよ。　p.162 Training 3

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{7}$　　(2) $\sqrt[4]{18}\div\sqrt[4]{6}$　　(3) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^{2}$

(4) $\sqrt[3]{27^2}$　　(5) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$

❸　有理数の指数

$a>0$ のとき，有理数 r を指数とする累乗 a^r をどのように定めればよいか考えてみよう。

151 ページで学んだように，m，n が整数のとき，指数法則(2)

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。たとえば，$m=\frac{2}{3}$，$n=3$ のときにもこの法則が成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3}\times 3} = a^2$$

となる。この式は，$a^{\frac{2}{3}}$ が a^2 の 3 乗根であることを示しているから

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$$

と定めればよいことがわかる。

一般に，次のように定める。

有理数を指数とする累乗
$a>0$ で，m が整数，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ とくに　　$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$，　$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$\boxed{\text{例 7}}$　(1)　$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(2)　$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$　　$\longleftarrow a^{\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}} = \sqrt[\blacksquare]{a^{\blacktriangle}}$

(3)　$8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{1}{4}$

$\boxed{\text{問 9}}$　次の値を求めよ。

(1)　$25^{\frac{1}{2}}$　　(2)　$16^{\frac{3}{4}}$　　(3)　$9^{-\frac{1}{2}}$　　(4)　$27^{-\frac{2}{3}}$

$\boxed{\text{問 10}}$　次の式を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(1)　$\sqrt[3]{a}$　　(2)　$\sqrt{a^3}$　　(3)　$\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$　　(4)　$\left(\sqrt[4]{a}\right)^{-3}$

有理数を指数とする累乗を前ページのように定めると，たとえば

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{6}} \times a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a^{3+4}} = a^{\frac{3+4}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$$

となる。このように，151 ページの指数法則は，指数を有理数にまで拡張しても成り立つ。

指数法則

$a > 0,\ b > 0$ で，$p,\ q$ が有理数のとき

(1)　$\boldsymbol{a^p a^q = a^{p+q}}$　　(1′)　$\boldsymbol{a^p \div a^q = a^{p-q}}$

(2)　$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$

(3)　$\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$　　(3′)　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$

$\boxed{\text{例 8}}$　(1)　$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} = 2^3 = 8$

(2)　$\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = 3^{\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}} = 3^3 = 27$

$\boxed{\text{問 11}}$　次の計算をせよ。

(1)　$3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$　　(2)　$6^{\frac{1}{2}} \div 6^{\frac{3}{2}}$　　(3)　$\left(4^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\boxed{\text{例 9}}$　(1)　$\sqrt[6]{2^3} \times \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$

(2)　$\sqrt{81^3} \div \sqrt[3]{27^2} = 81^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{2}{3}} = (3^4)^{\frac{3}{2}} \div (3^3)^{\frac{2}{3}}$

$= 3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4 = 81$

$\boxed{\text{問 12}}$　次の計算をせよ。　p.162 Training 4　p.176 Level Up 2,3

(1)　$\left(\sqrt[5]{2}\right)^2 \times \sqrt[5]{2^3}$　　(2)　$\sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{81^4}$

指数 p が無理数のときにも，正の数 a に対して a^p を定めることができる。

たとえば，$\sqrt{2} = 1.41421\cdots$ に対して，有理数を指数とする 3 の累乗の列

$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ \cdots$

は，しだいに一定の値に近づいていくから，その値を $3^{\sqrt{2}}$ と定める。

$3^{\sqrt{2}} = 3^{1.41421\cdots} = 4.72880\cdots$

3^1	$= 3$
$3^{1.4}$	$= 4.65553672\cdots$
$3^{1.41}$	$= 4.70696500\cdots$
$3^{1.414}$	$= 4.72769503\cdots$
$3^{1.4142}$	$= 4.72873393\cdots$
	$\vdots$

累乗の指数を，このように実数にまで拡張しても，上の指数法則はそのまま成り立つ。

❹　指数関数とそのグラフ

$a > 0$, $a \neq 1$ のとき

$$y = a^x$$

で表される関数を，a を**底**とする**指数関数**という。

指数関数のグラフ

2 を底とする指数関数 $y = 2^x$ のグラフについて考えてみよう。

たとえば，x が $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ のときの 2^x の値は，次のようになる。

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$$

$$2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.83$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.71$$

いろいろな x の値に対する 2^x の値は，次の表のようになる。

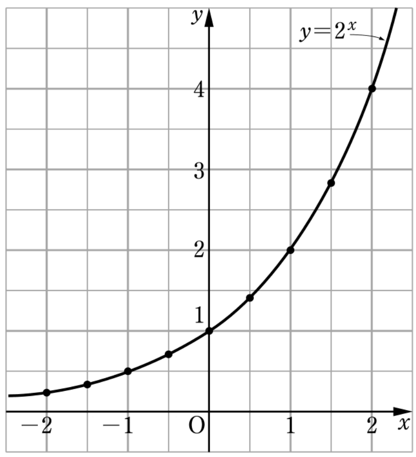
x	$\cdots$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\cdots$
$y = 2^x$	$\cdots$	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4	$\cdots$

上のように，x の値に対する y の値を求め，x, y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとっていくと，右の図のような曲線が得られる。

これが指数関数

$$y = 2^x$$

のグラフである。



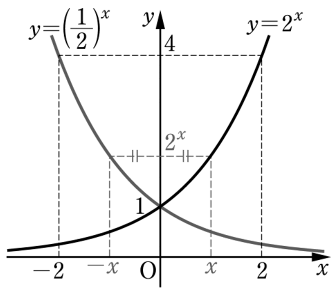
指数関数 $y=2^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを比べてみよう。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=2^x$	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\cdots$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$

$y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$

とでは，x と $-x$ が入れかわっている。

したがって，$y=2^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，y 軸に関して対称である。

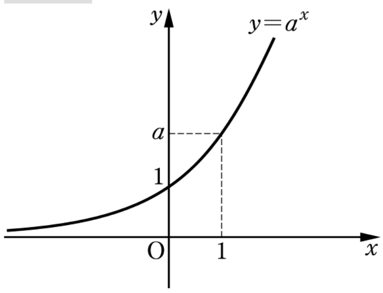


一般に，関数 $y=a^x$ のグラフと関数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフは，y 軸に関して対称である。

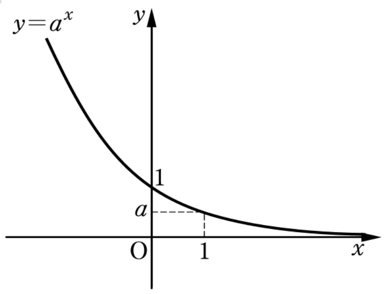
指数関数 $y=a^x$ のグラフは
$a>1$ のときは，$y=2^x$ のグラフと同様に右上がりの曲線，

$0<a<1$ のときは，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフと同様に右下がりの曲線となる。

$a>1$



$0<a<1$



$\boxed{問 13}$　関数 $y=3^x$ と関数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。 p.162 Training 5

指数関数の性質

指数関数 $y = a^x$ の性質をまとめると，次のようになる。

[1]　**定義域は実数全体，値域は正の実数全体**である。

[2]　グラフは点 $(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$ と点 $(\mathbf{1},\ \boldsymbol{a})$ を通り，x 軸が**漸近線**になる。

[3]　$\boldsymbol{a > 1}$ **のとき**，x の値が増加すると y の値も**増加**する。

すなわち　$\boldsymbol{p < q \iff a^p < a^q}$

$\boldsymbol{0 < a < 1}$ **のとき**，x の値が増加すると y の値は**減少**する。

すなわち　$\boldsymbol{p < q \iff a^p > a^q}$

また，$a > 0$, $a \neq 1$ のとき，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{a^p = a^q \iff p = q}$$

例題1　大小比較

2つの数 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ の大小を比較せよ。

考え方　2つの数を 2^x の形で表し，底が1より大きいから，x が増加すると 2^x も増加することを利用する。

解　$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$,　$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

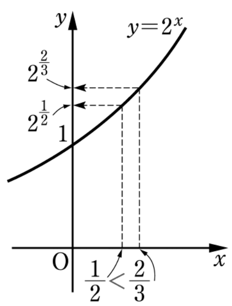
である。ここで

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

であり，$y = 2^x$ の底2は1より大きいから

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}}$$

すなわち　$\sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$



問14　次の2つの数の大小を比較せよ。　p.162 Training 6　p.176 LevelUp 4

(1)　$\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$　　　(2)　$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

指数関数を含む方程式・不等式

指数関数の性質を用いて，次の方程式，不等式を解いてみよう。

例題 2　指数関数を含む方程式

方程式 $8^x = 2^{x+4}$ を解け。

解　$8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$ であるから　$2^{3x} = 2^{x+4}$

ゆえに　$3x = x + 4$　← $a^p = a^q \Longleftrightarrow p = q$

したがって　$x = 2$

問 15　次の方程式を解け。　p.162 Training 7

(1)　$9^x = \frac{1}{3}$　　(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

例題 3　指数関数を含む不等式

次の不等式を解け。

(1)　$\left(\sqrt{3}\right)^x < 9$　　(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \frac{1}{16}$

解　(1)　$\left(\sqrt{3}\right)^x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^{\frac{x}{2}}$，$9 = 3^2$ であるから

$$3^{\frac{x}{2}} < 3^2$$

$y = 3^x$ の底 3 は 1 より大きいから

$$\frac{x}{2} < 2$$

ゆえに　$x < 4$

(2)　$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ であるから　$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ の底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x \leqq 4$

問 16　次の不等式を解け。　p.162 Training 8

(1)　$4^x > 32$　　(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x \leqq \frac{1}{27}$

Challenge　例題　**指数関数を含む方程式・不等式**

置き換えを用いて，指数関数を含む方程式，不等式を解いてみよう。

例題

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$9^x - 2 \times 3^x - 3 = 0$　　　(2)　$4^{x+1} - 5 \times 2^x + 1 > 0$

解　(1)　$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ であるから

$$(3^x)^2 - 2 \times 3^x - 3 = 0$$

ここで，$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$t > 0$ より　　$t = 3$

すなわち　　$3^x = 3$

ゆえに　　$x = 1$

(2)　$4^{x+1} = 4 \times 4^x = 4 \times (2^2)^x = 4 \times 2^{2x} = 4 \times (2^x)^2$ であるから

$$4 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 1 > 0$$

ここで，$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であり

$$4t^2 - 5t + 1 > 0$$

$$(4t-1)(t-1) > 0$$

$$t < \frac{1}{4},\ 1 < t$$

$t > 0$ であるから　　$0 < t < \frac{1}{4},\ 1 < t$

すなわち　　$0 < 2^x < 2^{-2},\ 2^0 < 2^x$

$t = 2^x$ の底 2 は 1 より大きいから　　$x < -2,\ 0 < x$

問 1　次の方程式，不等式を解け。　p.176 Level Up 5,6

(1)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 = 0$　　　(2)　$4^x - 2^{x+1} - 8 \geqq 0$

数学 II　Standard　P.162

Training

1　次の式を簡単にし，その結果を負の指数を用いずに表せ。 p.151

(1)　$a^2 \times a^{-4}$　　(2)　$a^{-5} \div a^{-3} \times \left(\frac{1}{a}\right)^2$　　(3)　$(a^2b^{-1})^{-3} \times a^4 \times b^{-2}$

2　次の値を求めよ。 p.153

(1)　$\sqrt[3]{-216}$　　(2)　$\sqrt[6]{729}$　　(3)　$-\sqrt[4]{625}$

3　次の計算をせよ。 p.154

(1)　$\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5}$　　(2)　$\sqrt[3]{100^4} \div \sqrt[3]{10^2}$　　(3)　$\left(\sqrt[4]{49}\right)^2$

(4)　$\sqrt[3]{125^2}$　　(5)　$\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$

4　次の計算をせよ。 p.156

(1)　$\sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{32^{-1}}$　　(2)　$9^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{3^5} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

5　関数 $y = 3^x$ のグラフと次の関数のグラフは，どのような位置関係にあるか答えよ。 p.158

(1)　$y = -3^x$　　(2)　$y = \frac{1}{3^x}$　　(3)　$y = 3^x + 1$　　(4)　$y = 3^{x-1}$

6　次の各組の数を小さい方から順に並べよ。 p.159

(1)　$\sqrt{3},\ \sqrt[5]{9},\ \sqrt[7]{27}$　　(2)　$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}},\ \sqrt[8]{\frac{1}{8}}$

7　次の方程式を解け。 p.160

(1)　$4^x = \frac{1}{8}$　　(2)　$\left(\frac{1}{25}\right)^x = \left(\frac{1}{125}\right)^{x-2}$

8　次の不等式を解け。 p.160

(1)　$3^{x-1} > 27$　　(2)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leqq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$