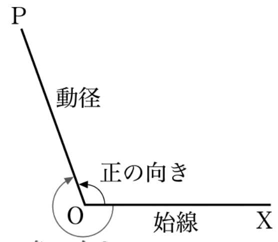
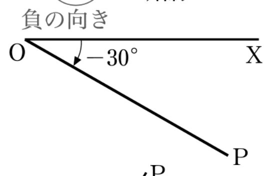
数学 II　Standard　P.110

1 節　三角関数

❶　一般角

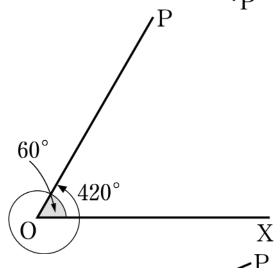


平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させることを考える。このとき，半直線 OP を**動径**といい，動径の始めの位置を示す半直線 OX を**始線**という。



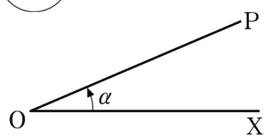
回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**，時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**という。

たとえば，負の向きに 30° 回転したとき，この回転した角を −30° と表す。また，正の向きに 360° 回転したあとさらに 60° 回転すると，全体として 420° 回転した角と考えられるから，この回転した角を 420° と表す。

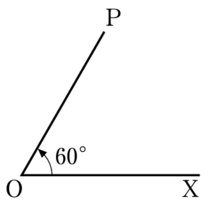


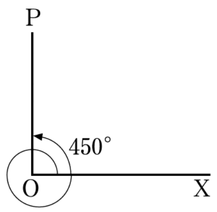
このように，負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を**一般角**という。

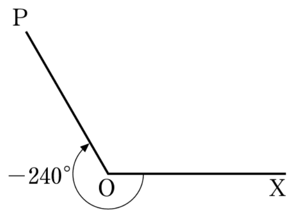
また，α を一般角として，始線 OX の位置から点 O のまわりに α だけ回転した動径を，**角 α の動径**という。



例 1　半直線 OX を始線として，60°，450°，−240° の動径を図示すると，それぞれ次のようになる。





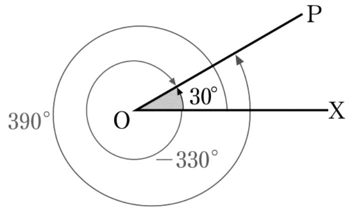


問 1　OX を始線として，次の角の動径 OP を図示せよ。

(1)　240°　　(2)　−60°　　(3)　765°　　(4)　−210°

右の図のように，$30°$ の動径を OP とする。
動径 OP は $360°$ 回転するともとの位置に戻るから，たとえば

$$390° = 30° + 360° \times 1$$
$$750° = 30° + 360° \times 2$$
$$-330° = 30° + 360° \times (-1)$$



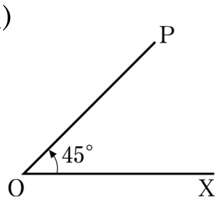
などの角の動径の位置は，$30°$ の動径の位置と同じである。
さらに，n を整数とするとき

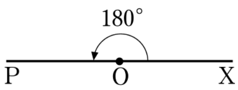
$$30° + 360° \times n$$

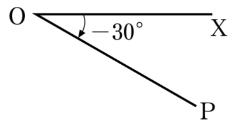
の形で表される角の動径の位置は，すべて $30°$ の動径の位置と一致する。これらの角を**動径 OP の表す角**という。
一般に，次のことがいえる。

動径の表す一般角
角 α の動径が表す一般角は $\boldsymbol{\alpha + 360° \times n}$　　（n は整数）

$\boxed{\text{問 2}}$ 次の図で，OX を始線としたときの動径 OP の表す一般角を求めよ。

(1)


(2)


(3)


$\boxed{\text{問 3}}$ 次の角を $\alpha + 360° \times n$（n は整数）の形で表すとき，α を求めよ。ただし，$0° \leqq \alpha < 360°$ とする。

(1)　$420°$　　(2)　$730°$

(3)　$-210°$　　(4)　$-675°$

❷　弧度法

角の大きさを表すのに, これまでは 1 回転を 360° とする“度”という単位を用いてきた。

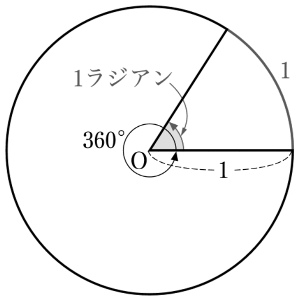
ここでは，弧の長さを用いた新しい角の表し方について学ぼう。

半径 1 の円において

長さ 1 の弧に対する中心角の大きさ

を **1 ラジアン**または **1 弧度**といい，これを単位とする角の表し方を**弧度法**という。

中心角は弧の長さに比例するから，半径 1 の円の周の長さ 2π に対する中心角 $360°$ を弧度法で表すと 2π ラジアンである。



すなわち

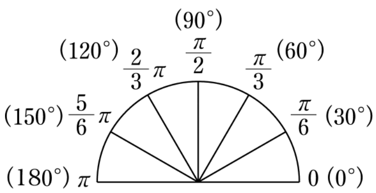
$360° = 2\pi$ ラジアン

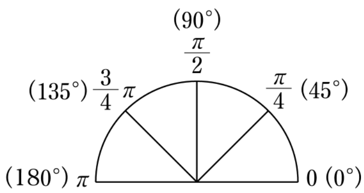
$\mathbf{180° = \pi}$ **ラジアン**

$1° = \frac{\pi}{180}$ ラジアン

1 ラジアン$= \frac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57.2958°$

いろいろな角について，度と弧度の対応は，次の図のようになる。





注意　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

例 2　240°を弧度法で表してみよう。

$$240° = \frac{240}{180} \times 180° = \frac{4}{3}\pi \qquad \leftarrow 180° = \pi$$

問 4　$270°$, $315°$, $-60°$, $-225°$ を弧度法で表せ。

例 3　弧度法による角 $\frac{5}{3}\pi$ を度で表してみよう。

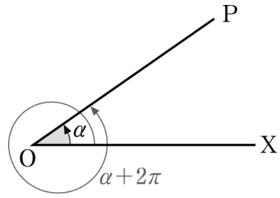
$$\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3} \times 180° = 300° \qquad \longleftarrow \pi = 180°$$

問 5　弧度法による角 $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7}{6}\pi$, $-\frac{11}{6}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$ を度で表せ。

これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。

弧度法を用いると，角 α の動径が表す一般角 θ は，次のように表される。

$$\boldsymbol{\theta = \alpha + 2n\pi} \qquad (n \text{ は整数})$$



扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とする。1 つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから

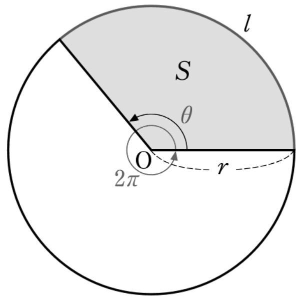
$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi, \quad S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

よって　$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

すなわち

$$\boldsymbol{l = r\theta}, \quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr}$$



例 4　半径 6，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

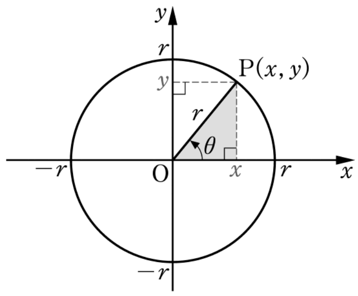
$$l = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi, \quad S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$$

問 6　半径 8，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

p.133 Training 1

❸　三角関数

数学 I で学んだサイン(正弦)，コサイン(余弦)，タンジェント(正接)を，一般角について定義しよう。座標平面上で，原点 O を中心とする半径 r の円をかく。そして，x 軸の正の部分を始線として，角 θ の動径と円 O の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。



このとき

$$\frac{y}{r},\qquad \frac{x}{r},\qquad \frac{y}{x}$$

の値は円 O の半径 r の大きさに関係なく，角 θ だけによって定まるから，次のように表す。

三角関数の定義
$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{y}{r},\qquad \cos\theta = \dfrac{x}{r},\qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x}}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の**三角関数**という。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の場合，これらは数学 I で学んだ三角比の値と一致する。

注意　$\tan\theta$ は，$x=0$ となるような θ に対しては定義されない。

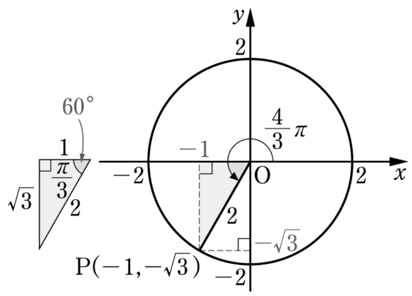
上の定義にもとづいて，いろいろな角の三角関数の値を求めてみよう。

例 5　右の図で，原点 O を中心とする半径 2 の円と $\frac{4}{3}\pi$ の動径の交点 P の座標は $\left(-1,\ -\sqrt{3}\right)$ であるから

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

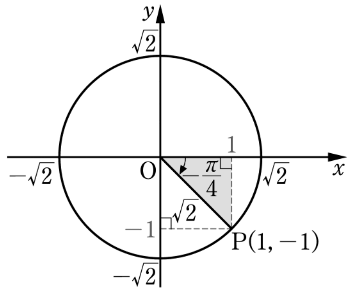


$\boxed{\text{例 6}}$　右の図で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円と $-\frac{\pi}{4}$ の動径の交点 P の座標は $(1,\ -1)$ であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{1}=-1$$



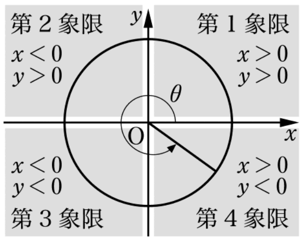
$\boxed{\text{問 7}}$　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。 p.133 Training 2

(1)　$\frac{7}{6}\pi$　　(2)　$\frac{9}{4}\pi$　　(3)　$-\frac{\pi}{3}$　　(4)　-3π

例 6 のように，角 θ の動径が第 4 象限にあるとき，θ を**第 4 象限の角**という。

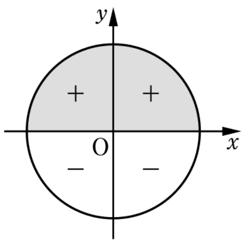
他の象限についても同様である。

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の正負は，θ がどの象限の角であるかによって定まる。

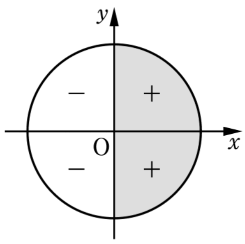


これを図に示すと，次のようになる。

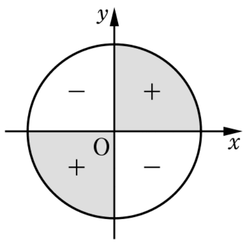
sinθ の正負



cosθ の正負



tanθ の正負

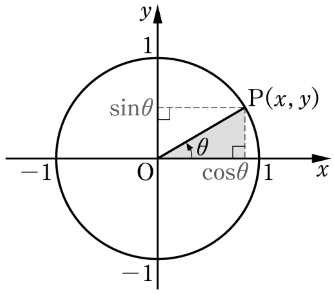


$\boxed{\text{問 8}}$　次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

(1)　$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$　　(2)　$\tan\theta<0$，$\cos\theta<0$

三角関数と単位円

原点 O を中心とする半径 1 の円を**単位円**という。単位円を用いて，三角関数の性質を調べてみよう。



右の図のように，単位円と角 θ の動径の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，三角関数の定義において，$r=1$ として

$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=\frac{y}{x}$

が成り立つ。すなわち，P の座標は

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

点 P は単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

$$\boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta \leqq 1,\quad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1} \quad \longleftarrow -1 \leqq y \leqq 1,\ -1 \leqq x \leqq 1$$

次に，単位円を表す円の方程式 $x^2+y^2=1$ より

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

さらに，$\tan\theta=\frac{y}{x}$ より　　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって　　$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

したがって，一般角の三角関数についても，数学 I で学んだ三角比と同様に，次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係

[1]　$\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

[2]　$\boldsymbol{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　　[3]　$\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 1　三角関数の相互関係[1]

θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

θ が第 3 象限の角であるから，$\sin\theta < 0$ である。

よって　　$\sin\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$　…… 答

また　　　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}$　…… 答

問 9　(1)　θ が第 4 象限の角で，$\cos\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 3(1)

例題 2　三角関数の相互関係[2]

θ が第 4 象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

解　$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + (-2)^2 = 5$ より　　$\cos^2\theta = \frac{1}{5}$

θ が第 4 象限の角であるから，$\cos\theta > 0$ である。

よって　　$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$　…… 答

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = (-2)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$　…… 答

問 10　θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta = \frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 3(2)

例題 3　相互関係による式の値

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

解　与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　　$2\sin\theta\cos\theta+1=\frac{1}{4}$

よって　　$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{8}$　……**答**

また　　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　← $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$　……**答**

問 11　$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 4　p.144 LevelUp 1

例題 4　相互関係による式変形

等式 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

証明　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$　← $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

ゆえに　　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

問 12　等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ を証明せよ。

p.133 Training 5

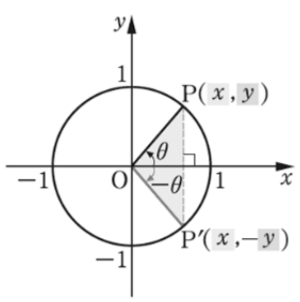
❹　三角関数の性質

n を整数とするとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径に一致するから，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+2n\pi}$ **の三角関数**	
[1]　$\boldsymbol{\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta}$ 　　$\boldsymbol{\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta}$	$\boldsymbol{\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta}$

例 7　$\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

次に，角 $-\theta$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(x,\ -y)$ となる。よって



$$\sin(-\theta)=-y=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=x=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

すなわち，$-\theta$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

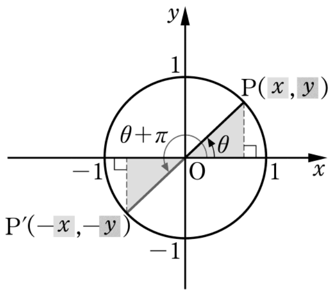
$\boldsymbol{-\theta}$ **の三角関数**	
[2]　$\boldsymbol{\sin(-\theta)=-\sin\theta}$ 　　$\boldsymbol{\cos(-\theta)=\cos\theta}$	$\boldsymbol{\tan(-\theta)=-\tan\theta}$

例 8　$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 13　$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。

角 $\theta+\pi$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP を原点 O のまわりに π だけ回転したもので，点 P と点 P′ は原点に関して対称である。

よって，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-x,\ -y)$ となる。



$$\sin(\theta+\pi)=-y=-\sin\theta$$
$$\cos(\theta+\pi)=-x=-\cos\theta$$
$$\tan(\theta+\pi)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

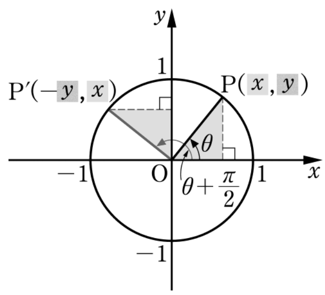
すなわち，$\theta+\pi$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\theta+\pi$ の三角関数	
[3]　$\boldsymbol{\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta}$ $\boldsymbol{\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta}$	$\boldsymbol{\tan(\theta+\pi)=\tan\theta}$

例 9　$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

問 14　$\sin\frac{5}{4}\pi$，$\cos\frac{5}{4}\pi$，$\tan\frac{5}{4}\pi$ の値を求めよ。

角 $\theta+\frac{\pi}{2}$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものであるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-y,\ x)$ となる。



よって　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=x=\cos\theta$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-y=-\sin\theta$$
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{\frac{y}{x}}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

すなわち，$\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+\frac{\pi}{2}}$ **の三角関数**
[4]　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

さらに，公式 [3]，[4] の θ を $-\theta$ で置き換えることにより，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\pi-\theta,\ \frac{\pi}{2}-\theta}$ **の三角関数**	
[5]　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	[6]　$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

例 10　$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$　←— 公式 [4]

$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$　←— 公式 [6]

問 15　次の□にあてはまる鋭角を答えよ。　p.133 Training 6　p.144 Level Up 2

(1)　$\sin\frac{7}{8}\pi=\cos\square$　(2)　$\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{\tan\square}$

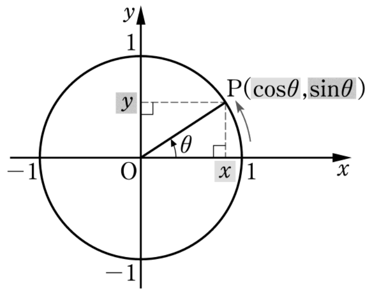
(3)　$\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\square$　(4)　$\cos\frac{5}{6}\pi=-\cos\square$

(5)　$\cos\frac{3}{8}\pi=\sin\square$　(6)　$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\tan\square}$

❺　三角関数のグラフ

$y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ のグラフ

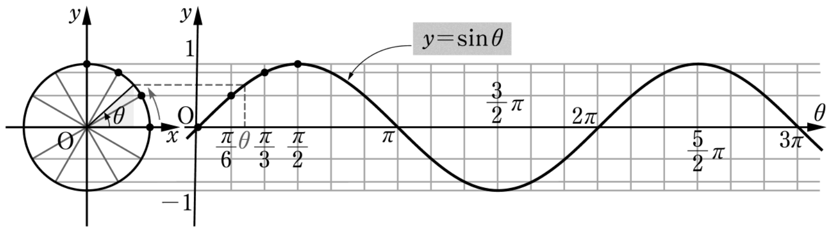
右の図において，角 θ の動径と単位円の交点 P の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。すなわち，P の y 座標が $\sin\theta$ である。



このことを利用すると，関数

$$y = \sin\theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。

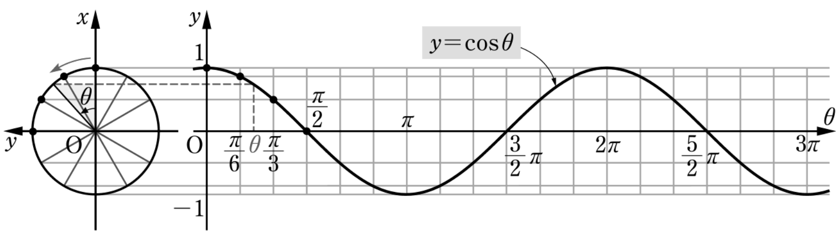


$y = \sin\theta$ のグラフの形の曲線を**正弦曲線**という。

また，点 P の x 座標が $\cos\theta$ であることから，関数

$$y = \cos\theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。



$y = \cos\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであり，$y = \cos\theta$ のグラフも正弦曲線である。

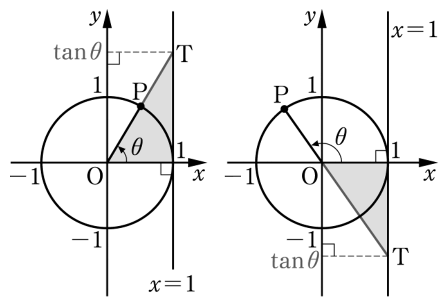
$y=\tan\theta$ のグラフ

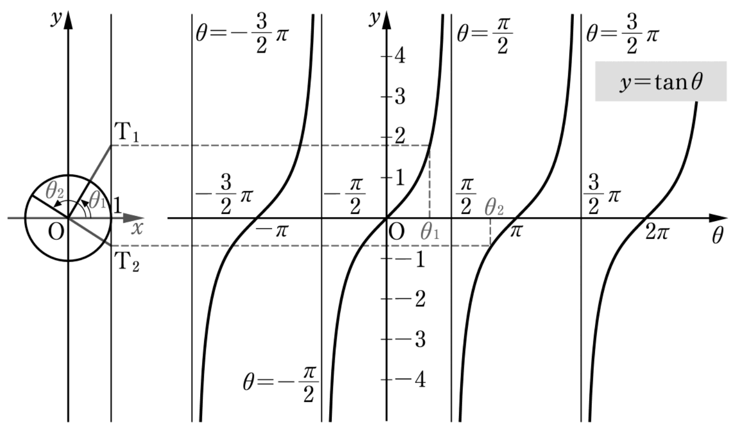
角 θ の動径を OP とし，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を T とすると，T の y 座標は $\tan\theta$ である。

このことを利用すると，関数

$$y=\tan\theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。





$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，θ が 0 から増加するにつれて，$\tan\theta$ の値も増加する。そして，θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づけば，$\tan\theta$ の値は限りなく大きくなり，グラフは直線 $\theta=\frac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このように，グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの**漸近線**という。同様に考えると，直線

$$\cdots,\ \theta=-\frac{3}{2}\pi,\ \theta=-\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{3}{2}\pi,\ \cdots$$

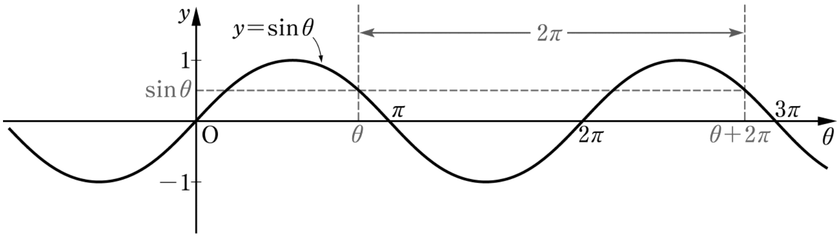
は，$y=\tan\theta$ のグラフの漸近線である。

三角関数のグラフの性質

$\sin\theta$，$\cos\theta$ については，次の公式が成り立つ。

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta, \qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$ ←── p.119 公式 [1]

このことから，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは 2π ごとに同じ形がくり返されることがわかる。



一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

$$\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}$$

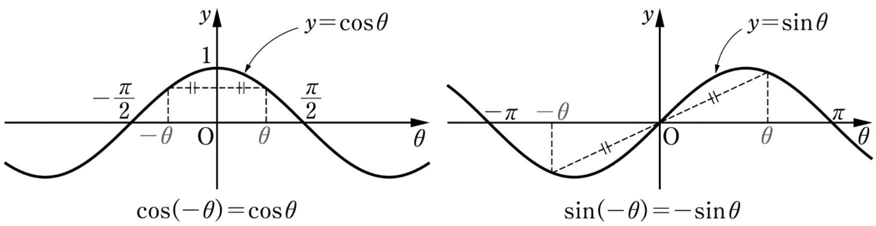
がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする**周期関数**という。このとき，周期は無数にあるが，ふつうは，正で最小のものを**周期**という。

三角関数は周期関数で，$\boldsymbol{\sin\theta}$，$\boldsymbol{\cos\theta}$ **の周期は** $\boldsymbol{2\pi}$ である。また，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$が成り立つので，$\boldsymbol{\tan\theta}$ **の周期は** $\boldsymbol{\pi}$ である。

さらに，119 ページの公式 [2] より

$$\cos(-\theta)=\cos\theta, \qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

このことから，関数 $y=\cos\theta$ のグラフは $\boldsymbol{y}$ **軸に関して対称**であり，関数 $y=\sin\theta$ のグラフは**原点に関して対称**であることがわかる。



また，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ が成り立つので，$y=\tan\theta$ のグラフは**原点に関して対称**である。

数学 II　Standard　P.125

いろいろな三角関数のグラフ

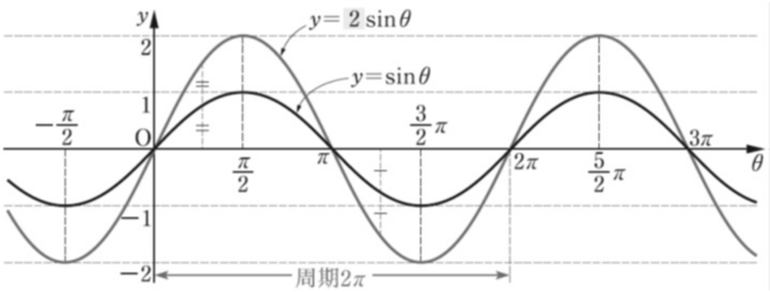
例 11　$y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

$y=2\sin\theta$ のグラフは

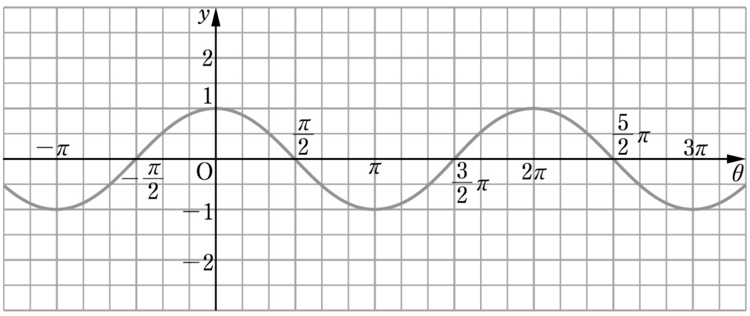
$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍

に拡大したものである。

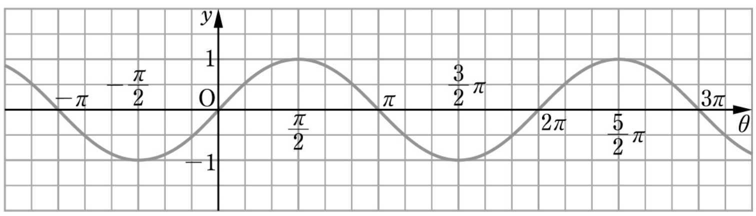
関数 $y=2\sin\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ と同じく 2π である。



問 16　$y=2\cos\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



問 17　$y=\frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



p.133 Training 7(1)

$\boxed{\text{例 12}}$ $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかいてみよう。

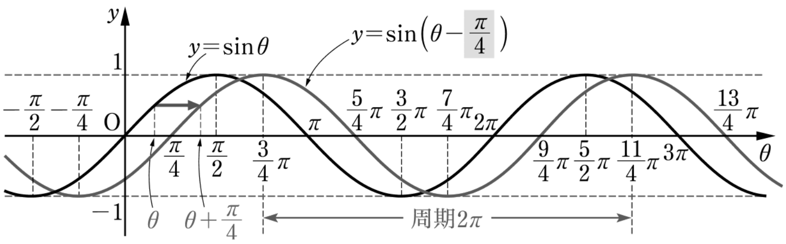
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

上の表からわかるように，$y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは

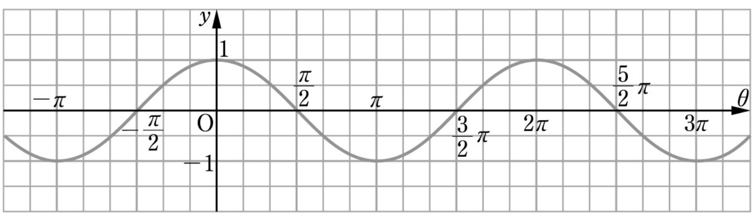
$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動

したものである。

関数 $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ の周期は，$y=\sin\theta$ と同じく 2π である。



$\boxed{\text{問 18}}$ $y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



p.133 Training 7(2)

$\boxed{\text{例 13}}$　$y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

右の表からわかるように

　$y=\sin 2\theta$

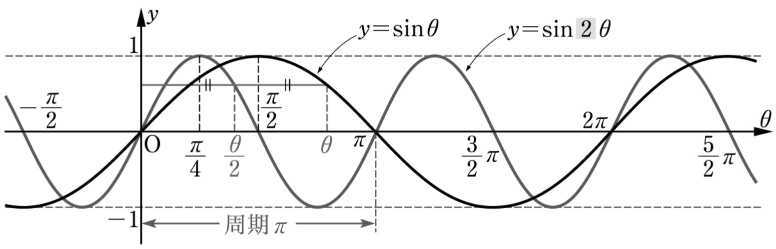
のグラフは

　$y=\sin\theta$

のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

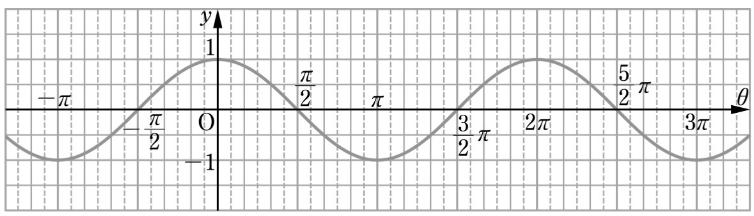
θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			

したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ の周期 2π の $\frac{1}{2}$ 倍で，π である。



上と同様に考えると，a を正の定数とするとき，**$\sin a\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{a}$** であり，**$\cos a\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{a}$** である。また，**$\tan a\theta$ の周期は $\frac{\pi}{a}$** である。

$\boxed{\text{問 19}}$　$y=\cos 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



p.144 Level Up 3,4

$\boxed{\text{問 20}}$　$y=\tan 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

p.133 Training 7(3)

❻　三角関数を含む方程式・不等式

三角関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。

例題 5　三角関数を含む方程式

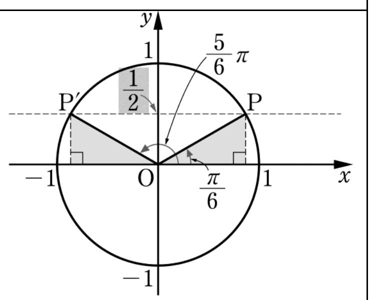
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　　　　(2)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

解　(1)　右の図のように，単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。

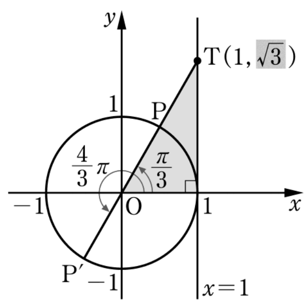
よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$



(2)　右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ と原点を通る直線と単位円の交点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$



問 21　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta = -1$

p.133 Training 8

例題 6　三角関数を含むやや複雑な方程式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。

考え方　$\theta+\frac{\pi}{3}$ の値の範囲に注意して，まず $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値を求める。

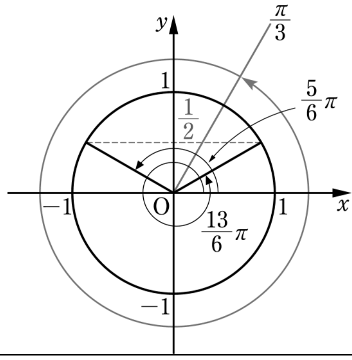
解　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$　　……①

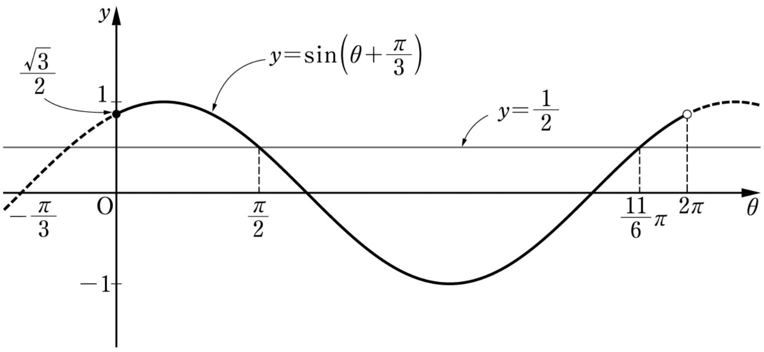
単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる $\theta+\frac{\pi}{3}$ の値は，①の範囲で

$$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに　　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$



注意　例題 6 の解は，関数 $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフが直線 $y=\frac{1}{2}$ と交わる点の θ の値である。



問 22　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　　　(2)　$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

p.133 Training 9　p.144 Level Up 5(1)

例題 7　三角関数を含む不等式[1]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

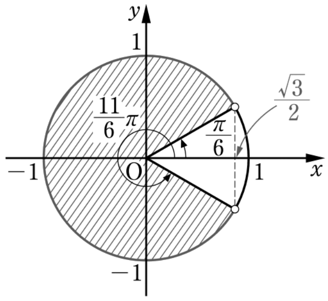
(1)　$\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{2}$

解　(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

であるから，求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに　$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$

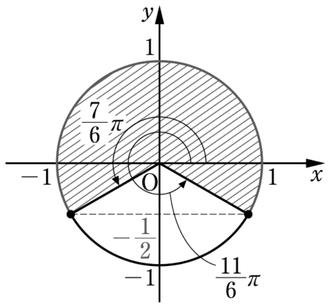


(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ となる θ の値は

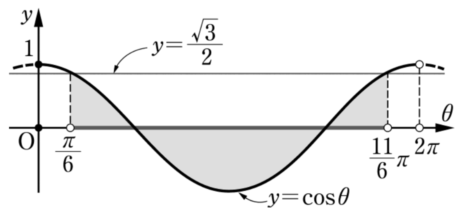
$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

であるから，求める角 θ の動径は，右の図の斜線部分にある。

ゆえに　$0 \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$



注意　例題 7 (1)の解は，関数 $y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ の値の範囲である。



問 23　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta \leqq -\frac{1}{2}$　　　(2)　$\cos\theta > \frac{1}{2}$　　　(3)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

p.133 Training 10(1),(2)　p.144 LevelUp 5(2),6

例題 8　三角関数を含む不等式[2]

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3} < \tan\theta < 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

解　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で，$\tan\theta = -\sqrt{3}$ となる θ の値は

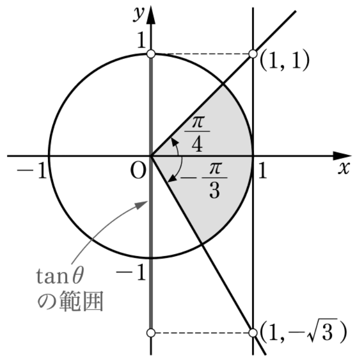
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$\tan\theta = 1$ となる θ の値は

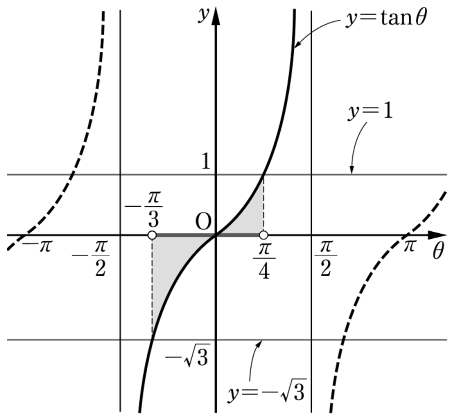
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって，右の図から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}$$



注意　例題 8 の解は，関数 $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = 1$ より下側で，しかも直線 $y = -\sqrt{3}$ より上側にある θ の値の範囲である。



問 24　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$-1 < \tan\theta < \frac{1}{\sqrt{3}}$　　　　(2)　$\tan\theta \leqq \sqrt{3}$

p.133 Training 10(3)

Challenge　例題　**三角関数を含む関数の最大・最小**

やや複雑な三角関数を含む関数の最大値，最小値を調べてみよう。

例題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y = \sin^2\theta + \sin\theta$$

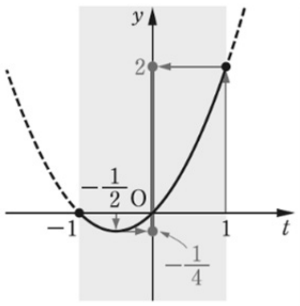
考え方　$\sin\theta = t$ とおくことによって，与えられた関数を t の 2 次関数とみて考える。

解　$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$　……①

また，y を t で表すと

$$y = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$



よって，①の範囲でこの関数は

$t = 1$ のとき　　最大値 2

$t = -\frac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\sin\theta = 1$ となるのは　　　$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ となるのは　　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき

したがって

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき　　　　最大値 2

$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき　　最小値 $-\frac{1}{4}$

問 1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1)　$y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$　　　(2)　$y = \cos^2\theta + \sin\theta$

数学 II　Standard　P.133

Training

1　半径 4，中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。 p.113

2　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。 p.115

(1)　$\frac{11}{6}\pi$　　(2)　$\frac{11}{4}\pi$　　(3)　$-\frac{2}{3}\pi$　　(4)　5π

3　次の問に答えよ。 p.117

(1)　θ が第 4 象限の角で $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第 3 象限の角で $\tan\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

4　θ は第 1 象限の角で，$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta + \cos\theta$　　(3)　$\sin^3\theta - \cos^3\theta$ p.118

5　等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$ を証明せよ。 p.118

6　$\sin\frac{5}{8}\pi = a$，$\cos\frac{5}{8}\pi = b$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ。

(1)　$\sin\frac{9}{8}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$　　(3)　$\tan\frac{17}{8}\pi$ p.121

7　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。 p.125-127

(1)　$y = -\tan\theta$　　(2)　$y = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$　　(3)　$y = \frac{1}{2}\cos 3\theta$

8　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。 p.128

(1)　$\sin\theta = -\frac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。 p.129

(1)　$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

10　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。 p.130-131

(1)　$2\sin\theta - \sqrt{3} \geqq 0$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta - 1 > 0$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 \geqq 0$