1 節　点と直線

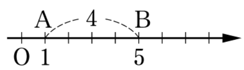
❶　直線上の点の座標

数直線上の点には実数が対応している。点 P に実数 x が対応しているとき，**点 P の座標は x** であるといい，**P(x)** と書く。

数直線上の 2 点間の距離

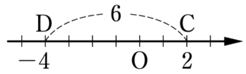
例 1　(1)　2 点 A(1)，B(5) 間の距離 AB は

$$AB = 5 - 1 = 4$$



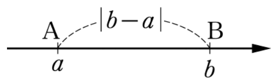
(2)　2 点 C(2)，D(−4) 間の距離 CD は

$$CD = 2 - (-4) = 6$$



数直線上において，原点と点 P(x) の距離を実数 x の絶対値といい，**$|x|$** で表す。2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて次のように表される。

$$\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$$



問 1　次の 2 点 A，B 間の距離を求めよ。

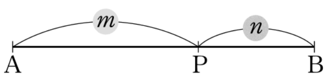
(1)　A(9)，B(1)　　　(2)　A(−2)，B(5)

内分点・外分点

m，n は正の数とする。

線分 AB 上に点 P があって

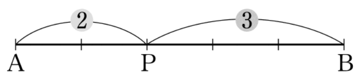
$$AP : PB = m : n$$



が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分する**という。このとき，点 P を線分 AB の**内分点**という。

とくに，線分 AB の中点は AB を 1 : 1 に内分する点である。

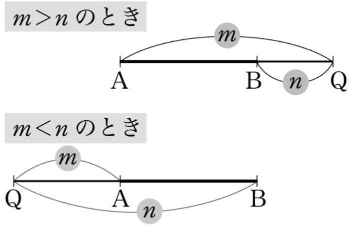
例 2　右の図において，点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分する。



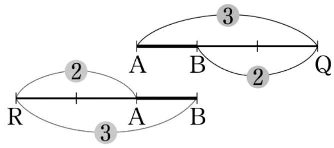
m, n は正の数で，$m \neq n$ とする。
線分 AB の延長上に点 Q があって

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = m : n$$

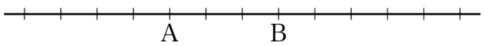
が成り立つとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に**外分する**という。
このとき，点 Q を線分 AB の**外分点**という。



例 3　右の図において，点 Q は線分 AB を 3 : 2 に外分し，点R は線分 AB を 2 : 3 に外分する。

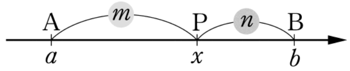


問 2　下の図において，線分 AB を2 : 1 に内分する点 P，2 : 1 に外分する点 Q，1 : 2 に外分する点 R をそれぞれ図示せよ。



2 点 A(a), B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a < b$ のとき



$a < x < b$ であるから

$$\mathrm{AP} = x - a, \qquad \mathrm{PB} = b - x$$

よって　　$(x-a):(b-x) = m:n$

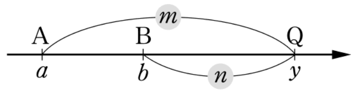
ゆえに　　$n(x-a) = m(b-x)$　　―― $p : q = p' : q' \Longleftrightarrow pq' = qp'$

これを解くと

$$x = \frac{na+mb}{m+n}$$

$a > b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

次に，2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の座標 y を求めてみよう。



$a<b$，$m>n$ のとき

$\mathrm{AQ}=y-a,\qquad \mathrm{QB}=y-b$

ゆえに　$(y-a):(y-b)=m:n$　　すなわち　$n(y-a)=m(y-b)$

これを解くと　　$y=\frac{-na+mb}{m-n}$

この式は，a と b，m と n の大小に関係なく成り立つ。

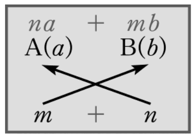
内分点・外分点の座標

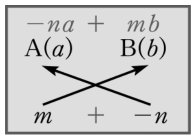
2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を

$m:n$ に内分する点 P の座標は　$\frac{na+mb}{m+n}$

とくに，線分 AB の**中点** M の座標は　$\frac{a+b}{2}$

$m:n$ に外分する点 Q の座標は　$\frac{-na+mb}{m-n}$





$\boxed{\text{注意}}$　外分点の公式は，内分点の公式で n を $-n$ に置き換えたものである。

$\boxed{\text{例 4}}$　2 点 A(-1)，B(9) に対して，線分 AB を 4：1 に内分する点 Pの座標を x とすると

$$x=\frac{1\cdot(-1)+4\cdot 9}{4+1}=7$$

また，線分 AB を 3：1 に外分する点 Q の座標を y とすると

$$y=\frac{-1\cdot(-1)+3\cdot 9}{3-1}=14$$

$\boxed{\text{問 3}}$　2 点 A(3)，B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

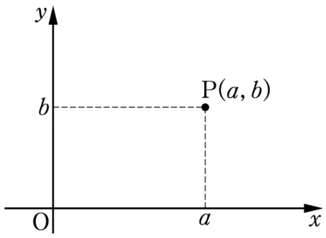
(1)　線分 AB を 2：1 に内分する点 P

(2)　線分 AB を 2：3 に外分する点 Q

(3)　線分 AB の中点 M

❷　平面上の点の座標

座標平面上の点



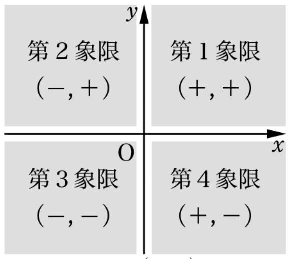
平面上に座標軸を定めると，その平面上の点 P の位置は座標 $(a,\ b)$ で表される。
座標が $(a,\ b)$ である点 P のことを **P$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$** と書く。

このようにして座標の定められた平面を**座標平面**という。

座標平面は x 軸と y 軸により図のように 4 つの**象限**に分けられる。ただし，座標軸上の点はどの象限にも入らない。

各象限における x 座標，y 座標の符号は右の図のようになる。

たとえば，第 2 象限にある点は，x 座標が負，y 座標が正である。

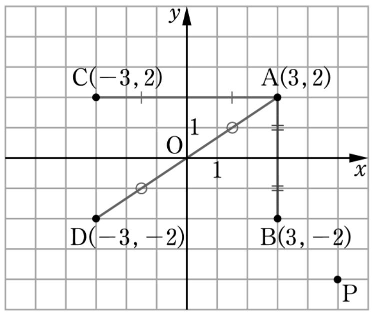


象限と座標(x, y)の符号

問 4　次の各点はどの象限にあるか。

A$(4,\ -2)$,　B$(-3,\ 1)$,　C$(-5,\ -1)$,　D$(6,\ 5)$

例 5　点 A$(3,\ 2)$ について，x 軸，y 軸，原点に関して対称な点 B，C，D の座標は，それぞれ，B$(3, -2)$，C$(-3,\ 2)$，D$(-3, -2)$ である。



問 5　点 P$(5,\ -4)$ について，次の直線または点に関して対称な点の座標を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

2 点間の距離

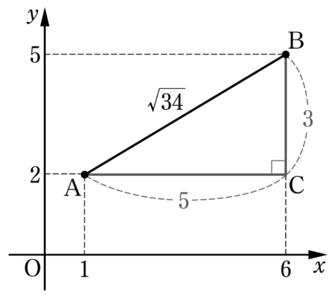
例 6　座標平面上の 2 点 A(1, 2), B(6, 5) 間の距離 AB を求めてみよう。
右の図のように直角三角形 ABC をかけば，点 C の座標は (6, 2) であり

$$\mathrm{AC} = 6 - 1 = 5$$

$$\mathrm{BC} = 5 - 2 = 3$$

よって，三平方の定理により

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$



一般に，次のことが成り立つ。

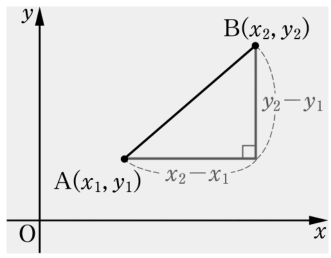
2 点間の距離

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに，原点 O と点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の距離は

$$\mathbf{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



例 7　2 点 A(1, 4), B(−2, 8) 間の距離は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

原点 O(0, 0) と点 P(4, −6) の距離は

$$\mathrm{OP} = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

問 6　次の 2 点間の距離を求めよ。　p.81 Training 1　p.104 LevelUp 1

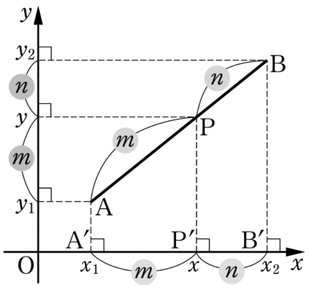
(1)　A(4, 2), B(7, 3)　　(2)　A(−1, 1), B(−4, −3)

(3)　O(0, 0), P(−4, 2)　　(4)　A(3, −2), B(3, −9)

内分点・外分点

2 点 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標$(x,\ y)$を求めてみよう。

点 A, B, P から x 軸に垂線 AA′, BB′, PP′ を下ろすと, 点 P′ は線分 A′B′ を m:n に内分する点である。



よって，数直線上の内分点の公式により

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

また，点 A, B, P から y 軸に垂線を下ろして x 座標と同様に考えれば，y 座標は

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$$

よって，P の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標

2 点 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を

m:n に**内分する**点 P の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

とくに，線分 AB の**中点** M の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

m:n に**外分する**点 Q の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

例 8　2 点 A(−2, 1), B(4, 4) がある。
線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P，2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めてみよう。
P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}=2,\qquad y=\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}=3$$

したがって，点 P の座標は (2, 3) である。
次に，Q の座標を $(x',\ y')$ とすると

$$x'=\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot4}{2-1}=10,\qquad y'=\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}=7$$

したがって，点 Q の座標は (10, 7) である。

問 7　次の 2 点 A, B に対して，線分 AB を 4 : 3 に内分する点 P，4 : 3 に外分する点 Q，および線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(1)　A(2, 1), B(9, 8)　　　　(2)　A(−2, 3), B(6, −1)

p.81 Training 2

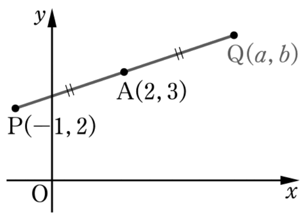
例題 1　ある点に関して対称な点

点 A(2, 3) に関して，点 P(−1, 2) と対称な点 Q の座標を求めよ。

解　点 Q の座標を $(a,\ b)$ とすると，線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{-1+a}{2}=2,\quad \frac{2+b}{2}=3$$

よって　　$a=5,\ b=4$
であるから，点 Q の座標は
　　(5, 4)



問 8　点 A(−3, 1) に関して，点 P(4, 3) と対称な点 Q の座標を求めよ。

p.81 Training 3　p.104 LevelUp 2

三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を**中線**という。三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，この点をその三角形の**重心**という。重心はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する点である。

3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めてみよう。

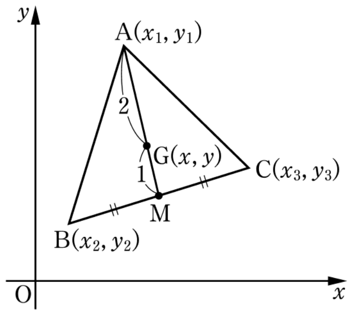
辺 BC の中点を M とすると，点 M の座標は $\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$である。

重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は線分 AM を 2 : 1 に内分するから

$$x=\frac{1\cdot x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{1\cdot y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

以上より，次のことがわかる。



三角形の重心の座標

3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

例 9　3 点 A(2, 3)，B(1, −1)，C(6, 1) を頂点とする△ ABC の重心 G の座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう。

$$x=\frac{2+1+6}{3}=3,\qquad y=\frac{3+(-1)+1}{3}=1$$

したがって，G の座標は (3, 1)

問 9　次の 3 点を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めよ。

(1)　A(5, −3)，B(4, 7)，C(−6, 2)

(2)　A(0, −4)，B(5, 3)，C(2, −4)

p.81 Training 4

❸　直線の方程式

x, y についての方程式を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その**方程式の表す図形**という。また，その方程式をその**図形の方程式**という。

ここでは，直線の方程式について考えてみよう。

1 点を通り傾きが m の直線

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式を求めてみよう。

直線と y 軸との交点の y 座標を **y 切片**という。y 切片を n とすると，この直線の方程式は

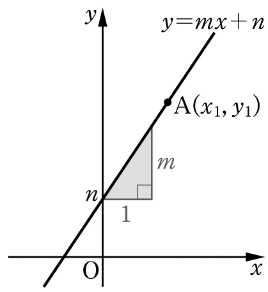
$$y = mx + n \qquad \cdots\cdots ①$$

と表される。①が点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通るから

$$y_1 = mx_1 + n \qquad \cdots\cdots ②$$

① − ②より

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



1 点を通り傾きが m の直線
点 (x_1, y_1) を通り，傾きが m の直線の方程式は $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$

例 10　点 $(2,\ -5)$ を通り，傾きが -4 の直線の方程式は

$$y - (-5) = -4(x - 2)$$

すなわち　$y = -4x + 3$

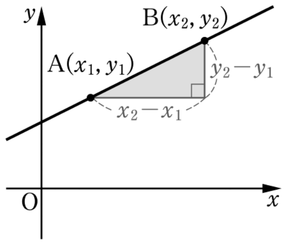
問 10　次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 3)$ を通り，傾きが 2 の直線

(2)　点 $(-3,\ 4)$ を通り，傾きが $-\frac{1}{3}$ の直線

2 点を通る直線

異なる 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を求めてみよう。



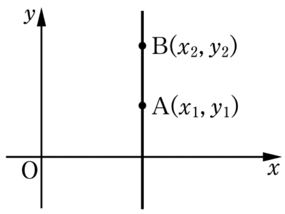
(i)　$x_1 \neq x_2$ のとき

直線 AB の傾き m は

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

さらに点 $(x_1,\ y_1)$ を通るから，その直線の方程式は

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$



(ii)　$x_1 = x_2$ のとき

直線 AB は y 軸に平行であるから，その直線の方程式は

$$x=x_1$$

2 点を通る直線
2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$のとき　　$\boldsymbol{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$ $\boldsymbol{x_1 = x_2}$のとき　　$\boldsymbol{x=x_1}$

例 11　(1)　2 点 A$(2,\ -1)$，B$(4,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{4-2}(x-2)$$

すなわち　　$y=2x-5$

(2)　2 点 A$(1,\ -2)$，B$(1,\ 5)$ を通る直線の方程式は　　$x=1$

問 11　次の 2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(-2,\ 3)$，B$(1,\ 9)$　　(2)　A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 6)$

(3)　A$(-4,\ 1)$，B$(-4,\ 5)$　　(4)　A$(2,\ 5)$，B$(-7,\ 5)$

p.81 Training 5　p.104 LevelUp 3

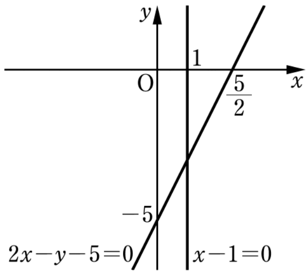
1 次方程式と直線

方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形について考えてみよう。

例 12　2 つの方程式 $2x-y-5=0,\ x-1=0$ は，それぞれ

$$y=2x-5,\ x=1$$

と変形できるので，ともに直線を表す。



一般に，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ のとき，$x,\ y$ の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形は直線である。

2 直線の交点の座標は，2 直線を表す方程式を連立させた連立 2 元 1 次方程式の解として得られる。

例題 2　2 直線の交点を通る直線

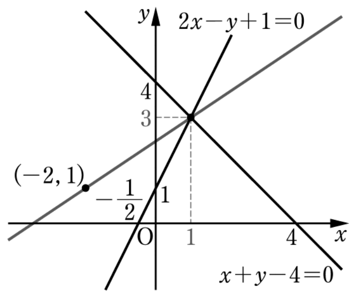
2 直線 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$ の交点と点 $(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解　連立方程式 $\begin{cases}x+y-4=0\\2x-y+1=0\end{cases}$ を解くと，$x=1,\ y=3$ となるから，交点の座標は $(1,\ 3)$ である。

求める直線は 2 点 $(-2,\ 1),\ (1,\ 3)$ を通るから，その方程式は

$$y-1=\frac{3-1}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$$

すなわち　　$2x-3y+7=0$



問 12　2 直線 $x+2y+1=0,\ x-y-5=0$ の交点と点 $(1,\ 2)$ を通る直線の方程式を求めよ。

p.81 Training 6

参考　2 直線の交点を通る直線

前ページの例題 2 で求めた 2 直線の交点を通る直線の方程式を，別の方法で考えてみよう。

2 つの直線　$x+y-4=0$　……①

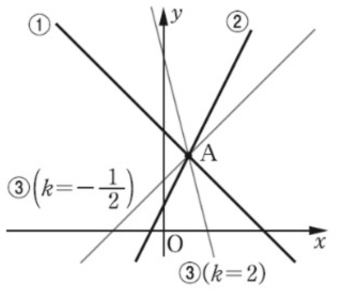
$2x-y+1=0$　……②

は平行でないから，1 点 A で交わる。このとき，k を定数として

$$\boldsymbol{k(x+y-4)+(2x-y+1)=0} \quad \cdots\cdots③$$

を考えると，③は点 A を通る直線を表す。

このことを示してみよう。



①，②をともに満たす x，y の値の組は③も満たすから，③で表される図形は 2 直線①，②の交点 A を通る。

また，③を変形すると

$$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0$$

となる。どのような k に対しても，x の係数 $k+2$ と y の係数 $k-1$ が同時には 0 にならないから，この 1 次方程式が表す図形は直線である。

したがって，③は 2 直線①，②の交点 A を通る直線を表す。

例 1　2 直線①，②の交点 A と点 B$(-2,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めてみよう。③に，$x=-2,\ y=1$ を代入して

$$k\{(-2)+1-4\}+\{2\cdot(-2)-1+1\}=0$$

よって　$k=-\frac{4}{5}$

③より　$-\frac{4}{5}(x+y-4)+(2x-y+1)=0$

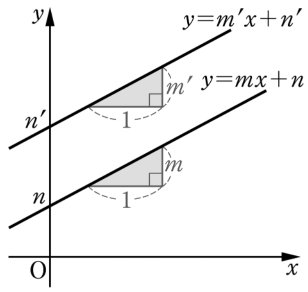
したがって，求める直線 AB の方程式は　$2x-3y+7=0$

問 1　2 直線 $4x-5y+5=0$，$x+2y-6=0$ の交点と点 $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

数学 II　Standard　P.076

❹　2 直線の関係

平行条件と垂直条件

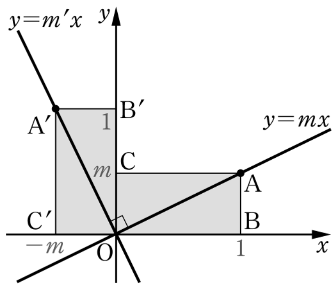


　2 直線 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ が平行になるのは，傾きが等しい，すなわち

$$m=m'$$

のときである。ただし，$m=m'$, $n=n'$ のとき，2 直線は一致するが，このときも平行と考えることにする。

　次に $m\neq 0$, $m'\neq 0$ であるとき，原点を通る 2 直線 $y=mx$, $y=m'x$ が垂直になる条件を調べてみよう。



　直線 $y=mx$ 上に点 A$(1, m)$ をとり，点 A から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線 AB, AC を下ろす。右の図のように長方形 ACOB と合同な長方形 A′C′OB′を考える。このとき，対角線 OA と OA′ は垂直である。点 A′ の座標は $(-m, 1)$ で，2 直線 $y=mx$, $y=m'x$ が垂直になるのは，点 A′ が直線 $y=m'x$ 上にあるときであるから

$$1=m'\cdot(-m)$$

すなわち　$mm'=-1$　$\longleftarrow m'=-\dfrac{1}{m}$

　2 直線 $y=mx$, $y=m'x$ が垂直であれば，これらを平行移動して得られる 2 直線 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ も垂直である。

平行条件と垂直条件
2 直線 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ について **2 直線が平行**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{m=m'}$ **2 直線が垂直**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{mm'=-1}$

$\boxed{\text{例 13}}$　2 直線 $2x+y-5=0$, $x-2y+6=0$ の方程式は，それぞれ $y=-2x+5$, $y=\frac{1}{2}x+3$ と変形でき, 2 直線の傾きの積は $(-2)\times\frac{1}{2}=-1$ である。よって, この 2 直線は垂直である。

$\boxed{\text{問 13}}$　次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

① $y=4x$　　② $x+3y+2=0$

③ $2x+6y-5=0$　　④ $2x+8y-5=0$

例題 3　2 直線の平行と垂直

次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 2)$ を通り，直線 $y=3x+1$ に平行な直線

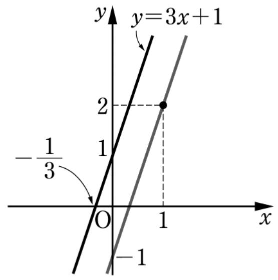
(2)　点 $(-3,\ 2)$ を通り，直線 $3x+2y-6=0$ に垂直な直線

$\boxed{\text{解}}$　(1)　直線 $y=3x+1$ の傾きは 3 であるから, これと平行な直線の傾きも 3 である。

よって，求める直線の方程式は

$$y-2=3(x-1)$$

すなわち　$y=3x-1$



(2)　求める直線の傾きを m とする。

直線 $3x+2y-6=0$ の傾きは $-\frac{3}{2}$ であるから

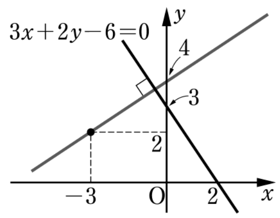
$$-\frac{3}{2}m=-1$$

よって　$m=\frac{2}{3}$

したがって，求める直線の方程式は

$$y-2=\frac{2}{3}(x+3)$$

すなわち　$2x-3y+12=0$



$\boxed{\text{問 14}}$　点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $4x-y-1=0$ に平行な直線と，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

p.81 Training 7　p.104 LevelUp 4

数学 II　Standard　P.078

ある直線に関して対称な点について考えてみよう。

例題 4　ある直線に関して対称な点

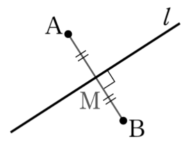
直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

考え方　2 点 A，B が，ある直線 l に関して対称である条件は

(i)　直線 AB は直線 l に垂直である

(ii)　線分 AB の中点Mは直線 l 上にある

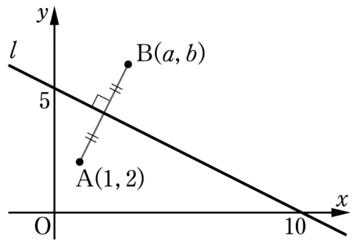
が成り立つことである。



解　直線 $x+2y-10=0$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　$-\frac{1}{2}$

直線 AB の傾きは　$\frac{b-2}{a-1}$



直線 l と直線 AB は垂直であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-2}{a-1}=-1$$

すなわち　$b=2a$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+2}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\frac{a+1}{2}+2\cdot\frac{b+2}{2}-10=0$$

すなわち　$a+2b-15=0$　……②

①，②より　$a=3,\ b=6$

したがって，点 B の座標は　$(3,\ 6)$

問 15　直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 $\mathrm{A}(4,\ -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

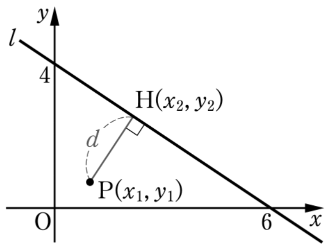
p.81 Training 8　p.104 Level Up 5

点と直線の距離

直線 l 上にない点 P から l に下ろした垂線 PH の長さを**点 P と直線 $\boldsymbol{l}$ の距離**という。

点 P の座標を $(x_1,\ y_1)$，直線 l の方程式を $2x+3y-12=0$ とするとき，点 P と直線 l の距離 d を求めてみよう。

点 H の座標を $(x_2,\ y_2)$ とおくと，垂直条件から　$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$



すなわち　$\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{y_2-y_1}{3}$

である。この値を k とおけば

$$x_2-x_1=2k,\qquad y_2-y_1=3k$$

すなわち　$x_2=x_1+2k,\ y_2=y_1+3k$　……①

また，点 H は直線 l 上にあるから $2x_2+3y_2-12=0$ である。

よって，①より　$2(x_1+2k)+3(y_1+3k)-12=0$

$$(2^2+3^2)k+(2x_1+3y_1-12)=0$$

これより　$k=-\frac{2x_1+3y_1-12}{2^2+3^2}$　……②

①，②より

$$\mathrm{PH}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(2k)^2+(3k)^2=(2^2+3^2)k^2$$

$$=(2^2+3^2)\cdot\frac{(2x_1+3y_1-12)^2}{(2^2+3^2)^2}=\frac{(2x_1+3y_1-12)^2}{2^2+3^2}$$

よって，求める距離は　$d=\mathrm{PH}=\frac{|\,2x_1+3y_1-12\,|}{\sqrt{2^2+3^2}}$

一般に，次のことが成り立つ。

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 14　点 $(-2,\ -1)$ と直線 $4x+3y+1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|\,4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+1\,|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

問 16　次の点と直線の距離を求めよ。

p.81 Training 9　p.104 Level Up 6

(1)　点 $(2,\ -3)$，直線 $x+2y+2=0$

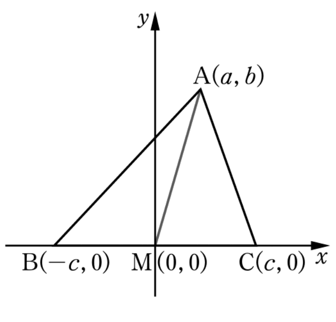
(2)　原点，直線 $4x-3y-5=0$

参考　中線定理

△ABC に関して，次の定理が成り立つ。

中線定理
△ABC の辺 BC の中点を M とすると $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

座標を利用して，中線定理を証明してみよう。



証明　M を原点，直線 BC を x 軸にとると，三角形の 3 つの頂点 A，B，C の座標はそれぞれ

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$

とおける。

このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2&=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}\\&=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)\\&=2(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)&=2\{(a^2+b^2)+c^2\}\\&=2(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

ゆえに　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$

Training

1　次の 2 点間の距離を求めよ。 p.68

(1)　$\mathrm{A}(4,\ -2)$，$\mathrm{B}(-5,\ 7)$　　(2)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ -8)$

2　2 点 $\mathrm{A}(-3,\ -2)$，$\mathrm{B}(4,\ 10)$ に対して，線分 AB を $2:5$ に内分する点 P，$2:5$ に外分する点 Q の座標を求めよ。 p.70

3　点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ に関して，点 $\mathrm{P}(2,\ 3)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。 p.70

4　3 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(-1,\ 5)$，$\mathrm{C}(2,\ 1)$ を頂点とする△ABC の重心 G の座標を求めよ。 p.71

5　次の 2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。 p.73

(1)　$\mathrm{A}(6,\ -1)$，$\mathrm{B}(-3,\ 5)$　　(2)　$\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 6)$

6　2 直線 $x+y+1=0$，$3x-y+7=0$ の交点と原点を通る直線の方程式を求めよ。 p.74

7　2 点 $\mathrm{A}(1,\ -3)$，$\mathrm{B}(7,\ 6)$ を通る直線を l とする。点 $\mathrm{C}(3,\ 4)$ を通り，l に平行な直線と，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。 p.77

8　直線 $2x+y+4=0$ に関して，点 $\mathrm{A}(-4,\ -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。 p.78

9　次の点と直線の距離を求めよ。 p.80

(1)　点 $(2,\ 4)$，直線 $2x-6y-5=0$

(2)　点 $(-7,\ 0)$，直線 $y=x+3$