数学 II　Standard　P.008

1 節　整式・分数式の計算

❶ 整式の乗法と因数分解

3 次式の乗法公式

2 次式の乗法公式については数学 I で学んだ。ここでは，3 次式の乗法公式と，それを用いた整式の展開について考えてみよう。

例 1　$(a+b)^3$ を展開してみよう。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)\\ &\qquad +b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2\\ &\qquad +a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrr} & a^2+2ab & +b^2 & \\ \times)\ a+b & & & \\ \hline a^3+2a^2b+ & ab^2 & & \\ & a^2b+2ab^2+b^3 & & \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & & & \end{array}$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式 (1)
[1]　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3$ [2]　$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$

問 1　公式 [2] が成り立つことを示せ。

例 2　(1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$

(2)　$(2x-y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$

$(a-b)^3=\ a^3\ -\ 3\cdot a^2\cdot b\ +\ 3\cdot a\cdot b^2-b^3$

$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

$\boxed{\text{問 2}}$　次の式を展開せよ。 p.21 Training 1 (1) (2)

(1)　$(x+1)^3$　　(2)　$(2x-1)^3$

(3)　$(x+3y)^3$　　(4)　$(3x-2y)^3$

$\boxed{\text{例 3}}$　$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開してみよう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\
&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\
&=a^3+b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & a^2 & -ab & +b^2 \\
\times) & a & +b & \\
\hline
 & a^3 & -a^2b & +ab^2 \\
 & & a^2b & -ab^2 & +b^3 \\
\hline
 & a^3 & & & +b^3
\end{array}
$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式 (2)

[3]　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$

[4]　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

$\boxed{\text{問 3}}$　公式 [4] が成り立つことを示せ。

$\boxed{\text{例 4}}$　(1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3$

$(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$

$=x^3+27$

(2)　$(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\cdot 5y+(5y)^2\}=(2x)^3-(5y)^3$

$(a-b)(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$

$=8x^3-125y^3$

$\boxed{\text{問 4}}$　次の式を展開せよ。 p.21 Training 1 (3) (4)

(1)　$(x+1)(x^2-x+1)$　　(2)　$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

(3)　$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$　　(4)　$(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$

3 次式の因数分解

乗法公式 [3]，[4] から，次の公式が成り立つ。

因数分解の公式
[1]　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$
[2]　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例 5　(1)　$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

(2)　$x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$a^3-\ b^3\ =(a-\ b)(a^2+\ a\cdot b\ +\ b^2)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

問 5　次の式を因数分解せよ。　p.21 Training 2　p.58 LevelUp 1

(1)　x^3-1　　(2)　x^3+125

(3)　x^3-27y^3　　(4)　$8x^3+y^3$

例題 1　因数分解

次の式を因数分解せよ。

x^6-1

考え方　$x^6=(x^3)^2$ より，$x^3=A$ とおくと $x^6-1=A^2-1$ と表される。

解　$x^3=A$ とおくと

$x^6-1=A^2-1=(A+1)(A-1)$

$=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)\times(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

問 6　次の式を因数分解せよ。　p.21 Training 3

(1)　a^6-b^6　　(2)　x^6+2x^3+1

❷　二項定理

パスカルの三角形

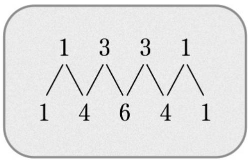
$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ を展開すると次のようになる。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$(a+b)^3$ の展開をもとに，$(a+b)^4$ を展開してみよう。

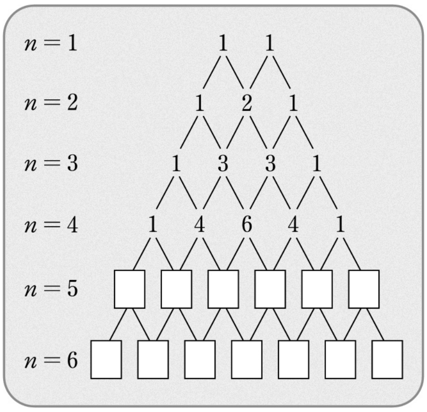
$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= 1a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 \\ &\qquad +1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

このように，$(a+b)^4$ の展開式において，両端の 1 以外の係数は，$(a+b)^3$ の展開式における隣り合った係数 1 と 3，3 と 3，3 と 1 のそれぞれの和として得られる。



問 7　$(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が $(a+b)^4$ の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求めて右のように並べたものを**パスカルの三角形**という。



問 8　右のパスカルの三角形で，$n=5$，$n=6$ の行の $\boxed{}$ をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$\boxed{\text{二項定理}}$

$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の係数は，パスカルの三角形から 4 である。これは，次のように考えることもできる。

$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の項は，4 個の因数

$$a+b, \quad a+b, \quad a+b, \quad a+b$$

から a，b のいずれかを，全体で a が 3 個，b が 1 個となるように取ることによって得られる。

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow aaab$

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow aaba$

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow abaa$

$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow baaa$

すなわち，4 個の因数から b を取る 1 個の因数を選ぶ選び方の数だけ a^3b の項ができる。

よって，$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の係数は

$${}_4\mathrm{C}_1 = \frac{4}{1} = 4$$

である。*

同様に考えて，$(a+b)^4$ の展開式における

$$a^4, \quad a^3b, \quad a^2b^2, \quad ab^3, \quad b^4$$

の係数は，それぞれ次のようになる。

$${}_4\mathrm{C}_0, \quad {}_4\mathrm{C}_1, \quad {}_4\mathrm{C}_2, \quad {}_4\mathrm{C}_3, \quad {}_4\mathrm{C}_4$$

したがって，$(a+b)^4$ の展開式は次のように表される。

$$(a+b)^4 = {}_4\mathrm{C}_0 a^4 + {}_4\mathrm{C}_1 a^3b + {}_4\mathrm{C}_2 a^2b^2 + {}_4\mathrm{C}_3 ab^3 + {}_4\mathrm{C}_4 b^4$$

一般に，次ページの**二項定理**が成り立つ。

---

*異なる n 個のものから r 個を取り出してつくった組合せを

n 個から r 個とる組合せ

といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。このとき，次の公式が成り立つ。

$${}_n\mathbf{C}_r = \frac{\overbrace{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}}^{\boldsymbol{r}\ \textbf{個}}}{\boldsymbol{r(r-1)(r-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{r!\,(n-r)!}}$$

ここで，$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ である。

ただし，$\mathbf{0! = 1}$，$\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_0 = 1}$ と定める。

二項定理
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = {}_n\mathrm{C}_0\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} + {}_n\mathrm{C}_1\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{b} + {}_n\mathrm{C}_2\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{b}^2 + \cdots \\ + {}_n\mathrm{C}_r\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-r}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{r}} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n-1}} + {}_n\mathrm{C}_n\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}\end{aligned}$$

例 6　$(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$
$= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

問 9　二項定理を用いて，$(a+b)^6$ を展開せよ。

二項定理により $(a+b)^n$ の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と表される。これを $(a+b)^n$ の展開式の**一般項**という。ただし，$a^0=1$，$b^0=1$ とする。また，${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**ともいう。

例題 2　二項定理
$(2a-b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数を求めよ。
解　$(2a-b)^5$ の展開式の一般項は ${}_5\mathrm{C}_r(2a)^{5-r}(-b)^r \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$ と表される。a^2b^3 の項は，$r=3$ の場合であるから ${}_5\mathrm{C}_3(2a)^2(-b)^3 = 10\cdot 2^2\cdot(-1)^3a^2b^3 = -40a^2b^3$ よって，a^2b^3 の係数は -40 である。

問 10　$(3a-2b)^4$ の展開式における a^3b の係数を求めよ。

p.21 Training 4　p.58 Level Up 2

例 7　二項定理において，$a=1$，$b=x$ とおくと

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1x + {}_n\mathrm{C}_2x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_rx^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nx^n$$

さらに，$x=1$ を代入すると，次の等式が得られる。

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

問 11　等式 $3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$ を示せ。

p.21 Training 5

Challenge　$\boxed{\text{例題}}$　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}$ の展開

$\boxed{\text{例題}}$

$(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　$\{(a+b)+c\}^5$ の展開式において $(a+b)^4c$ が現れるのは

$${}_5\mathrm{C}_1(a+b)^4c$$

←― a^2b^2c が現れるのはこの式のみ

であり，$(a+b)^4$ を展開したときの a^2b^2 の係数は ${}_4\mathrm{C}_2$ である。

したがって，a^2b^2c の係数は

$${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=30$$

上の例題は，次のように考えて解くこともできる。

$(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の項は 5 個の因数

$$a+b+c,\quad a+b+c,\quad a+b+c,\quad a+b+c,\quad a+b+c$$

から a, b, c のいずれかを，全体で a が 2 個，b が 2 個，c が 1 個となるように取ることによって得られる。

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\longrightarrow baacb$$

すなわち，a を 2 個，b を 2 個，c を 1 個並べる並べ方の数だけ a^2b^2c の項ができる。よって，$(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数は $\frac{5!}{2!2!1!}=30$ である。*

一般に，次のことが成り立つ。

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$\boldsymbol{\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r}\quad \text{ただし，}p+q+r=n$$

$\boxed{\text{問 1}}$ (1)　$(a+b+c)^6$ の展開式における $a^2b^2c^2$ の係数を求めよ。

(2)　$(a+2b+3c)^6$ の展開式における a^2b^3c の係数を求めよ。

---

*一般に，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものをすべて並べる並べ方の総数は $\frac{n!}{p!q!r!}$ である。

❸　整式の除法

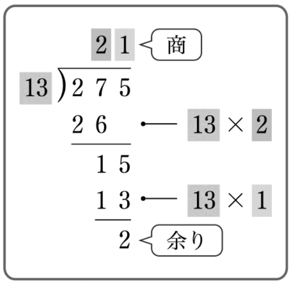
整式の除法

整数の割り算で，$275 \div 13$ を計算すると，商が 21，余りが 2 である。このとき

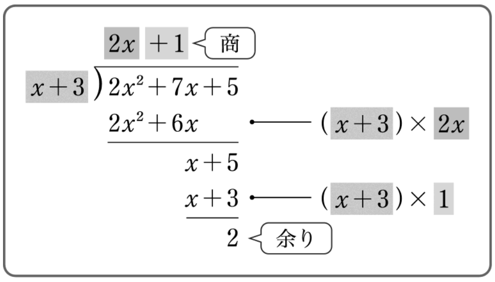
$275 = 13 \times 21 + 2$　　――割られる数＝割る数×商＋余り

が成り立っている。

同じような計算を整式で行うことを考えてみよう。



例 8　$A = 2x^2 + 7x + 5$，$B = x + 3$ のとき，A を B で割ると次のようになる。



最後の行に現れた 2 は，割る式 $x + 3$ よりも次数が低いので，これ以上計算を続けることができない。

このとき，$2x^2 + 7x + 5$ を $x + 3$ で割ったときの

商は $2x + 1$，**余り**は 2

であるという。上の割り算から

$A = B(2x + 1) + 2$　　……①　　――割られる式＝割る式×商＋余り

が成り立つことがわかる。

問 12　$A = 6x^2 - 5x + 1$ を $B = 3x - 4$ で割る計算をせよ。

また，例 8 にならって，A を①の形で表せ。

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$\boldsymbol{A = BQ + R}$　　　ただし，R の次数 $<$ B の次数

このような Q, R はただ 1 つ定まる。とくに，$R = 0$ となるとき，A は B で**割り切れる**といい，B は A の**因数**であるという。

例題 3　整式の除法[1]

次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 8$,　$B = x^2 - x - 3$

(2)　$A = 2x^3 + 4x^2 + 7$,　$B = 2x^2 - 3$

解

(1)

$$
\begin{array}{rl}
 & \ 2x \quad -5 \\
x^2-x-3 & \overline{)\,2x^3-7x^2+3x+\ 8} \\
 & \underline{\ 2x^3-2x^2-6x} \\
 & \qquad -5x^2+9x+\ 8 \\
 & \qquad \underline{-5x^2+5x+15} \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x-\ 7
\end{array}
$$

〈答〉 商 $2x - 5$,
余り $4x - 7$

(2)

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad x \quad +2 \\
2x^2\boxed{}-3 & \overline{)\,2x^3+4x^2\boxed{}+\ 7} \\
 & \underline{\ 2x^3\boxed{}-3x} \\
 & \qquad\quad 4x^2+3x+\ 7 \\
 & \qquad\quad \underline{4x^2\boxed{}-\ 6} \\
 & \qquad\qquad\qquad 3x+13
\end{array}
$$

← 項がないときはあけておく

〈答〉 商 $x + 2$,
余り $3x + 13$

注意　このような計算では，割る式も割られる式も，文字 x について降べきの順に整理しておくとよい。

問 13　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。　p.21 Training 6

(1)　$A = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 1$,　$B = x^2 + 3x - 2$

(2)　$A = x^3 - x^2 - 1$,　$B = x^2 + 2$

例題 4　整式の除法[2]

整式 x^3-3x^2-6x-2 をある整式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $3x-4$ である。整式 B を求めよ。

解

$x^3-3x^2-6x-2=B(x+2)+(3x-4)$

が成り立つから

$B(x+2)=(x^3-3x^2-6x-2)-(3x-4)$

$\qquad\qquad=x^3-3x^2-9x+2$

x^3-3x^2-9x+2 を $x+2$ で割って

$\qquad B=x^2-5x+1$

$$\begin{array}{rl} & x^2-5x+1 \\ x+2 & \overline{)\,x^3-3x^2-9x+2} \\ & \underline{x^3+2x^2} \\ & -5x^2-9x \\ & \underline{-5x^2-10x} \\ & x+2 \\ & \underline{x+2} \\ & 0 \end{array}$$

問 14　整式 $3x^3+14x^2-4x+5$ をある整式 B で割ると，商が $3x-1$，余りが $7x+3$ である。整式 B を求めよ。

p.21 Training 7

Challenge　例題　2 種類の文字を含む整式の除法

2 種類以上の文字を含む整式についても，その中の 1 つの文字に着目して，割り算を行うことができる。

例題

$A=2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3$，$B=x-2a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

$$\begin{array}{rl} & 2x^2-ax+4a^2 \\ x-2a & \overline{)\,2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3} \\ & \underline{2x^3-4ax^2} \\ & -ax^2+6a^2x \\ & \underline{-ax^2+2a^2x} \\ & 4a^2x-8a^3 \\ & \underline{4a^2x-8a^3} \\ & 0 \end{array}$$

〈答〉商 $2x^2-ax+4a^2$，

余り 0

問 1　$A=x^3-2ax^2-a^2x+2a^3$，$B=x-a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

❹　分数式とその計算

$\frac{1}{x}$，$\frac{x^2+2}{x^2-1}$ のように，$\frac{\text{整式}}{\text{1 次以上の整式}}$ の形で表される式を**分数式**という。整式と分数式を合わせて**有理式**という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。したがって，分母と分子に共通な因数があれば，**約分**することができる。それ以上約分できない分数式は**既約**であるという。

例 9　(1)　$\frac{4xy^2}{6x^3y}=\frac{2y}{3x^2}$

(2)　$\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$

問 15　次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1)　$\frac{3x^2y}{9xyz}$　　(2)　$\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$　　(3)　$\frac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}$

乗法・除法

分数式の乗法，除法は次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 10　$\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\frac{x+1}{x-2}$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+2}{x-3}$$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 16　次の式を計算せよ。 p.21 Training 8

(1) $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x} \times \dfrac{x+2}{x-7}$　　(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1} \div \dfrac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$

加法・減法

分母が等しい分数式の加法，減法は次のようにする。

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}},\qquad \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}-\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{C}}$$

例 11　$\dfrac{3}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{3-(x+1)}{x^2-4}=\dfrac{-x+2}{x^2-4}$

$$=\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{x+2}$$

問 17　次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x^2-x}+\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x}$　　(2) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

たとえば $\dfrac{2}{xy}$，$\dfrac{x}{y^2}$ は $\dfrac{2}{xy}=\dfrac{2\times y}{xy\times y}=\dfrac{2y}{xy^2}$，$\dfrac{x}{y^2}=\dfrac{x\times x}{y^2\times x}=\dfrac{x^2}{xy^2}$

$\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{3}{x+1}$ は $\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)}$，$\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{3x}{x(x+1)}$

のように，分母が同じ分数式になおすことができる。このように，いくつかの分数式の分母を同じにすることを**通分**するという。

分母が異なる分数式の加法，減法は，通分してから計算する。

例 12　$\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}-\dfrac{x+2}{(x+2)(2x+1)}$　← 通分する

$$=\frac{4x+2-(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$$

$$=\frac{3x}{(x+2)(2x+1)}$$

← 分母は展開しなくてもよい

問 18　次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}$　　(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2x-3}$

例題 5　分数式の計算

$\dfrac{x+4}{x^2-2x}-\dfrac{3}{x^2-3x+2}$ を計算せよ。

解 $\dfrac{x+4}{x^2-2x}-\dfrac{3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+4}{x(x-2)}-\dfrac{3}{(x-1)(x-2)}$

分母を因数分解する

$=\dfrac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}-\dfrac{3x}{x(x-1)(x-2)}$

通分する

$=\dfrac{(x+4)(x-1)-3x}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{x^2-4}{x(x-1)(x-2)}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{x+2}{x(x-1)}$

問 19　次の式を計算せよ。

p.21 Training 9

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$　　(2) $\dfrac{x-6}{x^2-9}+\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

(3) $\dfrac{x^3+8x}{x^2-x-2}-\dfrac{8}{x-2}$

分母や分子に分数式を含む式について考えてみよう。

例 13 $\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\div\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}\div\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$

注意　上の例 13 は，分母と分子に x を掛けて

右のように計算してもよい。　$\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}\times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{1}{x+1}$

問 20　次の式を簡単にせよ。

p.21 Training 10

(1) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}}$　　(2) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Training

1　次の式を展開せよ。 p.9

(1)　$(2x+3y)^3$　　(2)　$(4a-b)^3$

(3)　$(5x+2)(25x^2-10x+4)$　　(4)　$(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

2　次の式を因数分解せよ。 p.10

(1)　$27x^3+8y^3$　　(2)　a^3-64b^3

(3)　$ax^3+125ay^3$　　(4)　$8a^3b-27bc^3$

3　次の式を因数分解せよ。 p.10

(1)　$(a+b)^3+1$　　(2)　$(2x+y)^3-(2x-y)^3$

(3)　x^6+16x^3+64　　(4)　$a^6-7a^3b^3-8b^6$

4　次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。 p.13

(1)　$(x-3y)^7$ における x^5y^2　　(2)　$(3x^2+2)^6$ における x^2

5　次の等式が成り立つことを示せ。 p.13

$$ {}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n=0 $$

6　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。 p.16

(1)　$A=6x^3+7x^2-9x+2,\quad B=2x-1$

(2)　$A=x^3+2x^2+3,\quad B=x^2+4$

7　整式 $2x^3-8x+7$ をある整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $3x+1$ である。整式 B を求めよ。 p.17

8　次の式を計算せよ。 p.19

(1)　$\frac{6x+6}{x^2-4}\times\frac{x^3-8}{2x^2+2x}$　　(2)　$\frac{x^2-x}{x^2-2x-3}\div\frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15}\times\frac{x^2-1}{x}$

9　次の式を計算せよ。 p.20

(1)　$\frac{2x-1}{x^2-3x}-\frac{2x+1}{x^2+3x}$　　(2)　$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^3-1}$

10　次の式を簡単にせよ。 p.20

(1)　$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$　　(2)　$\frac{a+2}{a-\frac{2}{a+1}}$