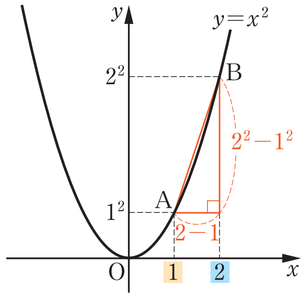
# 1 節 微分係数と導関数

## ❶ 平均変化率

2 次関数 $y = x^2$ について，$x$ が 1 から 2 まで変わるとき，$x$ の値の変化に対する $y$ の値の変化の割合を求めてみよう。




$x$ の変化量は　$2 - 1$

$y$ の変化量は　$2^2 - 1^2$

であるから，変化の割合は

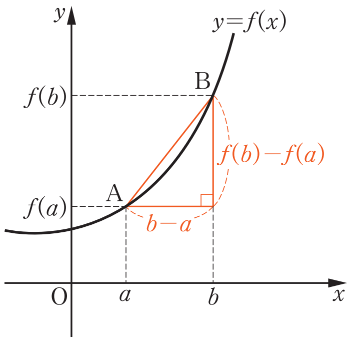
$$\frac{2^2-1^2}{2-1} = 3$$

この値は，グラフ上の 2 点 A(1, 1)，B(2, 4) を通る直線 AB の傾きを表している。

一般に，関数 $y = f(x)$ において，$x$ が $a$ から $b$ まで変わるとき，$x$ の変化量に対する $y$ の変化量の割合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \cdots\cdots ①$$

を，$x$ が $a$ から $b$ まで変わるときの関数 $f(x)$ の **平均変化率** という。

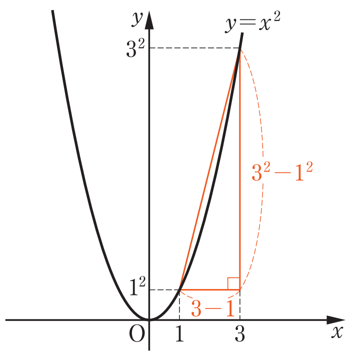



平均変化率 ① は，点 A$(a, f(a))$ と点 B$(b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きを表している。

**例 1**　関数 $f(x) = x^2$ について，$x$ が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2-1^2}{2}$$

$$= 4$$



**問 1**　次の関数について，$x$ が 2 から 4 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=2x+3$　　　(2)　$f(x)=-2x^2$

前ページの ① において，$b-a=h$ と置き換えると，$b=a+h$ より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

となるから，次のことが成り立つ。

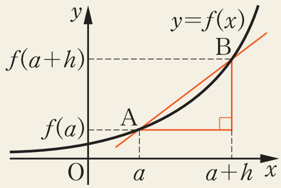
**平均変化率**

$x$ が

$a$ から $a+h$ まで変わる

ときの関数 $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$




**例 2**　関数 $f(x)=x^2+x$ について，$x$ が 1 から $1+h$ まで変わるときの平均変化率は

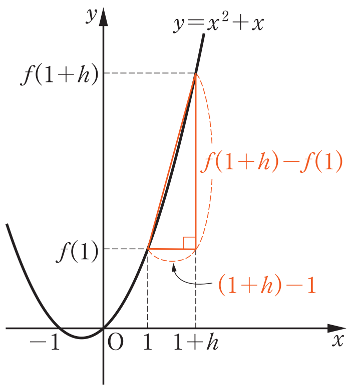
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{\{(1+h)^2+(1+h)\}-(1^2+1)}{h}$$

$$=\frac{3h+h^2}{h}$$

$$=\frac{h(3+h)}{h}$$

$$=3+h$$




**問 2**　関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。

(1)　$x$ が 1 から $1+h$ まで変わるとき

(2)　$x$ が $a$ から $a+h$ まで変わるとき

## 2 微分係数

関数 $f(x)=x^2$ において，$x$ が 2 から $2+h$ まで変わるとき，

平均変化率は $\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}=\dfrac{4h+h^2}{h}=\dfrac{h(4+h)}{h}=4+h$

である。ここで，$h$ の値を限りなく 0 に近づけると，この平均変化率は下の表からもわかるように 4 に限りなく近づく。

| $h$ | $\cdots$ | $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 0.001 | 0.01 | 0.1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4+h$ | $\cdots$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ | 4.001 | 4.01 | 4.1 | $\cdots$ |

この値 4 を $h$ が限りなく 0 に近づくときの $\dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}$ の **極限値** という。このことを，記号 lim を用いて次のように書く。*

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=4$$

一般に，関数 $f(x)$ の $x$ が $a$ から $a+h$ まで変わるときの平均変化率において，$h$ を限りなく 0 に近づけるときの極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が定まるならば，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す。

**微分係数の定義**

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

**例 3** 関数 $f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

**問 3** 関数 $f(x)=3x^2$ について，微分係数 $f'(1)$，$f'(-2)$ を求めよ。

p.192 Training 1　p.226 Level Up 1

* lim は極限を意味する limit に由来する記号であり，“リミット”と読む。

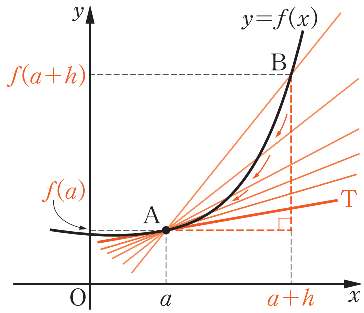
## 微分係数と接線の傾き

微分係数の意味を関数のグラフにおいて考えてみよう。

関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，$x$ 座標がそれぞれ $a$，$a+h$ である 2 点 A，B をとると，平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は直線 AB の傾きを表している。




いま，$h$ を限りなく 0 に近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

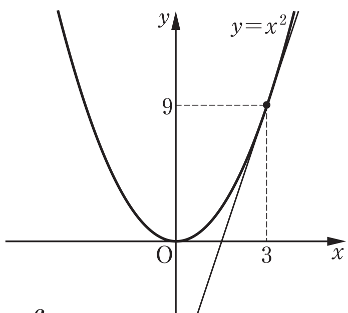
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AB は，点 A を通り傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線 $y=f(x)$ の **接線** といい，点 A を **接点** という。

### 微分係数と接線の傾き

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における **接線の傾き** は，**微分係数 $f'(a)$** に等しい。

**例 4**　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは，$f(x)=x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから




$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

**問 4**　放物線 $y=2x^2$ 上の点 $(-1,\ 2)$ における接線の傾きを求めよ。

## 3 導関数

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

である。この式で，$a$ の値を変えると，$f'(a)$ の値も変わる。

| $a$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |

すなわち，$a$ を変数とみなせば，微分係数 $f'(a)$ は $a$ の関数になる。

そこで，文字 $a$ を文字 $x$ で置き換えて得られる関数 $f'(x)=2x$ を関数 $f(x)=x^2$ の“導関数”という。

一般に，関数 $y=f(x)$ について，$x$ のおのおのの値 $a$ に微分係数 $f'(a)$ を対応させれば，1つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。

この関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の **導関数** という。

**導関数の定義**

$$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

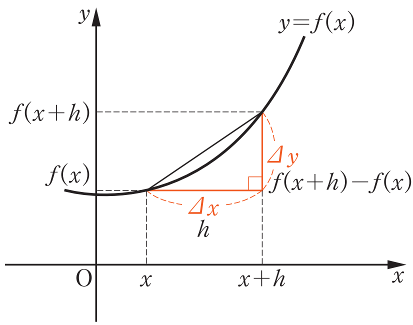
上の式において

$x$ の変化量 $h$ を $\Delta x$

$y$ の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を

$\Delta y$ で表す。$\Delta x$，$\Delta y$ をそれぞれ $x$ の増分，$y$ の増分という。*

$\Delta x$，$\Delta y$ の記号を用いて，導関数は次のように表すこともある。




$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

* $\Delta$はギリシャ文字で，“デルタ”と読む。

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

$$y',\qquad \frac{dy}{dx},\qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

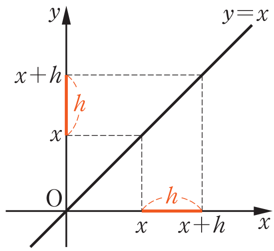
などの記号も用いられる。

$x$ の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を **$x$ で微分する**，または単に **微分する** という。

**例 5**　導関数の定義にしたがって，次の関数を微分してみよう。

(1)　$f(x)=x$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}1 = 1 \end{aligned}$$




(2)　$f(x)=x^3$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

関数を微分した結果を表すのに，次のように書くこともある。

$$(x)'=1 \qquad (x^3)'=3x^2$$

**問 5**　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=2x^2$ を微分せよ。

p.192 Training 2

# 4 導関数の計算

## $x^n$ の導関数

すでに学んだように，$x$，$x^2$，$x^3$ の導関数は次のようになる。

$$(x)' = 1, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad (x^3)' = 3x^2$$

一般に $n$ が正の整数のとき，次の公式が成り立つ。 p.191 参考

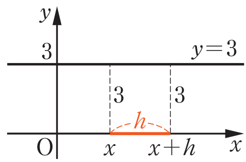
**$x^n$ の導関数**

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

## 定数関数の導関数

値が一定の関数を **定数関数** という。

定数関数 $y=3$ を微分してみよう。




$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

同様にして，定数関数 $y=c$ の導関数は次のようになる。

$$y' = (c)' = 0$$

**定数関数の導関数**

$c$ が定数のとき　　$(c)' = 0$

## 導関数の性質

まず，関数 $y=4x^2$ を微分してみよう。

$$y' = (4x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} = \lim_{h \to 0} 4\left\{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4\left(\frac{2xh+h^2}{h}\right) = \lim_{h \to 0} 4(2x+h)$$

$$= 4 \cdot 2x = 8x$$

$(x^2)' = 2x$ であるから　　$(4x^2)' = 4(x^2)'$

次に，関数 $y=x^2+x$ を微分してみよう。

$$y'=(x^2+x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+\frac{(x+h)-x}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{2xh+h^2}{h}+\frac{h}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(2x+h)+1\}=2x+1$$

$(x^2)'=2x$，$(x)'=1$ であるから

$$(x^2+x)'=(x^2)'+(x)'$$

が成り立つ。同様に考えて

$$(x^2-x)'=(x^2)'-(x)'$$

が成り立つことがわかる。

一般に，関数の定数倍および和，差の導関数については，次のことが成り立つ。

**定数倍，和，差の導関数**

[1]　$k$ が定数のとき　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$

[2]　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

[3]　$\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

**例 6**　上の性質を用いて，関数 $y=x^3+2x^2-3$ を微分してみよう。

$$y'=(x^3+2x^2-3)'$$

$$=(x^3)'+(2x^2)'-(3)' \qquad \text{←── 性質 [2]，[3]}$$

$$=(x^3)'+2(x^2)'-(3)' \qquad \text{←── 性質 [1]}$$

$$=3x^2+2\cdot 2x-0=3x^2+4x$$

**問 6**　次の関数を微分せよ。　p.192 Training 3

(1)　$y=2x+3$　　(2)　$y=x^2+4x+6$

(3)　$y=-2x^3-5x^2+7x-8$　　(4)　$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+1$

**例題 1** 導関数の計算

関数 $y=(x+2)(3x-1)$ を微分せよ。

**解** $y=3x^2+5x-2$ であるから ←展開してから微分する

$$y'=(3x^2+5x-2)'=3(x^2)'+5(x)'-(2)'$$
$$=3\cdot 2x+5\cdot 1-0=6x+5$$

**問 7** 次の関数を微分せよ。 p.192 Training 4

(1) $y=x(3-4x)$ (2) $y=(x-2)(2x+3)$

(3) $y=(2x+1)(2x-1)$ (4) $y=x(x+1)^2$

これまでは，おもに $x$ の関数を微分することを考えてきたが，$x$ 以外の文字を変数とする関数の微分についても同様である。

**例 7** $r$ の関数 $S=\pi r^2$ を $r$ で微分して得られる導関数 $\dfrac{dS}{dr}$ は

$$\frac{dS}{dr}=\pi(r^2)'=\pi\cdot 2r=2\pi r$$

**問 8** 次の関数を〔 〕内の文字で微分せよ。

(1) $h=10t-5t^2$ 〔 $t$ 〕 (2) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 〔 $r$ 〕

## 微分係数の計算

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がわかっているときには，$f'(x)$ の $x$ に $a$ を代入すれば，微分係数 $f'(a)$ を求めることができる。

**例 8** 関数 $f(x)=x^2-3x-4$ について，$x=-2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求めてみよう。

$f(x)$ を微分すると $f'(x)=2x-3$

よって $f'(-2)=2\cdot(-2)-3=-7$

**問 9** 関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$x=1$，$x=2$，$x=-3$ における微分係数をそれぞれ求めよ。 p.192 Training 5

**例 9**　関数 $f(x)=3x^2+ax-1$ が，$f'(-1)=2$ を満たすとき，定数 $a$ の値を求めてみよう。

$f(x)$ を $x$ で微分すると

$$f'(x)=6x+a$$

であるから　$f'(-1)=-6+a$

$f'(-1)=2$ より　$-6+a=2$

よって　$a=8$

**問 10**　関数 $f(x)=ax^3-x^2+2ax+3$ が，$f'(2)=3$ を満たすとき，定数 $a$ の値を求めよ。

p.192 Training 6　p.226 Level Up 2

## 参考　$n$ 次関数の微分

188 ページで示した次の公式が，すべての正の整数 $n$ について成り立つことを証明してみよう。

**$x^n$ の導関数**

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

二項定理により

$$(x+h)^n=x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+h^n$$
$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n$$

右辺の $x^n$ を左辺に移項して，両辺を $h$ で割ると

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}$$

したがって

$$(x^n)'=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right\}$$
$$=nx^{n-1}$$

## Training トレーニング

**1**　関数 $f(x)=-3x^2+4x$ について，次の問に答えよ。 p.184

(1)　$x$ が $-1$ から $-1+h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(2)　(1) の結果を利用して，微分係数 $f'(-1)$ を求めよ。

**2**　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=3x^2+2x$ を微分せよ。 p.187

**3**　次の関数を微分せよ。 p.189

(1)　$y=4x-5$　　(2)　$y=-2x^2+3x+1$

(3)　$y=x^3+3x^2-1$　　(4)　$y=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-2x+5$

**4**　次の関数を微分せよ。 p.190

(1)　$y=(4x-3)(x^2+2x+6)$

(2)　$y=(2x+3)^3$

**5**　次の関数の導関数を求め，〔　〕内に示した $x$ の値における微分係数を求めよ。 p.190

(1)　$f(x)=x^2+2x+2$　　〔$x=-2$〕

(2)　$f(x)=-x^3+3x-4$　　$\left[x=\dfrac{1}{2}\right]$

**6**　関数 $f(x)=ax^2-7x+b$ が，$f(1)=1$，$f'(1)=-1$ を満たすとき，定数 $a$，$b$ の値を求めよ。 p.191

**7**　次のことを証明せよ。ただし，$a$，$b$ は定数とする。

(1)　$y=(ax+b)^2$ ならば　$y'=2a(ax+b)$

(2)　$y=(ax+b)^3$ ならば　$y'=3a(ax+b)^2$ *

---

* $y=(ax+b)^n$ で表される関数の導関数については，次の公式が成り立つ。

$y=(ax+b)^n$　ならば　$y'=an(ax+b)^{n-1}$

ただし，$a$，$b$ は定数で，$n$ は正の整数とする。