

1 節 微分係数と導関数

1 平均変化率

2次関数 $y = x^2$ について、 x が 1 から 2 まで変わるとき、 x の値の変化に対する y の値の変化の割合を求めてみよう。

$$x \text{ の変化量は } 2 - 1$$

$$y \text{ の変化量は } 2^2 - 1^2$$

であるから、変化の割合は

$$\frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$$

この値は、グラフ上の2点 A(1, 1)、B(2, 4) を通る直線 AB の傾きを表している。

一般に、関数 $y = f(x)$ において、 x が a から b まで変わるとき、 x の変化量に対する y の変化量の割合

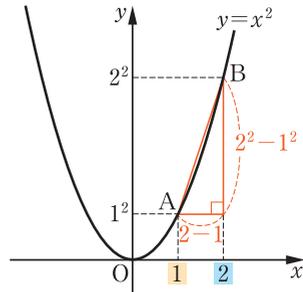
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を、 x が a から b まで変わるとき関数 $f(x)$ の **平均変化率** という。

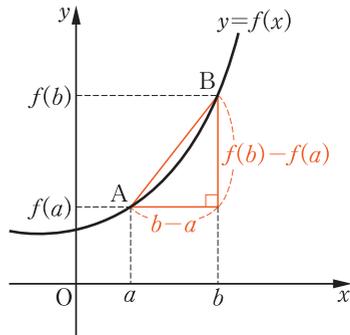
平均変化率 $\textcircled{1}$ は、点 A($a, f(a)$) と点 B($b, f(b)$) を結ぶ直線の傾きを表している。

例 1 関数 $f(x) = x^2$ について、 x が 1 から 3 まで変わるとき平均変化率は

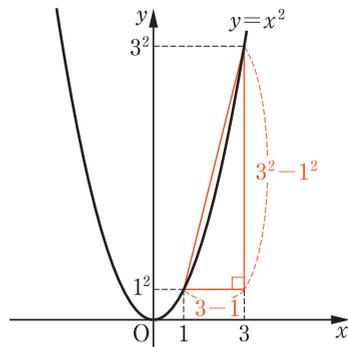
$$\begin{aligned} \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{3^2 - 1^2}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$



5



15



20

問1 次の関数について、 x が2から4まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1) $f(x) = 2x + 3$

(2) $f(x) = -2x^2$

前ページの①において、 $b - a = h$ と置き換えると、 $b = a + h$ より

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

5 となるから、次のことが成り立つ。

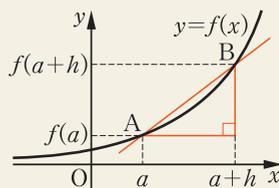
平均変化率

x が

a から $a + h$ まで変わる

ときの関数 $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



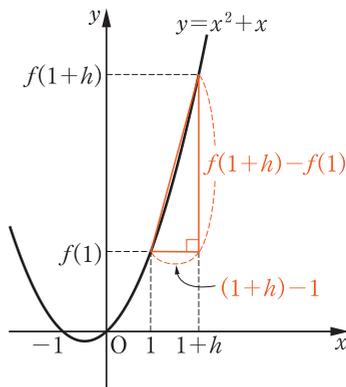
例2

関数 $f(x) = x^2 + x$ について、

x が1から $1 + h$ まで変わると

ときの平均変化率は

$$\begin{aligned} & \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{\{(1 + h)^2 + (1 + h)\} - \{1^2 + 1\}}{h} \\ &= \frac{3h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(3 + h)}{h} \\ &= 3 + h \end{aligned}$$



問2

関数 $f(x) = x^2 - 4x$ について、次のときの平均変化率を求めよ。

(1) x が1から $1 + h$ まで変わるとき

(2) x が a から $a + h$ まで変わるとき

2 微分係数

関数 $f(x) = x^2$ において、 x が 2 から $2+h$ まで変わるとき、
平均変化率は $\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h$

である。ここで、 h の値を限りなく 0 に近づけると、この平均変化率は
下の表からもわかるように 4 に限りなく近づく。

h	...	-0.1	-0.01	-0.001	...	0	...	0.001	0.01	0.1	...
$4+h$...	3.9	3.99	3.999	...	4	...	4.001	4.01	4.1	...

この値 4 を h が限りなく 0 に近づくときの $\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ の **極限值** とい
う。このことを、記号 \lim を用いて次のように書く。*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4$$

一般に、関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率に
おいて、 h を限りなく 0 に近づけるときの極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
が定まるならば、この値を関数 $f(x)$ の $x = a$ における **微分係数** といい、
 $f'(a)$ で表す。

微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

例 3 関数 $f(x) = x^2$ の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \end{aligned}$$

問 3 関数 $f(x) = 3x^2$ について、微分係数 $f'(1)$ 、 $f'(-2)$ を求めよ。

[p.192 Training 1](#)、[p.226 LevelUp 1](#)

* \lim は極限を意味する limit に由来する記号であり、“リミット”と読む。

微分係数と接線の傾き

微分係数の意味を関数のグラフにおいて考えてみよう。

関数 $y = f(x)$ のグラフ上に、 x 座標がそれぞれ a , $a+h$ である 2 点 A, B をとると、平均変化率

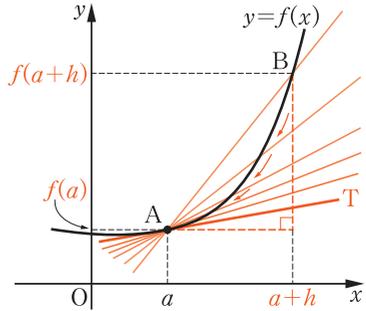
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は直線 AB の傾きを表している。

いま、 h を限りなく 0 に近づけると、点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

であるから、直線 AB は、点 A を通り傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線 $y = f(x)$ の **接線** といい、点 A を **接点** という。

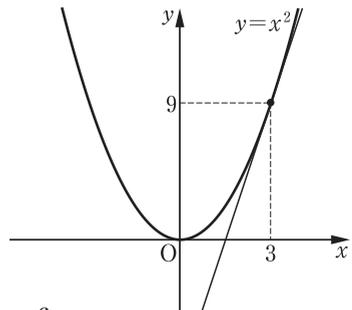


微分係数と接線の傾き

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における **接線の傾き** は、**微分係数 $f'(a)$** に等しい。

例 4 放物線 $y = x^2$ 上の点 $(3, 9)$ における接線の傾きは、 $f(x) = x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \end{aligned}$$



問 4 放物線 $y = 2x^2$ 上の点 $(-1, 2)$ における接線の傾きを求めよ。

3 導関数

関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$$

である。この式で、 a の値を変えると、 $f'(a)$ の値も変わる。

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

すなわち、 a を変数とみなせば、微分係数 $f'(a)$ は a の関数になる。

5

そこで、文字 a を文字 x で置き換えて得られる関数 $f'(x) = 2x$ を関数 $f(x) = x^2$ の“導関数”という。

一般に、関数 $y = f(x)$ について、 x のおおよその値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させれば、1つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。

この関数 $f'(x)$ を、 $f(x)$ の **導関数** という。

10

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

上の式において

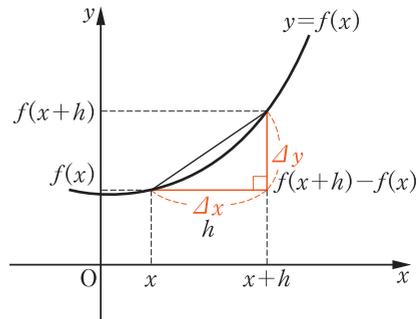
x の変化量 h を Δx

y の変化量 $f(x+h) - f(x)$ を Δy で表す。 Δx 、 Δy をそれぞれ x の増分、 y の増分という。*

Δx 、 Δy の記号を用いて、導関数は次のように表すこともある。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

20



15

* Δ はギリシャ文字で、“デルタ”と読む。

関数 $y = f(x)$ の導関数を表すには、 $f'(x)$ のほかに

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

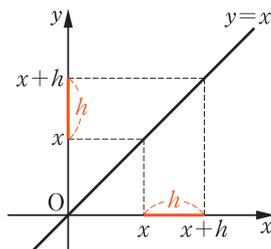
などの記号も用いられる。

x の関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を x で微分する、または単に **微分する** という。

例 5 導関数の定義にしたがって、次の関数を微分してみよう。

(1) $f(x) = x$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$



(2) $f(x) = x^3$ について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

関数を微分した結果を表すのに、次のように書くこともある。

$$(x)' = 1 \quad (x^3)' = 3x^2$$

問 5 導関数の定義にしたがって、関数 $f(x) = 2x^2$ を微分せよ。

4 導関数の計算

x^n の導関数

すでに学んだように、 x 、 x^2 、 x^3 の導関数は次のようになる。

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

一般に n が正の整数のとき、次の公式が成り立つ。

— p.191 参考

5

x^n の導関数

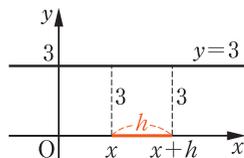
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

定数関数の導関数

値が一定の関数を **定数関数** という。

定数関数 $y = 3$ を微分してみよう。

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$



10

同様に、定数関数 $y = c$ の導関数は次のようになる。

$$y' = (c)' = 0$$

定数関数の導関数

$$c \text{ が定数のとき} \quad (c)' = 0$$

15

導関数の性質

まず、関数 $y = 4x^2$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (4x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 \left\{ \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4 \left(\frac{2xh + h^2}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} 4(2x + h) \\ &= 4 \cdot 2x = 8x \end{aligned}$$

20

$(x^2)' = 2x$ であるから

$$(4x^2)' = 4(x^2)'$$

次に、関数 $y = x^2 + x$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 + (x+h)\} - (x^2 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{(x+h) - x}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2xh + h^2}{h} + \frac{h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{(2x + h) + 1\} = 2x + 1 \end{aligned}$$

$(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$ であるから

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'$$

が成り立つ。同様に考えて

$$(x^2 - x)' = (x^2)' - (x)'$$

10 が成り立つことがわかる。

一般に、関数の定数倍および和、差の導関数については、次のことが成り立つ。

定数倍、和、差の導関数

$$[1] \quad k \text{ が定数のとき} \quad \{kf(x)\}' = kf'(x)$$

$$[2] \quad \{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$[3] \quad \{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

例 6 上の性質を用いて、関数 $y = x^3 + 2x^2 - 3$ を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 + 2x^2 - 3)' \\ &= (x^3)' + (2x^2)' - (3)' && \text{—— 性質 [2], [3]} \\ &= (x^3)' + 2(x^2)' - (3)' && \text{—— 性質 [1]} \\ &= 3x^2 + 2 \cdot 2x - 0 = 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

問 6 次の関数を微分せよ。

p.192 Training 3

(1) $y = 2x + 3$

(2) $y = x^2 + 4x + 6$

(3) $y = -2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$

(4) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

1 関数 $y = (x+2)(3x-1)$ を微分せよ。

解 $y = 3x^2 + 5x - 2$ であるから —— 展開してから微分する

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 + 5x - 2)' = 3(x^2)' + 5(x)' - (2)' \\ &= 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0 = 6x + 5 \end{aligned}$$

5

問 7 次の関数を微分せよ。 p.192 Training 4、

- (1) $y = x(3-4x)$ (2) $y = (x-2)(2x+3)$
 (3) $y = (2x+1)(2x-1)$ (4) $y = x(x+1)^2$

これまでは、おもに x の関数を微分することを考えてきたが、 x 以外の文字を変数とする関数の微分についても同様である。

10

例 7 r の関数 $S = \pi r^2$ を r で微分して得られる導関数 $\frac{dS}{dr}$ は

$$\frac{dS}{dr} = \pi(r^2)' = \pi \cdot 2r = 2\pi r$$

問 8 次の関数を〔 〕内の文字で微分せよ。

- (1) $h = 10t - 5t^2$ 〔 t 〕 (2) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 〔 r 〕

微分係数の計算

15

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がわかっているときには、 $f'(x)$ の x に a を代入すれば、微分係数 $f'(a)$ を求めることができる。

例 8 関数 $f(x) = x^2 - 3x - 4$ について、 $x = -2$ における微分係数 $f'(-2)$ を求めてみよう。

$$f(x) \text{ を微分すると } f'(x) = 2x - 3$$

$$\text{よって } f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$$

20

問 9 関数 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ について、 $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$ における微分係数をそれぞれ求めよ。 p.192 Training 5、

例 9 関数 $f(x) = 3x^2 + ax - 1$ が、 $f'(-1) = 2$ を満たすとき、定数 a の値を求めてみよう。

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = 6x + a$$

であるから $f'(-1) = -6 + a$

$$f'(-1) = 2 \text{ より } -6 + a = 2$$

よって $a = 8$

問 10 関数 $f(x) = ax^3 - x^2 + 2ax + 3$ が、 $f'(2) = 3$ を満たすとき、定数 a の値を求めよ。
p.192 Training 6、 p.226 LevelUp 2、

参考

n 次関数の微分

188 ページで示した次の公式が、すべての正の整数 n について成り立つことを証明してみよう。

x^n の導関数

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

二項定理により

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= x^n + {}_n C_1 x^{n-1} h + {}_n C_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} x h^{n-1} + h^n \\ &= x^n + nx^{n-1} h + \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} h^2 + \cdots + nx h^{n-1} + h^n \end{aligned}$$

右辺の x^n を左辺に移項して、両辺を h で割ると

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} h + \cdots + nx h^{n-2} + h^{n-1}$$

したがって

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} h + \cdots + nx h^{n-2} + h^{n-1} \right\} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

