

# 1 節 微分係数と導関数

## 1 平均変化率

2 次関数  $y = x^2$  について、 $x$  が 1 から 2 まで変わるとき、 $x$  の値の変化に対する  $y$  の値の変化の割合を求めてみよう。

$x$  の変化量は  $2 - 1$

$y$  の変化量は  $2^2 - 1^2$

であるから、変化の割合は

$$\frac{2^2 - 1^2}{2 - 1} = 3$$

この値は、グラフ上の 2 点 A(1, 1), B(2, 4) を通る直線 AB の傾きを表している。

一般に、関数  $y = f(x)$  において、 $x$  が  $a$  から  $b$  まで変わるとき、 $x$  の変化量に対する  $y$  の変化量の割合

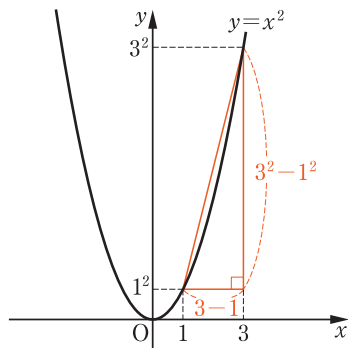
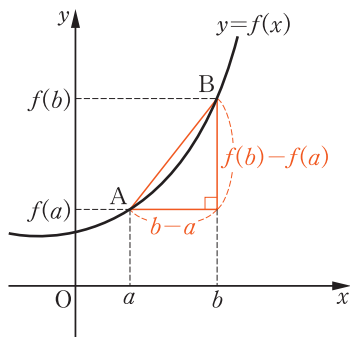
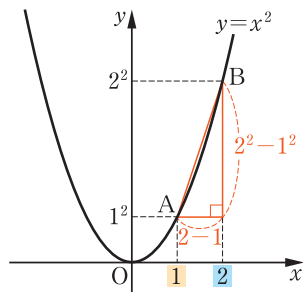
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を、 $x$  が  $a$  から  $b$  まで変わるとき関数  $f(x)$  の **平均変化率** という。

平均変化率 ① は、点 A( $a, f(a)$ ) と点 B( $b, f(b)$ ) を結ぶ直線の傾きを表している。

**例 1** 関数  $f(x) = x^2$  について、 $x$  が 1 から 3 まで変わるとき平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} &= \frac{3^2 - 1^2}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$



問 1 次の関数について、 $x$ が2から4まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)  $f(x) = 2x + 3$

(2)  $f(x) = -2x^2$

前ページの①において、 $b - a = h$  と置き換えると、 $b = a + h$  より

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

となるから、次のことが成り立つ。

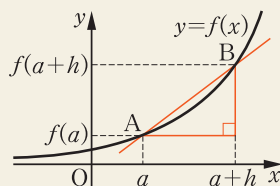
### 平均変化率

$x$ が

$a$ から $a + h$ まで変わる

ときの関数  $f(x)$  の平均変化率は

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



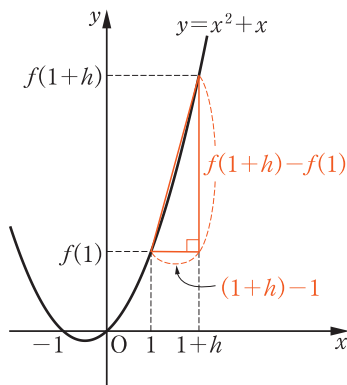
### 例 2

関数  $f(x) = x^2 + x$  について、

$x$ が1から $1 + h$ まで変わると

ときの平均変化率は

$$\begin{aligned} & \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{\{(1 + h)^2 + (1 + h)\} - (1^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{3h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(3 + h)}{h} \\ &= 3 + h \end{aligned}$$



### 問 2

関数  $f(x) = x^2 - 4x$  について、次のときの平均変化率を求めよ。

(1)  $x$ が1から $1 + h$ まで変わるとき

(2)  $x$ が $a$ から $a + h$ まで変わるとき

## 2 微分係数

関数  $f(x) = x^2$  において、 $x$  が 2 から  $2+h$  まで変わるとき、

$$\text{平均変化率は } \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h$$

である。ここで、 $h$  の値を限りなく 0 に近づけると、この平均変化率は下の表からもわかるように 4 に限りなく近づく。

$h$	...	-0.1	-0.01	-0.001	...	0	...	0.001	0.01	0.1	...
$4+h$	...	3.9	3.99	3.999	...	4	...	4.001	4.01	4.1	...

5

この値 4 を  $h$  が限りなく 0 に近づくときの  $\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$  の **極限值** といふ。このことを、記号  $\lim$  を用いて次のように書く。\*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4$$

一般に、関数  $f(x)$  の  $x$  が  $a$  から  $a+h$  まで変わるときに平均変化率において、 $h$  を限りなく 0 に近づけるときの極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が定まるならば、この値を関数  $f(x)$  の  $x = a$  における **微分係数** といい、 $f'(a)$  で表す。

10

### 微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**例 3** 関数  $f(x) = x^2$  の  $x = 1$  における微分係数  $f'(1)$  は

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2 \end{aligned}$$

15

**問 3** 関数  $f(x) = 3x^2$  について、微分係数  $f'(1)$ 、 $f'(-2)$  を求めよ。

p.192 Training 1、p.226 LevelUp 1

\*  $\lim$  は極限を意味する limit に由来する記号であり、“リミット”と読む。

20

## 微分係数と接線の傾き

微分係数の意味を関数のグラフにおいて考えてみよう。

関数  $y = f(x)$  のグラフ上に、 $x$  座標がそれぞれ  $a$ ,  $a+h$  である 2 点 A, B をとると、平均変化率

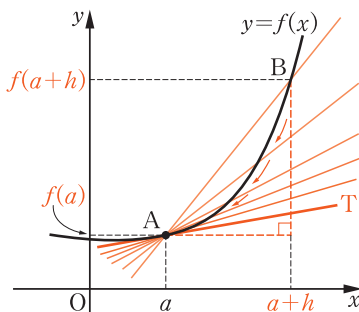
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は直線 AB の傾きを表している。

いま、 $h$  を限りなく 0 に近づけると、点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

であるから、直線 AB は、点 A を通り傾き  $f'(a)$  の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線  $y = f(x)$  の **接線** といい、点 A を **接点** という。

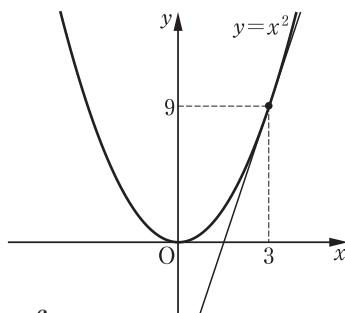


## 微分係数と接線の傾き

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における **接線の傾き** は、**微分係数  $f'(a)$**  に等しい。

**例 4** 放物線  $y = x^2$  上の点  $(3, 9)$  における接線の傾きは、 $f(x) = x^2$  とおくと  $f'(3)$  に等しいから

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \end{aligned}$$



**問 4** 放物線  $y = 2x^2$  上の点  $(-1, 2)$  における接線の傾きを求めよ。

### 3 導関数

関数  $f(x) = x^2$  の  $x = a$  における微分係数  $f'(a)$  は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$$

である。この式で、 $a$  の値を変えると、 $f'(a)$  の値も変わる。

$a$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

すなわち、 $a$  を変数とみなせば、微分係数  $f'(a)$  は  $a$  の関数になる。

5

そこで、文字  $a$  を文字  $x$  で置き換えて得られる関数  $f'(x) = 2x$  を関数  $f(x) = x^2$  の“導関数”という。

一般に、関数  $y = f(x)$  について、 $x$  のおのこの値  $a$  に微分係数  $f'(a)$  を対応させれば、1つの新しい関数  $f'(x)$  が得られる。

この関数  $f'(x)$  を、 $f(x)$  の **導関数** という。

10

#### 導関数の定義

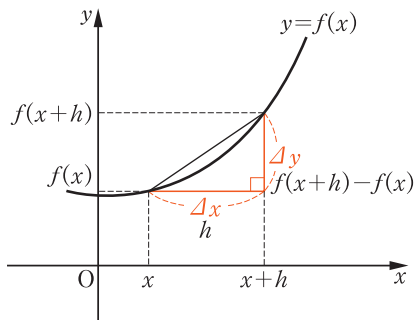
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

上の式において

$x$  の変化量  $h$  を  $\Delta x$

$y$  の変化量  $f(x+h) - f(x)$  を  $\Delta y$  で表す。 $\Delta x$ 、 $\Delta y$  をそれぞれ  $x$  の増分、 $y$  の増分という。\*

$\Delta x$ 、 $\Delta y$  の記号を用いて、導関数は次のように表すこともある。



15

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

20

\*  $\Delta$  はギリシャ文字で、“デルタ”と読む。

関数  $y = f(x)$  の導関数を表すには、 $f'(x)$  のほかに

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x)$$

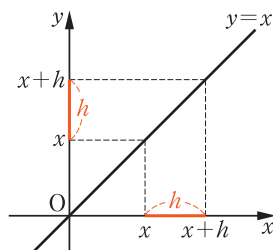
などの記号も用いられる。

$x$  の関数  $f(x)$  から、その導関数  $f'(x)$  を求めることを、 $f(x)$  を  $x$  で微分する、または単に **微分する** という。

**例 5** 導関数の定義にしたがって、次の関数を微分してみよう。

(1)  $f(x) = x$  について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$



(2)  $f(x) = x^3$  について

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

関数を微分した結果を表すのに、次のように書くこともある。

$$(x)' = 1 \quad (x^3)' = 3x^2$$

**問 5** 導関数の定義にしたがって、関数  $f(x) = 2x^2$  を微分せよ。

## 4 導関数の計算

### $x^n$ の導関数

すでに学んだように、 $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  の導関数は次のようになる。

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

一般に  $n$  が正の整数のとき、次の公式が成り立つ。

— p.191 参考

5

### $x^n$ の導関数

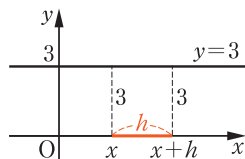
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

### 定数関数の導関数

値が一定の関数を **定数関数** という。

定数関数  $y = 3$  を微分してみよう。

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$



10

同様に、定数関数  $y = c$  の導関数は次のようになる。

$$y' = (c)' = 0$$

### 定数関数の導関数

$c$  が定数のとき

$$(c)' = 0$$

15

### 導関数の性質

まず、関数  $y = 4x^2$  を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (4x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 4 \left\{ \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4 \left( \frac{2xh + h^2}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} 4(2x + h) \\ &= 4 \cdot 2x = 8x \end{aligned}$$

20

$(x^2)' = 2x$  であるから

$$(4x^2)' = 4(x^2)'$$

次に、関数  $y = x^2 + x$  を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 + (x+h)\} - (x^2 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{(x+h) - x}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{2xh + h^2}{h} + \frac{h}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{(2x + h) + 1\} = 2x + 1 \end{aligned}$$

$(x^2)' = 2x$ ,  $(x)' = 1$  であるから

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'$$

が成り立つ。同様に考えて

$$(x^2 - x)' = (x^2)' - (x)'$$

が成り立つことがわかる。

一般に、関数の定数倍および和、差の導関数については、次のことが成り立つ。

### 定数倍、和、差の導関数

$$[1] \quad k \text{ が定数のとき} \quad \{kf(x)\}' = kf'(x)$$

$$[2] \quad \{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$[3] \quad \{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

**例 6** 上の性質を用いて、関数  $y = x^3 + 2x^2 - 3$  を微分してみよう。

$$\begin{aligned} y' &= (x^3 + 2x^2 - 3)' \\ &= (x^3)' + (2x^2)' - (3)' && \text{—— 性質 [2], [3]} \\ &= (x^3)' + 2(x^2)' - (3)' && \text{—— 性質 [1]} \\ &= 3x^2 + 2 \cdot 2x - 0 = 3x^2 + 4x \end{aligned}$$

**問 6** 次の関数を微分せよ。

p.192 Training 3

$$(1) \quad y = 2x + 3$$

$$(2) \quad y = x^2 + 4x + 6$$

$$(3) \quad y = -2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$$



1 関数  $y = (x+2)(3x-1)$  を微分せよ。

解  $y = 3x^2 + 5x - 2$  であるから —— 展開してから微分する

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 + 5x - 2)' = 3(x^2)' + 5(x)' - (2)' \\ &= 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0 = 6x + 5 \end{aligned}$$

5

問 7 次の関数を微分せよ。

p.192 Training 4、

$$(1) y = x(3-4x) \qquad (2) y = (x-2)(2x+3)$$

$$(3) y = (2x+1)(2x-1) \qquad (4) y = x(x+1)^2$$

これまでは、おもに  $x$  の関数を微分することを考えてきたが、 $x$  以外の文字を変数とする関数の微分についても同様である。

10

例 7  $r$  の関数  $S = \pi r^2$  を  $r$  で微分して得られる導関数  $\frac{dS}{dr}$  は

$$\frac{dS}{dr} = \pi(r^2)' = \pi \cdot 2r = 2\pi r$$

問 8 次の関数を〔 〕内の文字で微分せよ。

$$(1) h = 10t - 5t^2 \quad [t] \qquad (2) V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad [r]$$

## 微分係数の計算

15

関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  がわかっているときには、 $f'(x)$  の  $x$  に  $a$  を代入すれば、微分係数  $f'(a)$  を求めることができる。

例 8 関数  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  について、 $x = -2$  における微分係数  $f'(-2)$  を求めてみよう。

$$f(x) \text{ を微分すると } f'(x) = 2x - 3$$

$$\text{よって } f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$$

20

問 9 関数  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  について、 $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = -3$  における微分係数をそれぞれ求めよ。

p.192 Training 5、

**例 9** 関数  $f(x) = 3x^2 + ax - 1$  が、 $f'(-1) = 2$  を満たすとき、定数  $a$  の値を求めてみよう。

$f(x)$  を  $x$  で微分すると

$$f'(x) = 6x + a$$

であるから  $f'(-1) = -6 + a$

$$f'(-1) = 2 \text{ より } -6 + a = 2$$

よって  $a = 8$

**問 10** 関数  $f(x) = ax^3 - x^2 + 2ax + 3$  が、 $f'(2) = 3$  を満たすとき、定数  $a$  の値を求めよ。  
[p.192 Training 6](#) [p.226 Level Up 2](#)



### $n$ 次関数の微分

188 ページで示した次の公式が、すべての正の整数  $n$  について成り立つことを証明してみよう。

### $x^n$ の導関数

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

二項定理により

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= x^n + {}_nC_1x^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}xh^{n-1} + h^n \\ &= x^n + nx^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n \end{aligned}$$

右辺の  $x^n$  を左辺に移項して、両辺を  $h$  で割ると

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

したがって

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right\} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

1 関数  $f(x) = -3x^2 + 4x$  について、次の間に答えよ。 p.184

(1)  $x$  が  $-1$  から  $-1+h$  まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(2) (1) の結果を利用して、微分係数  $f'(-1)$  を求めよ。

2 導関数の定義にしたがって、関数  $f(x) = 3x^2 + 2x$  を微分せよ。 p.187

3 次の関数を微分せよ。 p.189

(1)  $y = 4x - 5$

(2)  $y = -2x^2 + 3x + 1$

(3)  $y = x^3 + 3x^2 - 1$

(4)  $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5$

4 次の関数を微分せよ。 p.190

(1)  $y = (4x - 3)(x^2 + 2x + 6)$

(2)  $y = (2x + 3)^3$

5 次の関数の導関数を求め、[ ]内に示した  $x$  の値における微分係数を求めよ。 p.190

(1)  $f(x) = x^2 + 2x + 2$        $[x = -2]$

(2)  $f(x) = -x^3 + 3x - 4$        $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

6 関数  $f(x) = ax^2 - 7x + b$  が、 $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = -1$  を満たすとき、定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。 p.191

7 次のことを証明せよ。ただし、 $a$ ,  $b$  は定数とする。

(1)  $y = (ax + b)^2$  ならば  $y' = 2a(ax + b)$

(2)  $y = (ax + b)^3$  ならば  $y' = 3a(ax + b)^2$  \*

\*  $y = (ax + b)^n$  で表される関数の導関数については、次の公式が成り立つ。

$y = (ax + b)^n$  ならば  $y' = an(ax + b)^{n-1}$

ただし、 $a$ ,  $b$  は定数で、 $n$  は正の整数とする。