

# 1 節 指数関数

## 1 整数の指数

$a$  を  $n$  個掛け合わせたものを  $a^n$  と書き、  
 $a$  の  $n$  乗とよぶ。また、 $n$  を  $a^n$  の **指数** と  
 いい、 $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $\dots$  を  $a$  の **累乗** るいじょう という。

$$\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ 個}} = a^{\text{指数} \downarrow n}$$

5

### 指数法則

指数  $n$  が 0 または負の整数であるとき、累乗  $a^n$  をどのように定めれば  
 よいか考えてみよう。

たとえば、累乗  $2^n$  の指数  $n$  が正の整数のとき、指数  $n$  が 1 増えるごと  
 に  $2^n$  の値は 2 倍になる。

10

このことを逆に見ると、指数  $n$  が 1 減るごとに  $2^n$  の値は  $\frac{1}{2}$  倍になる。

よって、指数が 0 や負の整数のときにもこの規則が成り立つように、 $2^0$ ,  
 $2^{-1}$ ,  $2^{-2}$ ,  $2^{-3}$ ,  $\dots$  を次のように定めればよいことがわかる。

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & & & \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & \\ \dots & 2^{-3} & 2^{-2} & 2^{-1} & 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & \dots & \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & & \\ \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^1} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & & & \end{array}$$

一般に、指数が 0 または負の整数のときの累乗を、次のように定める。

### $a^0$ , $a^{-n}$ の定義

$a \neq 0$  で、 $n$  が正の整数のとき

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

15

例 1

(1)  $3^0 = 1$

(2)  $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

問 1

次の値を求めよ。

(1)  $3^{-2}$

(2)  $5^0$

(3)  $6^{-2}$

(4)  $(-4)^{-3}$

20

一般に、 $m, n$  が正の整数のとき、次の指数法則が成り立つ。

$$(1) a^m a^n = a^{m+n} \quad (2) (a^m)^n = a^{mn} \quad (3) (ab)^n = a^n b^n$$

指数が 0 または負の整数であるときの累乗を、前ページのように定めると、 $m, n$  がどのような整数であっても、次の **指数法則** が成り立つ。

### 指数法則

$a \neq 0, b \neq 0$  で、 $m, n$  が整数のとき

$$(1) a^m a^n = a^{m+n} \quad (1') a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(3) (ab)^n = a^n b^n \quad (3') \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- 10  $m = 5, n = -3$  のとき、上の指数法則 (1), (2), (3) が成り立つことを確かめてみよう。

$$(1) a^{\textcolor{brown}{5}} \times a^{\textcolor{blue}{-3}} = a^5 \times \frac{1}{a^3} = a^2 = a^{\textcolor{brown}{5} + \textcolor{blue}{(-3)}}$$

$$(2) (a^{\textcolor{brown}{5}})^{\textcolor{blue}{-3}} = \frac{1}{(a^5)^3} = \frac{1}{a^{5 \times 3}} = \frac{1}{a^{15}} = a^{-15} = a^{\textcolor{brown}{5} \times \textcolor{blue}{(-3)}}$$

$$(3) (ab)^{\textcolor{blue}{-3}} = \frac{1}{(ab)^3} = \frac{1}{a^3 b^3} = \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{b^3} = a^{\textcolor{blue}{-3}} b^{\textcolor{blue}{-3}}$$

- 15 **問 2**  $m = 5, n = -3$  のとき、上の指数法則 (1'), (3') が成り立つことを確かめよ。

### 例 2

$$(1) a^{-5} \times a^3 = a^{(-5)+3} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

$$(2) (a^{-3})^{-4} = a^{(-3) \times (-4)} = a^{12}$$

$$(3) (a^2 b^{-1})^{-2} = (a^2)^{-2} \times (b^{-1})^{-2} = a^{-4} b^2 = \frac{b^2}{a^4}$$

- 20 **問 3** 次の計算をせよ。

p.162 Training 1, p.176 Level Up 1

$$(1) a^{-3} \times a^{-5} \quad (2) a^{-3} \div a^{-5} \quad (3) (a^2 b^{-3})^{-2}$$

$$(4) a^3 \times a^{-5} \div a^{-4} \quad (5) (2a)^3 \div a^{-4} \times a^{-6}$$

## 2 累乗根

体積が 8 の立方体の 1 辺の長さは 2 である。

すなわち  $x^3 = 8$

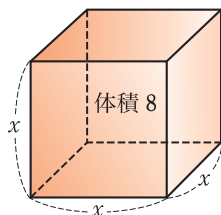
を満たす  $x$  の値は 2 である。

一般に、ある実数  $a$  に対して、3 乗して  $a$  になる数、すなわち

$$x^3 = a$$

を満たす  $x$  の値を、 $a$  の **3 乗根** という。たとえば、2 は 8 の 3 乗根である。

実数の範囲で考えれば、実数  $a$  の 3 乗根はただ 1 つしかない。これを  $\sqrt[3]{a}$  と表す。たとえば、 $\sqrt[3]{8} = 2$  である。



5

**例 3**  $(-2)^3 = -8$  であるから

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

**問 4** 次の値を求めよ。

(1)  $\sqrt[3]{27}$       (2)  $\sqrt[3]{-27}$       (3)  $\sqrt[3]{64}$       (4)  $\sqrt[3]{-64}$

一般に、正の整数  $n$  に対して、 $n$  乗して実数  $a$  になる数、すなわち

$$x^n = a$$

を満たす  $x$  の値を、 $a$  の  **$n$  乗根** という。平方根は 2 乗根である。

2 乗根、3 乗根、4 乗根、 $\dots$  をまとめて **累乗根** という。

この章では、累乗根は実数の範囲で考えることにする。

**例 4** (1)  $5^3 = 125$  であるから

5 は 125 の 3 乗根である。

(2)  $2^4 = 16$ ,  $(-2)^4 = 16$  であるから

2,  $-2$  は 16 の 4 乗根である。

**問 5** 次の値を求めよ。

(1) 81 の平方根      (2) 216 の 3 乗根      (3) 625 の 4 乗根

25

実数  $a$  の  $n$  乗根について、次のことがいえる。

(1)  $n$  が奇数のとき

$a$  の  $n$  乗根は  $a$  の正負に関係なくただ 1 つある。それを  $\sqrt[n]{a}$  と表す。

たとえば

$$32 \text{ の } 5 \text{ 乗根は } \sqrt[5]{32} = 2$$

$$-32 \text{ の } 5 \text{ 乗根は } \sqrt[5]{-32} = -2$$

$$0 \text{ の } 5 \text{ 乗根は } \sqrt[5]{0} = 0$$

(2)  $n$  が偶数のとき

(i)  $a > 0$  ならば、 $a$  の  $n$  乗根は正と負の 2 つある。正の方を  $\sqrt[n]{a}$ 、負の方を  $-\sqrt[n]{a}$  と表す。

たとえば、16 の 4 乗根は

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ と } -\sqrt[4]{16} = -2$$

(ii)  $a = 0$  ならば、 $a$  の  $n$  乗根は

$$\text{ただ 1 つであり } \sqrt[n]{0} = 0$$

(iii)  $a < 0$  ならば、 $a$  の  $n$  乗根は存在しない。

**注意**  $\sqrt[n]{a}$  はふつう  $\sqrt{a}$  と書く。

**例 5**

(1)  $(-2)^7 = -128$  であるから

$$\sqrt[7]{-128} = -2$$

(2)  $\sqrt[4]{81}$  は 81 の 4 乗根  $\pm 3$  のうち、正の方であるから

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

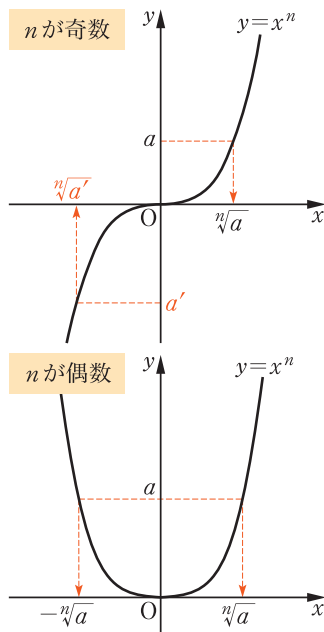
**問 6**

次の値を求めよ。

(1)  $\sqrt[4]{256}$

(2)  $\sqrt[5]{-243}$

(3)  $\sqrt[6]{64}$



p.162 Training 2

## 累乗根の性質

累乗根の定義から、正の整数  $n$  について次のことが成り立つ。

$$a > 0 \text{ のとき} \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

また、累乗根について、次の性質が成り立つ。

### 累乗根の性質

$a > 0, b > 0$  で、 $m, n$  が正の整数のとき

$$\begin{aligned} (1) \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} & (2) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\ (3) \quad (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} & (4) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \end{aligned}$$

(3) の証明

$$(\sqrt[n]{a})^m = x \text{ とおくと} \quad x^n = \{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$$

$x > 0$  であるから、 $x$  は  $a^m$  の正の  $n$  乗根である。

$$\text{よって} \quad x = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{すなわち} \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

問 7 上の (3) の証明にならって、(4) を証明せよ。

例 6

$$(1) \quad \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6} \quad \text{—} \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{12}{2}} = \sqrt[4]{6} \quad \text{—} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (\sqrt[6]{9})^3 &= \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{(3^2)^3} & \text{—} \quad (\sqrt[n]{a})^m &= \sqrt[n]{a^m} \\ &= \sqrt[6]{3^6} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \sqrt{\sqrt[3]{4}} &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[6]{4} & \text{—} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

問 8 次の計算をせよ。

p.162 Training 3

$$(1) \quad \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} \quad (2) \quad \sqrt[4]{18} \div \sqrt[4]{6} \quad (3) \quad (\sqrt[4]{25})^2$$

$$(4) \quad \sqrt[3]{27^2} \quad (5) \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}}$$

### ③ 有理数の指数

$a > 0$  のとき，有理数  $r$  を指数とする累乗  $a^r$  をどのように定めればよいか考えてみよう。

151 ページで学んだように,  $m, n$  が整数のとき, 指数法則 (2)

$$5 \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。たとえば、 $m = \frac{2}{3}$ 、 $n = 3$  のときにもこの法則が成り立つ  
とすると

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3} \times 3} = a^2$$

となる。この式は、 $a^{\frac{2}{3}}$  が  $a^2$  の 3 乗根であることを示しているから

10  $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

と定めればよいことがわかる。

一般に、次のように定める。

## 有理数を指数とする累乗

$a > 0$  で,  $m$ が整数,  $n$ が正の整数のとき

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

とくに  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ,  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

### 例 7

$$(1) \quad 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$(2) \quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\bullet \text{---} a \frac{\triangle}{\square} = \square \sqrt{a \triangle}$$

$$(3) \quad 8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{1}{4}$$

20 **問 9** 次の値を求めよ。

$$(1) \quad 25^{\frac{1}{2}}$$

(2)  $16^{\frac{3}{4}}$

$$(3) \quad 9^{-\frac{1}{2}}$$

$$(4) \quad 27^{-\frac{2}{3}}$$

## 問 10

次の式を  $a^{\frac{m}{n}}$  の形で表せ。

$$(1) \sqrt[3]{a}$$

(2)  $\sqrt{a^3}$

$$(3) \quad \left(\sqrt[4]{a}\right)^5$$

$$(4) \quad \left(\sqrt[4]{a}\right)^{-3}$$

有理数を指数とする累乗を前ページのように定めると、たとえば

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{6}} \times a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6]{a^{3+4}} = a^{\frac{3+4}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$$

となる。このように、151 ページの指数法則は、指数を有理数にまで拡張しても成り立つ。

## 指数法則

$a > 0$ ,  $b > 0$  で、 $p$ ,  $q$  が有理数のとき

$$(1) a^p a^q = a^{p+q}$$

$$(1') a^p \div a^q = a^{p-q}$$

$$(2) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(3) (ab)^p = a^p b^p$$

$$(3') \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

5

### 例 8

$$(1) 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = 2^3 = 8$$

$$(2) \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = 3^{\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}} = 3^3 = 27$$

10

### 問 11

次の計算をせよ。

$$(1) 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(2) 6^{\frac{1}{2}} \div 6^{\frac{3}{2}}$$

$$(3) \left(4^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

### 例 9

$$(1) \sqrt[6]{2^3} \times (\sqrt{2})^3 = 2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 2^2 = 4$$

$$(2) \sqrt{81^3} \div \sqrt[3]{27^2} = 81^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{2}{3}} = (3^4)^{\frac{3}{2}} \div (3^3)^{\frac{2}{3}} \\ = 3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4 = 81$$

15

### 問 12

次の計算をせよ。

[p.162 Training 4](#)

[p.176 Level Up 2.3](#)

$$(1) (\sqrt[5]{2})^2 \times \sqrt{2^3}$$

$$(2) \sqrt[3]{9} \div \sqrt[6]{81^4}$$

指数  $p$  が無理数のときにも、正の数  $a$  に対して  $a^p$  を定めることができる。

たとえば、 $\sqrt{2} = 1.41421\cdots$  に対して、有理数を指数とする 3 の累乗の列

20

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, \dots$$

は、しだいに一定の値に近づいていくから、

その値を  $3^{\sqrt{2}}$  と定める。

$$3^{\sqrt{2}} = 3^{1.41421\cdots} = 4.72880\cdots$$

累乗の指数を、このように実数にまで拡張

しても、上の指数法則はそのまま成り立つ。

$$\begin{array}{rcl} 3^1 & = & 3 \\ 3^{1.4} & = & 4.65553672\cdots \\ 3^{1.41} & = & 4.70696500\cdots \\ 3^{1.414} & = & 4.72769503\cdots \\ 3^{1.4142} & = & 4.72873393\cdots \\ & \vdots & \end{array}$$

25

## 4 指数関数とそのグラフ

$a > 0, a \neq 1$  のとき

$$y = a^x$$

で表される関数を、 $a$  を<sup>てい</sup>底とする **指数関数** という。

### 5 指数関数のグラフ

2 を底とする指数関数  $y = 2^x$  のグラフについて考えてみよう。

たとえば、 $x$  が  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$  のときの  $2^x$  の値は、次のようになる。

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \doteq 1.41$$

$$2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \doteq 2.83$$

$$10 \quad 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.71$$

いろいろな  $x$  の値に対する  $2^x$  の値は、次の表のようになる。

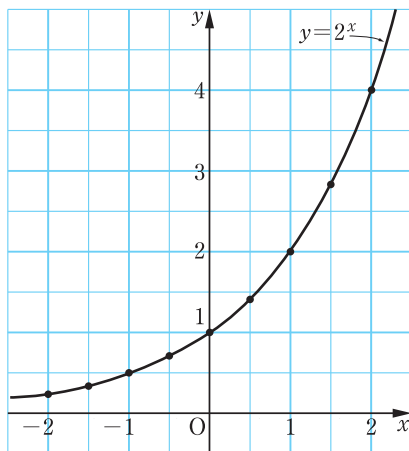
$x$	$\cdots$	$-2$	$-\frac{3}{2}$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$\frac{3}{2}$	$2$	$\cdots$
$y = 2^x$	$\cdots$	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4	$\cdots$

上のように、 $x$  の値に対する  $y$  の値を求め、 $x, y$  の値の組  $(x, y)$  を座標とする点を座標平面上にとつていくと、右の図のような曲線が得られる。

これが指数関数

$$y = 2^x$$

のグラフである。





指数関数  $y = 2^x$  のグラフと  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  のグラフを比べてみよう。

$x$	$\cdots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\cdots$
$y = 2^x$	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$1$	$2$	$4$	$8$	$16$	$\cdots$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\cdots$	$16$	$8$	$4$	$2$	$1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$

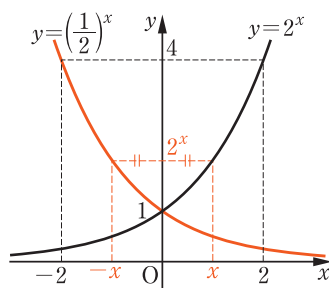
$$y = 2^x \text{ と } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

とでは、 $x$  と  $-x$  が入れかわっている。

したがって、 $y = 2^x$  のグラフと

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  のグラフは、 $y$  軸に関して対称

である。



5

一般に、関数  $y = a^x$  のグラフと関数  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  のグラフは、 $y$  軸に関して対称である。

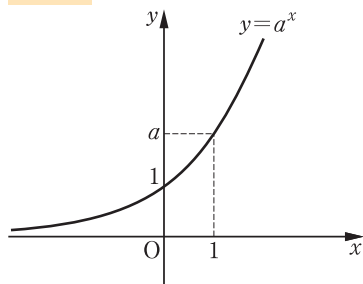
指数関数  $y = a^x$  のグラフは

$a > 1$  のときは、 $y = 2^x$  のグラフと同様に右上がりの曲線、

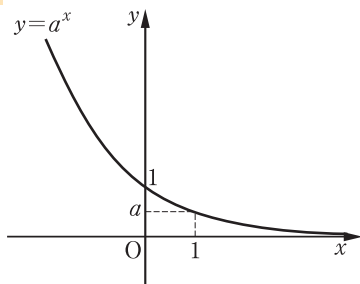
$0 < a < 1$  のときは、 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  のグラフと同様に右下がりの曲線

となる。

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$



**問 13** 関数  $y = 3^x$  と関数  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  のグラフをかけ。

p.162 Training 5、

## 指数関数の性質

指数関数  $y = a^x$  の性質をまとめると、次のようになる。

- [1] 定義域は実数全体、値域は正の実数全体である。  
 [2] グラフは点  $(0, 1)$  と点  $(1, a)$  を通り、 $x$  軸が漸近線になる。  
 [3]  $a > 1$  のとき、 $x$  の値が増加すると  $y$  の値も増加する。

すなわち  $p < q \iff a^p < a^q$

$0 < a < 1$  のとき、 $x$  の値が増加すると  $y$  の値は減少する。

すなわち  $p < q \iff a^p > a^q$

また、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$  のとき、次のことが成り立つ。

$$a^p = a^q \iff p = q$$

### 例題

大小比較

1 2つの数  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{4}$  の大小を比較せよ。

考え方 2つの数を  $2^x$  の形で表し、底が1より大きいから、 $x$ が増加すると  $2^x$ も増加することを利用する。

解  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ 、 $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

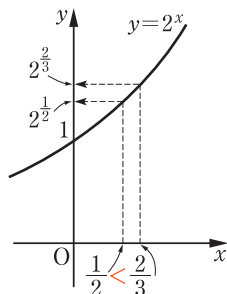
である。ここで

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

であり、 $y = 2^x$  の底2は1より大きいから

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{2}{3}}$$

すなわち  $\sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$



問14 次の2つの数の大小を比較せよ。

p.162 Training 6

p.176 Level Up 4

(1)  $\sqrt[3]{9}$ 、 $\sqrt[4]{27}$

(2)  $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ 、 $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

## 指数関数を含む方程式・不等式

指数関数の性質を用いて、次の方程式、不等式を解いてみよう。

### 例題

指数関数を含む方程式

2 方程式  $8^x = 2^{x+4}$  を解け。

解

$$8^x = (2^3)^x = 2^{3x} \text{ であるから} \quad 2^{3x} = 2^{x+4}$$

$$\text{ゆえに} \quad 3x = x + 4 \quad \text{--- } a^p = a^q \iff p = q$$

$$\text{したがって} \quad x = 2$$

5

問 15 次の方程式を解け。

p.162 Training 7

$$(1) 9^x = \frac{1}{9}$$

$$(2) \left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

### 例題

指数関数を含む不等式

3 次の不等式を解け。

$$(1) (\sqrt{3})^x < 9$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{16}$$

解

$$(1) (\sqrt{3})^x = (3^{\frac{1}{2}})^x = 3^{\frac{x}{2}}, \quad 9 = 3^2 \text{ であるから}$$

$$3^{\frac{x}{2}} < 3^2$$

$$y = 3^x \text{ の底 } 3 \text{ は } 1 \text{ より大きいから}$$

$$\frac{x}{2} < 2$$

$$\text{ゆえに} \quad x < 4$$

$$(2) \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \text{ であるから} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ の底 } \frac{1}{2} \text{ は } 1 \text{ より小さいから} \quad x \leq 4$$

15

問 16 次の不等式を解け。

p.162 Training 8

$$(1) 4^x > 32$$

$$(2) \left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \frac{1}{27}$$

20

# チャレンジ 例題 指数関数を含む方程式・不等式

置き換えを用いて、指数関数を含む方程式、不等式を解いてみよう。

## 例題

次の方程式、不等式を解け。

$$(1) 9^x - 2 \times 3^x - 3 = 0 \quad (2) 4^{x+1} - 5 \times 2^x + 1 > 0$$

解

$$(1) 9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 \text{ であるから}$$

$$(3^x)^2 - 2 \times 3^x - 3 = 0$$

ここで、 $3^x = t$  とおくと、 $t > 0$  であり

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$t > 0 \text{ より } t = 3$$

$$\text{すなわち } 3^x = 3$$

$$\text{ゆえに } x = 1$$

$$(2) 4^{x+1} = 4 \times 4^x = 4 \times (2^2)^x = 4 \times 2^{2x} = 4 \times (2^x)^2 \text{ であるから}$$

$$4 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 1 > 0$$

ここで、 $2^x = t$  とおくと、 $t > 0$  であり

$$4t^2 - 5t + 1 > 0$$

$$(4t-1)(t-1) > 0$$

$$t < \frac{1}{4}, 1 < t$$

$$t > 0 \text{ であるから } 0 < t < \frac{1}{4}, 1 < t$$

$$\text{すなわち } 0 < 2^x < 2^{-2}, 2^0 < 2^x$$

$$t = 2^x \text{ の底 } 2 \text{ は } 1 \text{ より大きいから } x < -2, 0 < x$$

問1 次の方程式、不等式を解け。

p.176 Level Up 5.6

$$(1) \left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 = 0 \quad (2) 4^x - 2^{x+1} - 8 \geq 0$$

1 次の式を簡単にし、その結果を負の指数を用いずに表せ。 p.151

(1)  $a^2 \times a^{-4}$       (2)  $a^{-5} \div a^{-3} \times \left(\frac{1}{a}\right)^2$       (3)  $(a^2 b^{-1})^{-3} \times a^4 \times b^{-2}$

2 次の値を求めよ。 p.153

(1)  $\sqrt[3]{-216}$       (2)  $\sqrt[6]{729}$       (3)  $-\sqrt[4]{625}$

5

3 次の計算をせよ。 p.154

(1)  $\sqrt[4]{125} \times \sqrt[4]{5}$       (2)  $\sqrt[3]{100^4} \div \sqrt[3]{10^2}$       (3)  $(\sqrt[4]{49})^2$   
(4)  $\sqrt[3]{125^2}$       (5)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$

4 次の計算をせよ。 p.156

(1)  $\sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{32^{-1}}$       (2)  $9^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{3^5} \times 3^{-\frac{1}{2}}$

10

5 関数  $y = 3^x$  のグラフと次の関数のグラフは、どのような位置関係にあるか答えよ。 p.158

(1)  $y = -3^x$       (2)  $y = \frac{1}{3^x}$       (3)  $y = 3^x + 1$       (4)  $y = 3^{x-1}$

6 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。 p.159

(1)  $\sqrt{3}, \sqrt[5]{9}, \sqrt[7]{27}$       (2)  $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[8]{\frac{1}{8}}$

15

7 次の方程式を解け。 p.160

(1)  $4^x = \frac{1}{8}$       (2)  $\left(\frac{1}{25}\right)^x = \left(\frac{1}{125}\right)^{x-2}$

8 次の不等式を解け。 p.160

(1)  $3^{x-1} > 27$       (2)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$