

1 節 三角関数

1 一般角

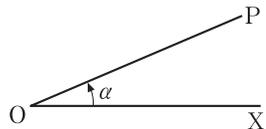
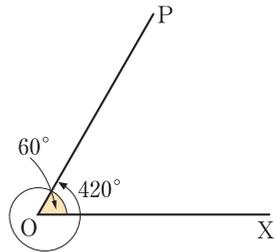
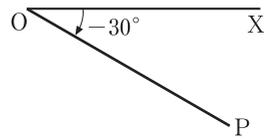
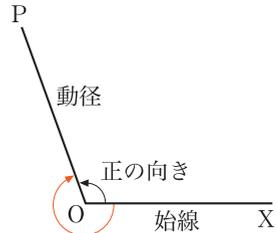
平面上で、点 O を中心として半直線 OP を回転させることを考える。このとき、半直線 OP を **動径** といい、動径の始めの位置を示す半直線 OX を **始線** という。

回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを **正の向き**、時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** という。

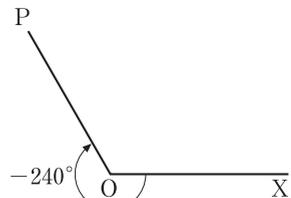
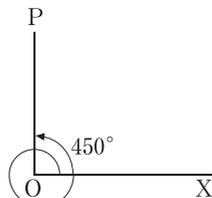
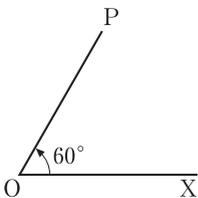
たとえば、負の向きに 30° 回転したとき、この回転した角を -30° と表す。また、正の向きに 360° 回転したあとさらに 60° 回転すると、全体として 420° 回転した角と考えられるから、この回転した角を 420° と表す。

このように、負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を **一般角** という。

また、 α を一般角として、始線 OX の位置から点 O のまわりに α だけ回転した動径を、**角 α の動径** という。



例 1 半直線 OX を始線として、 60° 、 450° 、 -240° の動径を図示すると、それぞれ次のようになる。



問 1 OX を始線として、次の角の動径 OP を図示せよ。

- (1) 240° (2) -60° (3) 765° (4) -210°

右の図のように、 30° の動径をOPとする。

動径OPは 360° 回転するともとの位置に戻るから、たとえば

$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 1$$

5 $750^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 2$

$$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-1)$$

などの角の動径の位置は、 30° の動径の位置と同じである。

さらに、 n を整数とするとき

$$30^\circ + 360^\circ \times n$$

10 の形で表される角の動径の位置は、すべて 30° の動径の位置と一致する。

これらの角を **動径OPの表す角** という。

一般に、次のことがいえる。

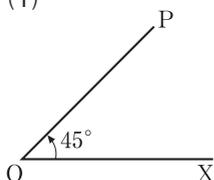
動径の表す一般角

角 α の動径が表す一般角は

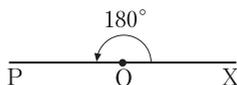
15
$$\alpha + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

問2 次の図で、OXを始線としたときの動径OPの表す一般角を求めよ。

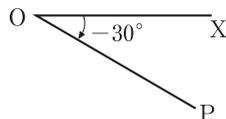
(1)



(2)



(3)



問3 次の角を $\alpha + 360^\circ \times n$ (n は整数)の形で表すとき、 α を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ とする。

(1) 420°

(2) 730°

20 (3) -210°

(4) -675°

2 弧度法

角の大きさを表すのに、これまでは1回転を 360° とする“度”という単位を用いてきた。

ここでは、弧の長さを用いた新しい角の表し方について学ぼう。

半径1の円において

5

長さ1の弧に対する中心角の大きさ

を**1ラジアン**または**1弧度**といい、これを単位とする角の表し方を**弧度法**という。

中心角は弧の長さに比例するから、半径1の円の周の長さ 2π に対する中心角 360° を弧度法で表すと 2π ラジアンである。

10

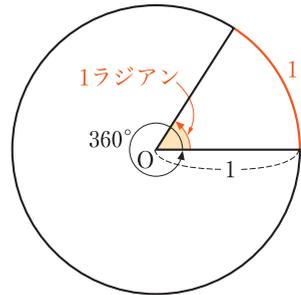
すなわち

$$360^\circ = 2\pi \text{ ラジアン}$$

$$180^\circ = \pi \text{ ラジアン}$$

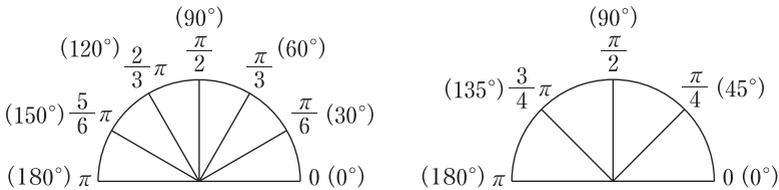
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン}$$

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57.2958^\circ$$



15

いろいろな角について、度と弧度の対応は、次の図のようになる。



注意 弧度法では、ふつう単位名のラジアンを省略する。

例 2 240° を弧度法で表してみよう。

$$240^\circ = \frac{240}{180} \times 180^\circ = \frac{4}{3}\pi \quad \text{—— } 180^\circ = \pi$$

問 4 270° , 315° , -60° , -225° を弧度法で表せ。

20

例 3 弧度法による角 $\frac{5}{3}\pi$ を度で表してみよう。

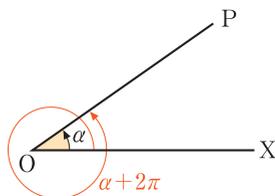
$$\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3} \times 180^\circ = 300^\circ \quad \text{— } \pi = 180^\circ$$

問 5 弧度法による角 $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7}{6}\pi$, $-\frac{11}{6}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$ を度で表せ。

5 これからは、角の大きさを表すのに主として
弧度法を用いる。

弧度法を用いると、角 α の動径が表す一般角 θ は、次のように表される。

$$\theta = \alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



扇形の弧の長さ^{おび}と面積

10 半径 r , 中心角 θ の扇形の弧の長さを l , 面積を S とする。1 つの円において、扇形の弧の長さ^{おび}と面積は、ともに中心角に比例するから

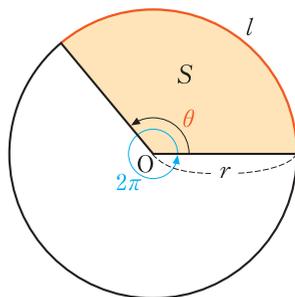
$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi, \quad S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

よって $l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

15 すなわち

$$l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$



例 4 半径 6, 中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さを l , 面積を S とすると

$$l = 6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi, \quad S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi$$

問 6 半径 8, 中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

20

p.133 Training 1

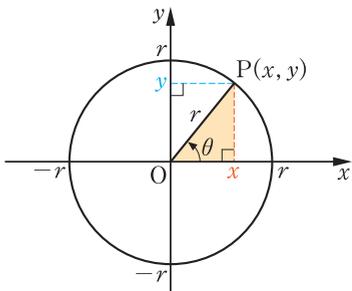
3 三角関数

数学 I で学んだサイン (正弦), コサイン (余弦), タンジェント (正接) を, 一般角について定義しよう。座標平面上で, 原点 O を中心とする半径 r の円をかく。そして, x 軸の正の部分を開始線として, 角 θ の動径と円 O の交点を $P(x, y)$ とする。

このとき

$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x}$$

の値は円 O の半径 r の大きさに関係なく, 角 θ だけによって定まるから, 次のように表す。



5

10

三角関数の定義

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ をまとめて, θ の **三角関数** という。

$0 \leq \theta \leq \pi$ の場合, これらは数学 I で学んだ三角比の値と一致する。

注意 $\tan \theta$ は, $x = 0$ となるような θ に対しては定義されない。

15

上の定義にもとづいて, いろいろな角の三角関数の値を求めてみよう。

例 5

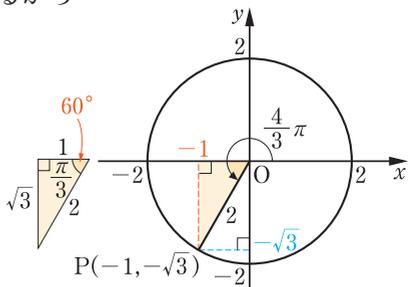
右の図で, 原点 O を中心とする半径 2 の円と $\frac{4}{3}\pi$ の動径の交点

P の座標は $(-1, -\sqrt{3})$ であるから

$$\sin \frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4}{3}\pi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$



20

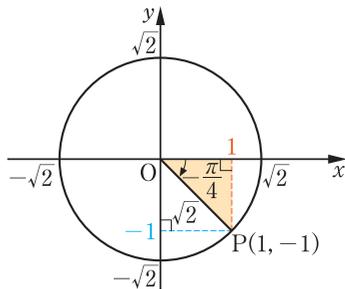
例 6 右の図で、原点Oを中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円と $-\frac{\pi}{4}$ の動径の交

点Pの座標は $(1, -1)$ であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{1} = -1$$



5

問 7 θ が次の角のとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。 [p.133 Training 2](#)

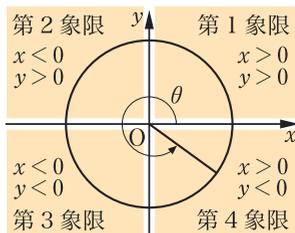
- (1) $\frac{7}{6}\pi$ (2) $\frac{9}{4}\pi$ (3) $-\frac{\pi}{3}$ (4) -3π

例 6 のように、角 θ の動径が第 4 象限にあるとき、 θ を **第 4 象限の角** という。

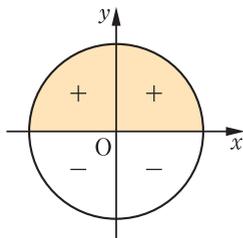
10 他の象限についても同様である。

$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値の正負は、 θ がどの象限の角であるかによって定まる。

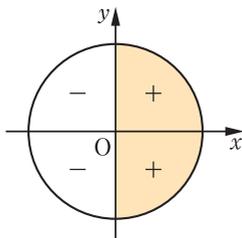
これを図に示すと、次のようになる。



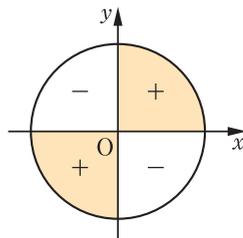
$\sin \theta$ の正負



$\cos \theta$ の正負



$\tan \theta$ の正負



問 8 次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

- 15 (1) $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$ (2) $\tan \theta < 0$, $\cos \theta < 0$

三角関数と単位円

原点Oを中心とする半径1の円を**単位円**という。単位円を用いて、三角関数の性質を調べてみよう。

右の図のように、単位円と角 θ の動径の交点を $P(x, y)$ とすると、三角関数の定義において、 $r = 1$ として

$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

が成り立つ。すなわち、Pの座標は

$$P(\cos \theta, \sin \theta)$$

点Pは単位円の周上にあるから、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{—} \quad -1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

次に、単位円を表す円の方程式 $x^2 + y^2 = 1$ より

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

さらに、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ より $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

また、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ の両辺を $\cos^2 \theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

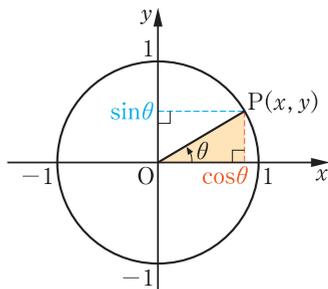
したがって、一般角の三角関数についても、数学Iで学んだ三角比と同様に、次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係

$$[1] \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$[2] \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$[3] \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$



5

15

20

例題

三角関数の相互関係 [1]

1

θ が第 3 象限の角で、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

解

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

θ が第 3 象限の角であるから、 $\sin \theta < 0$ である。

$$\text{よって } \sin \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \quad \dots\dots \text{答}$$

$$\text{また } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \text{答}$$

問 9

(1) θ が第 4 象限の角で、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

(2) θ が第 3 象限の角で、 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 3(1)、

例題

三角関数の相互関係 [2]

2

θ が第 4 象限の角で、 $\tan \theta = -2$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

解

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-2)^2 = 5 \text{ より } \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

θ が第 4 象限の角であるから、 $\cos \theta > 0$ である。

$$\text{よって } \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots \text{答}$$

$$\text{また、} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ より}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = (-2) \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots \text{答}$$

問 10

θ が第 3 象限の角で、 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 3(2)、

例題

相互関係による式の値

3

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

解

与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

5

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であるから $2 \sin \theta \cos \theta + 1 = \frac{1}{4}$

よって $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{3}{8}$ …… 答

また $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta \quad \text{--- } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
 $= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$
 $= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8} \right) \right\} = \frac{11}{16}$ …… 答

10

問 11

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$, $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 4 p.144 Level Up 1、

例題

相互関係による式変形

4

等式 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$ を証明せよ。

15

証明

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{--- } \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

ゆえに $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

問 12

等式 $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ を証明せよ。

p.133 Training 5、

4 三角関数の性質

n を整数とすると、角 $\theta + 2n\pi$ の動径は角 θ の動径に一致するから、次の公式が成り立つ。

$\theta + 2n\pi$ の三角関数

$$\begin{aligned} [1] \quad \sin(\theta + 2n\pi) &= \sin \theta & \tan(\theta + 2n\pi) &= \tan \theta \\ \cos(\theta + 2n\pi) &= \cos \theta \end{aligned}$$

例 7 $\sin \frac{7}{3}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

次に、角 $-\theta$ の動径 OP' は、角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称であるから、点 P の座標を (x, y) とすると、点 P' の座標は $(x, -y)$ となる。よって

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -y = -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= x = \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta \end{aligned}$$

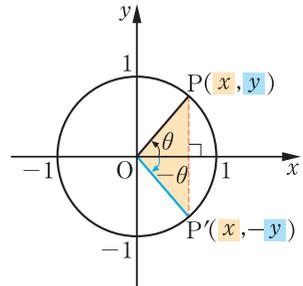
すなわち、 $-\theta$ の三角関数について、次の公式が成り立つ。

$-\theta$ の三角関数

$$\begin{aligned} [2] \quad \sin(-\theta) &= -\sin \theta & \tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

例 8 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 13 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。



角 $\theta + \pi$ の動径 OP' は、角 θ の動径 OP を原点 O のまわりに π だけ回転したもので、点 P と点 P' は原点に関して対称である。

よって、点 P の座標を (x, y) とすると、点 P' の座標は $(-x, -y)$ となる。

$$\sin(\theta + \pi) = -\color{blue}{y} = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\color{orange}{x} = -\cos \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

すなわち、 $\theta + \pi$ の三角関数について、次の公式が成り立つ。

$\theta + \pi$ の三角関数

$$[3] \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

例 9

$$\sin \frac{7}{6} \pi = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

問 14

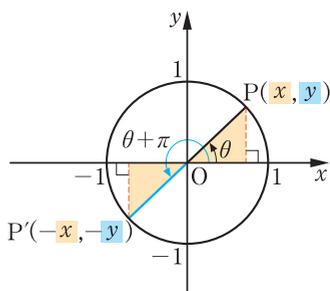
$$\sin \frac{5}{4} \pi, \cos \frac{5}{4} \pi, \tan \frac{5}{4} \pi \text{ の値を求めよ。}$$

角 $\theta + \frac{\pi}{2}$ の動径 OP' は、角 θ の動径 OP を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものであるから、点 P の座標を (x, y) とすると、点 P' の座標は $(-y, x)$ となる。

$$\text{よって} \quad \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \color{orange}{x} = \cos \theta$$

$$\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\color{blue}{y} = -\sin \theta$$

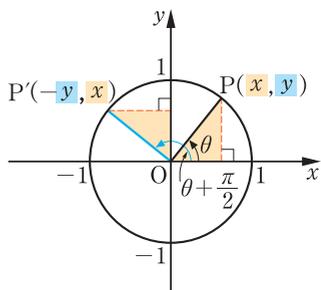
$$\tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{\tan \theta}$$



5

10

15



20

すなわち、 $\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数について、次の公式が成り立つ。

$\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

$$[4] \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

- 5 さらに、公式 [3], [4] の θ を $-\theta$ で置き換えることにより、次の公式が成り立つ。

$\pi - \theta, \frac{\pi}{2} - \theta$ の三角関数

$$[5] \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$[6] \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

例 10

$$\sin \frac{7}{12} \pi = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{— 公式 [4]}$$

$$\sin \frac{5}{12} \pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{— 公式 [6]}$$

問 15

次の \square にあてはまる鋭角を答えよ。 [p.133 Training 6](#)、 [p.144 LevelUp 2](#)、

$$(1) \sin \frac{7}{8} \pi = \cos \square$$

$$(2) \tan \frac{5}{6} \pi = -\frac{1}{\tan \square}$$

$$(3) \sin \frac{3}{4} \pi = \sin \square$$

$$(4) \cos \frac{5}{6} \pi = -\cos \square$$

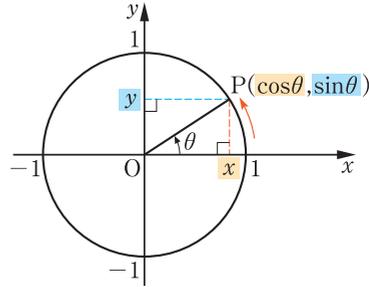
$$(5) \cos \frac{3}{8} \pi = \sin \square$$

$$(6) \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\tan \square}$$

5 三角関数のグラフ

$y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフ

右の図において、角 θ の動径と単位円の交点 P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。すなわち、P の y 座標が $\sin \theta$ である。

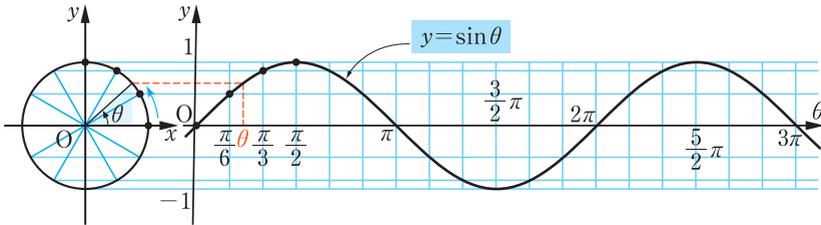


5

このことを利用すると、関数

$$y = \sin \theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。



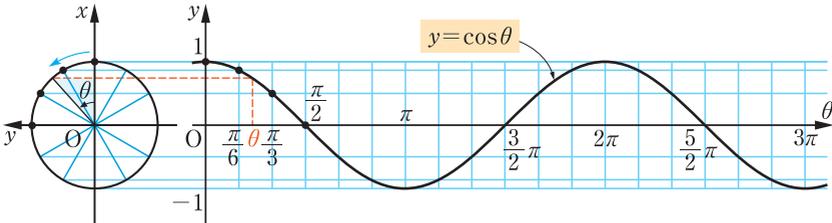
$y = \sin \theta$ のグラフの形の曲線を **正弦曲線** という。

10

また、点 P の x 座標が $\cos \theta$ であることから、関数

$$y = \cos \theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。



$y = \cos \theta$ のグラフは $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行

移動したものであり、 $y = \cos \theta$ のグラフも正弦曲線である。

15

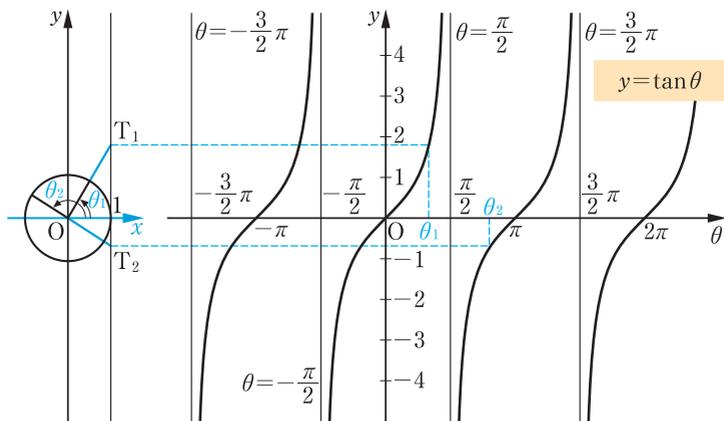
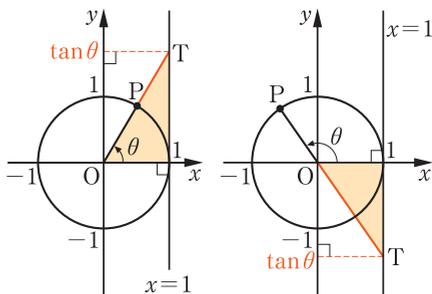
$y = \tan \theta$ のグラフ

角 θ の動径を OP とし、直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T とすると、 T の y 座標は $\tan \theta$ である。

5 このことを利用すると、関数

$$y = \tan \theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると、 θ が 0 から増加するにつれて、 $\tan \theta$ の

10 値も増加する。そして、 θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づけば、 $\tan \theta$ の値は限りなく大きくなり、

グラフは直線 $\theta = \frac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このように、グラフがある直線に限りなく近づくとき、その直線をグラフの **漸近線** という。同様に考えると、直線

$$\dots, \theta = -\frac{3}{2}\pi, \theta = -\frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3}{2}\pi, \dots$$

15 は、 $y = \tan \theta$ のグラフの漸近線である。

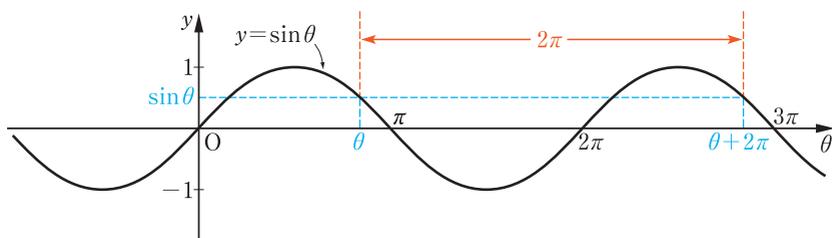
三角関数のグラフの性質

$\sin \theta$, $\cos \theta$ については、次の公式が成り立つ。

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad \text{— p.119 公式 [1]}$$

このことから、 $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフは 2π ごとに同じ形がくり返されることがわかる。

5



一般に、関数 $y = f(x)$ について、0でない定数 p があって、等式

$$f(x+p) = f(x)$$

がすべての x に対して成り立つとき、 $f(x)$ を、 p を周期とする **周期関数** という。このとき、周期は無数にあるが、ふつうは、正で最小のものを **周期** という。

10

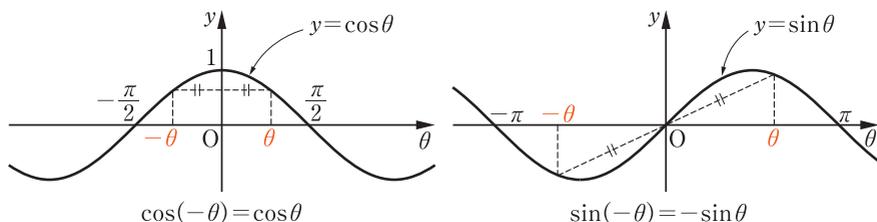
三角関数は周期関数で、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ の周期は 2π である。また、 $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ が成り立つので、 $\tan \theta$ の周期は π である。

さらに、119 ページの公式 [2] より

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

このことから、関数 $y = \cos \theta$ のグラフは **y 軸に関して対称** であり、関数 $y = \sin \theta$ のグラフは **原点に関して対称** であることがわかる。

15



また、 $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ が成り立つので、 $y = \tan \theta$ のグラフは **原点に関して対称** である。

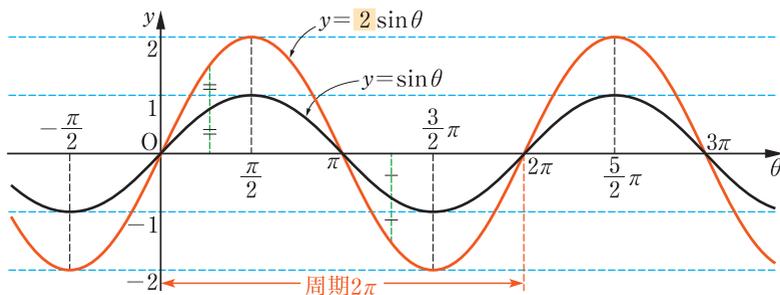
いろいろな三角関数のグラフ

例 11 $y = \sin \theta$ のグラフをもとにして、 $y = 2 \sin \theta$ のグラフをかいてみよう。

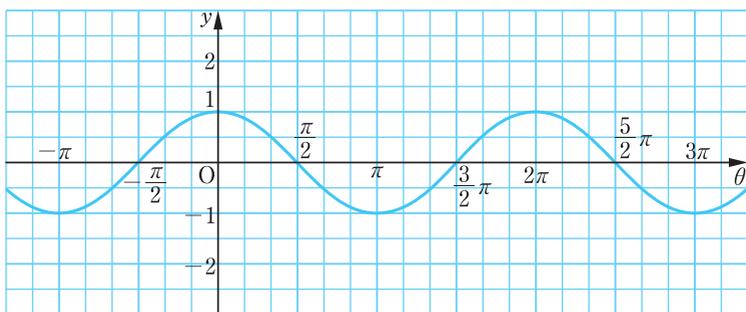
$y = 2 \sin \theta$ のグラフは

$y = \sin \theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

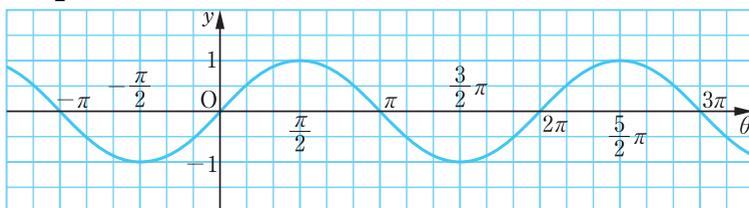
関数 $y = 2 \sin \theta$ の周期は $y = \sin \theta$ と同じく 2π である。



問 16 $y = 2 \cos \theta$ のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。



問 17 $y = \frac{1}{2} \sin \theta$ のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。



例 12

$y = \sin \theta$ のグラフをもとにして、 $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかいてみよう。

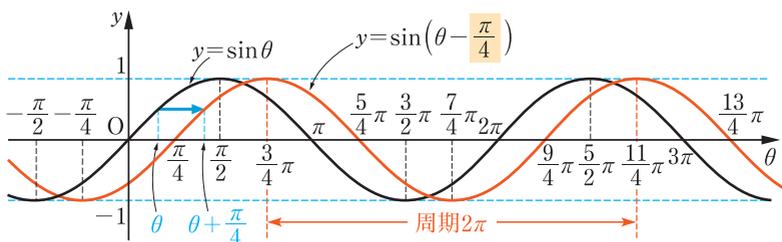
| | | | | | | | |
|-------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| θ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | π |
| $\sin \theta$ | -1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 |
| $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

上の表からわかるように、 $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは

$y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動

したものである。

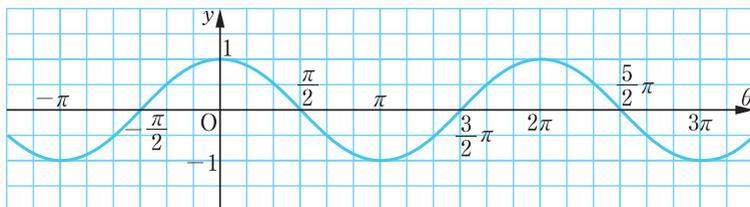
関数 $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ の周期は、 $y = \sin \theta$ と同じく 2π である。



5

問 18

$y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。



p.133 Training 7(2)

例 13

$y = \sin \theta$ のグラフをもとにして、 $y = \sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

右の表からわかるように

| | | | | | | | |
|----------------|---|------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-------------------|-----------------|
| θ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5}{12}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \theta$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | 1 |
| $\sin 2\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | | | |

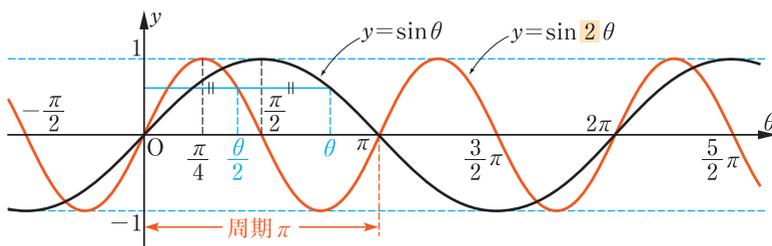
$$y = \sin 2\theta$$

のグラフは

$$y = \sin \theta$$

のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

したがって、関数 $y = \sin 2\theta$ の周期は $y = \sin \theta$ の周期 2π の $\frac{1}{2}$ 倍で、 π である。

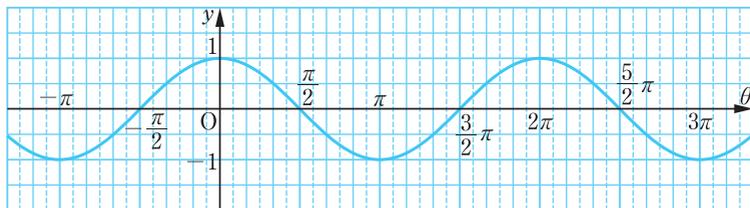


上と同様に考えると、 a を正の定数とすると、 $\sin a\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{a}$

であり、 $\cos a\theta$ の周期は $\frac{2\pi}{a}$ である。また、 $\tan a\theta$ の周期は $\frac{\pi}{a}$ である。

問 19

$y = \cos 2\theta$ のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。



p.144 LevelUp 3,4

問 20

$y = \tan 2\theta$ のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

p.133 Training 7(3)

6 三角関数を含む方程式・不等式

三角関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。

例題

三角関数を含む方程式

5 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$

(2) $\tan \theta = \sqrt{3}$

5

解

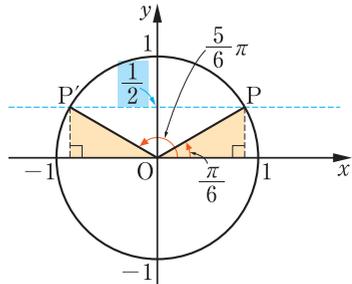
(1) 右の図のように、単位円の

周上で、 y 座標が $\frac{1}{2}$ とな

る点を P, P' とすると、
動径 OP, OP' の表す角が
求める角である。

よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で θ の値を求めると

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$



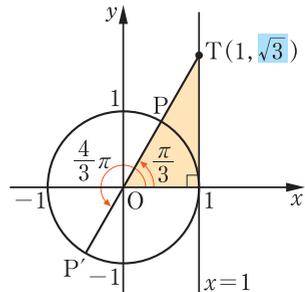
10

(2) 右の図のように、点 $T(1, \sqrt{3})$

と原点を通る直線と単位円の交
点を P, P' とすると、動径 $OP,$
 OP' の表す角が求める角である。

よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で
 θ の値を求めると

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$



15

問21 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

20

(1) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan \theta = -1$

p.133 Training 8

6

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、方程式 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めよ。

考え方 $\theta + \frac{\pi}{3}$ の値の範囲に注意して、まず $\theta + \frac{\pi}{3}$ の値を求める。

解 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき

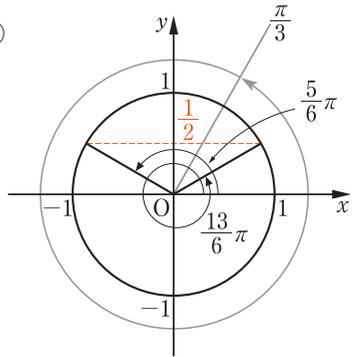
$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

単位円の周上で、 y 座標が $\frac{1}{2}$ と

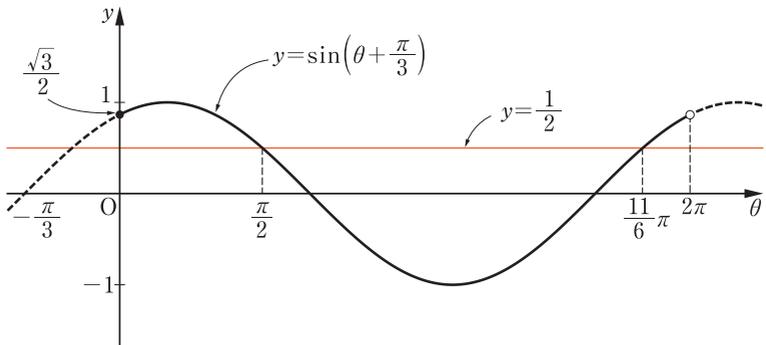
なる $\theta + \frac{\pi}{3}$ の値は、 $\textcircled{1}$ の範囲で

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi$



注意 例題6の解は、関数 $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ のグラフが直線 $y = \frac{1}{2}$ と交わる点の θ の値である。



問22 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

p.133 Training 9、 p.144 Level Up 5(1)、

5

10

15

7 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\cos \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin \theta \geq -\frac{1}{2}$

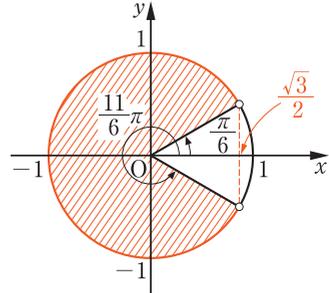
解

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$$

であるから、求める角 θ の動径は、右の図の斜線部分にある。

ゆえに $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$



5

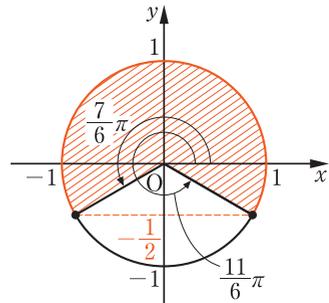
(2) $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で、

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

であるから、求める角 θ の動径は、右の図の斜線部分にある。

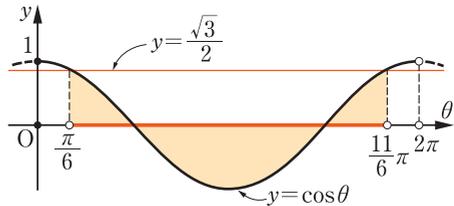
ゆえに $0 \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$



10

注意

例題 7(1) の解は、関数 $y = \cos \theta$ のグラフが直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ の値の範囲である。



15

問 23

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\cos \theta \leq -\frac{1}{2}$

(2) $\cos \theta > \frac{1}{2}$

(3) $\sin \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

20

8

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、不等式 $-\sqrt{3} < \tan \theta < 1$ を満たす θ

の値の範囲を求めよ。

解

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、

$\tan \theta = -\sqrt{3}$ となる θ の値は

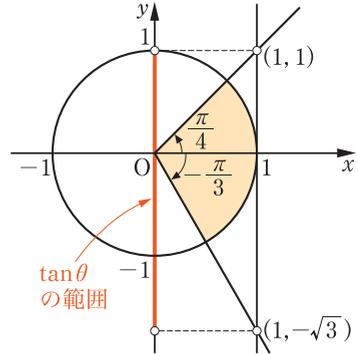
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$\tan \theta = 1$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって、右の図から、不等式を満たす θ の値の範囲は

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}$$



注意

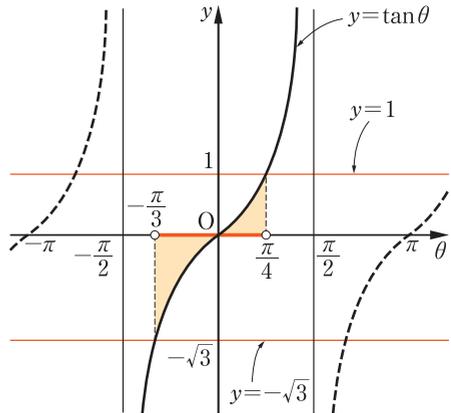
例題 8 の解は、関数

$y = \tan \theta$ のグラフが直線

$y = 1$ より下側で、しかも直線

$y = -\sqrt{3}$ より上側にある

θ の値の範囲である。



問 24

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $-1 < \tan \theta < \frac{1}{3}$

(2) $\tan \theta \leq \sqrt{3}$

Challenge チャレンジ 例題 三角関数を含む関数の最大・最小

やや複雑な三角関数を含む関数の最大値，最小値を調べてみよう。

例題

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y = \sin^2 \theta + \sin \theta$$

考え方

$\sin \theta = t$ とおくことによって，与えられた関数を t の 2 次関数とみて考える。

解

$\sin \theta = t$ とおくと， $0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$-1 \leq t \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また， y を t で表すと

$$y = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

よって， $\textcircled{1}$ の範囲でこの関数は

$$t = 1 \text{ のとき} \quad \text{最大値 } 2$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{ のとき} \quad \text{最小値 } -\frac{1}{4}$$

をとる。ここで， $0 \leq \theta < 2\pi$ より

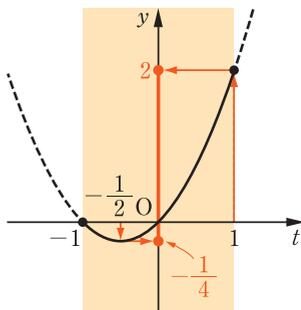
$$\sin \theta = 1 \text{ となるのは} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \text{ となるのは} \quad \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ のとき}$$

したがって

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \text{最大値 } 2$$

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ のとき} \quad \text{最小値 } -\frac{1}{4}$$



5

10

15

20

問 1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y = -\cos^2 \theta + \cos \theta + 2$

(2) $y = \cos^2 \theta + \sin \theta$

- 1 半径 4, 中心角 $\frac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さ と 面積 を求めよ。 ▶p.113
- 2 θ が次の角のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。 ▶p.115
 (1) $\frac{11}{6}\pi$ (2) $\frac{11}{4}\pi$ (3) $-\frac{2}{3}\pi$ (4) 5π
- 5 3 次の間に答えよ。 ▶p.117
 (1) θ が第 4 象限の角で $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, $\sin \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。
 (2) θ が第 3 象限の角で $\tan \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。
- 4 θ は第 1 象限の角で, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$ のとき, 次の値を求めよ。
 (1) $\sin \theta \cos \theta$ (2) $\sin \theta + \cos \theta$ (3) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$ ▶p.118
- 10 5 等式 $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$ を証明せよ。 ▶p.118
- 6 $\sin \frac{5}{8}\pi = a$, $\cos \frac{5}{8}\pi = b$ とおくとき, 次の値を a , b を用いて表せ。
 (1) $\sin \frac{9}{8}\pi$ (2) $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$ (3) $\tan \frac{17}{8}\pi$ ▶p.121
- 7 次の関数のグラフをかけ。また, その周期を求めよ。 ▶p.125-127
 (1) $y = -\tan \theta$ (2) $y = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ (3) $y = \frac{1}{2}\cos 3\theta$
- 15 8 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を満たす θ の値を求めよ。 ▶p.128
 (1) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ (2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- 9 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を満たす θ の値を求めよ。 ▶p.129
 (1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$
- 10 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。 ▶p.130-131
 (1) $2\sin \theta - \sqrt{3} \geq 0$ (2) $\sqrt{2} \cos \theta - 1 > 0$ (3) $\sqrt{3} \tan \theta + 1 \geq 0$