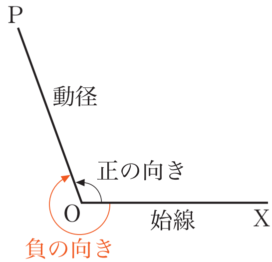
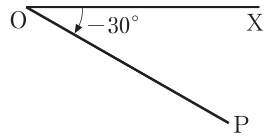
# 1節 三角関数

## ❶ 一般角

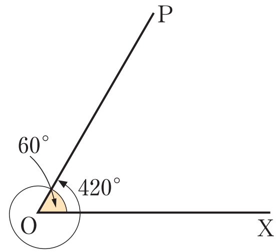
平面上で，点Oを中心として半直線OPを回転させることを考える。このとき，半直線OPを **動径**(どうけい) といい，動径の始めの位置を示す半直線OXを **始線**(しせん) という。




回転には2つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを **正の向き**，時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** という。

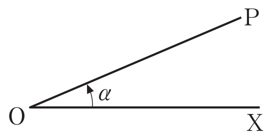



たとえば，負の向きに30°回転したとき，この回転した角を −30° と表す。また，正の向きに360°回転したあとさらに60°回転すると，全体として420°回転した角と考えられるから，この回転した角を420°と表す。

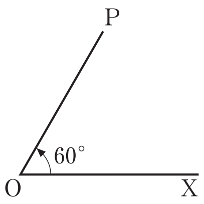


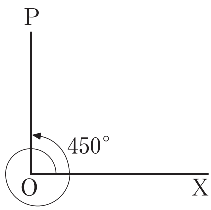

このように，負の角や360°よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を **一般角** という。

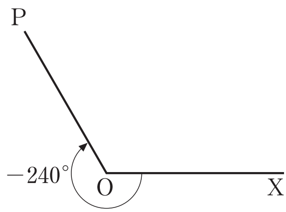
また，$\alpha$ を一般角として，始線OXの位置から点Oのまわりに $\alpha$ だけ回転した動径を，**角 $\alpha$ の動径** という。




**例1** 半直線OXを始線として，60°，450°，−240° の動径を図示すると，それぞれ次のようになる。



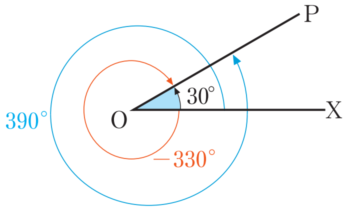




**問1** OXを始線として，次の角の動径OPを図示せよ。

(1) 240°　　(2) −60°　　(3) 765°　　(4) −210°

右の図のように，30° の動径を OP とする。

動径 OP は 360° 回転するともとの位置に戻るから，たとえば




$$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 1$$

$$750^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times 2$$

$$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times (-1)$$

などの角の動径の位置は，30° の動径の位置と同じである。

さらに，$n$ を整数とするとき

$$30^\circ + 360^\circ \times n$$

の形で表される角の動径の位置は，すべて 30° の動径の位置と一致する。これらの角を **動径 OP の表す角** という。

一般に，次のことがいえる。

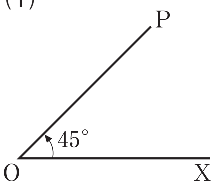
**動径の表す一般角**

角 $\alpha$ の動径が表す一般角は

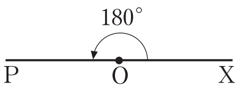
$$\boldsymbol{\alpha + 360^\circ \times n} \qquad (n \text{ は整数})$$

**問 2**　次の図で，OX を始線としたときの動径 OP の表す一般角を求めよ。

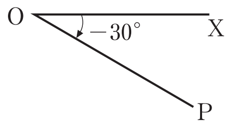
(1)




(2)




(3)




**問 3**　次の角を $\alpha + 360^\circ \times n$（$n$ は整数）の形で表すとき，$\alpha$ を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ とする。

(1) 420°　　(2) 730°

(3) −210°　　(4) −675°

## 2 弧度法

角の大きさを表すのに，これまでは 1 回転を $360^\circ$ とする“度”という単位を用いてきた。

ここでは，弧の長さを用いた新しい角の表し方について学ぼう。

半径 1 の円において

長さ 1 の弧に対する中心角の大きさ

を **1 ラジアン** または **1 弧度** といい，これを単位とする角の表し方を **弧度法** という。

中心角は弧の長さに比例するから，半径 1 の円の周の長さ $2\pi$ に対する中心角 $360^\circ$ を弧度法で表すと $2\pi$ ラジアンである。

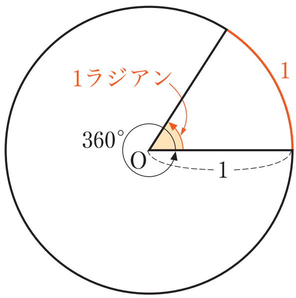
すなわち

$360^\circ = 2\pi$ ラジアン

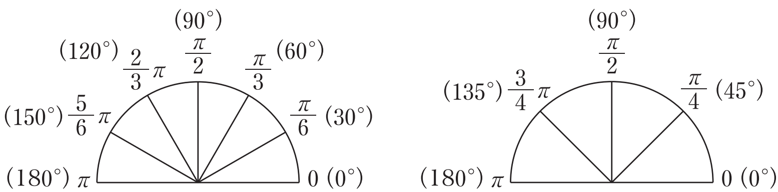
**$180^\circ = \pi$ ラジアン**

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアン

$1$ ラジアン $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.2958^\circ$




いろいろな角について，度と弧度の対応は，次の図のようになる。




**注意**　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

**例 2**　$240^\circ$ を弧度法で表してみよう。

$$240^\circ = \frac{240}{180} \times 180^\circ = \frac{4}{3}\pi$$ ← $180^\circ = \pi$

**問 4**　$270^\circ$，$315^\circ$，$-60^\circ$，$-225^\circ$ を弧度法で表せ。

**例 3**　弧度法による角 $\dfrac{5}{3}\pi$ を度で表してみよう。

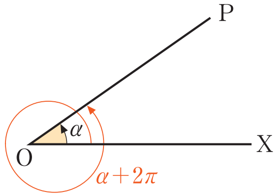
$$\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\times 180^\circ = 300^\circ \qquad \pi = 180^\circ$$

**問 5**　弧度法による角 $\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$-\dfrac{11}{6}\pi$，$-\dfrac{3}{2}\pi$ を度で表せ。

これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。

弧度法を用いると，角 $\alpha$ の動径が表す一般角 $\theta$ は，次のように表される。

$$\boldsymbol{\theta = \alpha + 2n\pi} \qquad (n\text{ は整数})$$



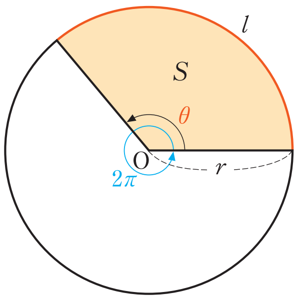

## 扇形の弧の長さと面積

半径 $r$，中心角 $\theta$ の扇形の弧の長さを $l$，面積を $S$ とする。1 つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi, \qquad S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

よって　$l = 2\pi r \times \dfrac{\theta}{2\pi} = r\theta$

$$S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta$$




すなわち

$$\boldsymbol{l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr}$$

**例 4**　半径 6，中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さを $l$，面積を $S$ とすると

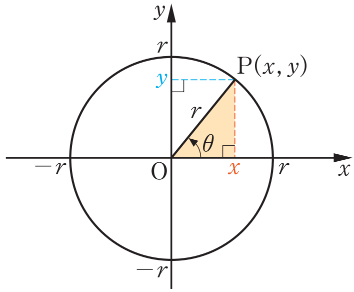
$$l = 6\times\frac{2}{3}\pi = 4\pi, \qquad S = \frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{2}{3}\pi = 12\pi$$

**問 6**　半径 8，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ $l$ と面積 $S$ を求めよ。

p.133 Training 1

## ❸ 三角関数

数学Ⅰで学んだサイン（正弦），コサイン（余弦），タンジェント（正接）を，一般角について定義しよう。座標平面上で，原点Oを中心とする半径 $r$ の円をかく。そして，$x$ 軸の正の部分を始線として，角 $\theta$ の動径と円Oの交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。




このとき

$$\frac{y}{r},\quad \frac{x}{r},\quad \frac{y}{x}$$

の値は円Oの半径 $r$ の大きさに関係なく，角 $\theta$ だけによって定まるから，次のように表す。

**三角関数の定義**

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r},\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，$\theta$ の **三角関数** という。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の場合，これらは数学Ⅰで学んだ三角比の値と一致する。

**注意**　$\tan\theta$ は，$x=0$ となるような $\theta$ に対しては定義されない。

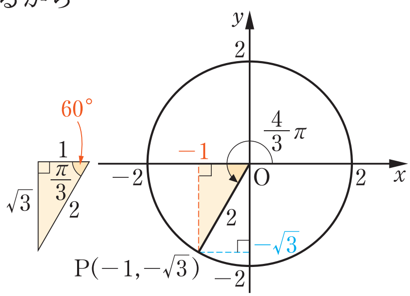
上の定義にもとづいて，いろいろな角の三角関数の値を求めてみよう。

**例 5**　右の図で，原点Oを中心とする半径 2 の円と $\frac{4}{3}\pi$ の動径の交点Pの座標は $(-1,\ -\sqrt{3})$ であるから

$$\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$$

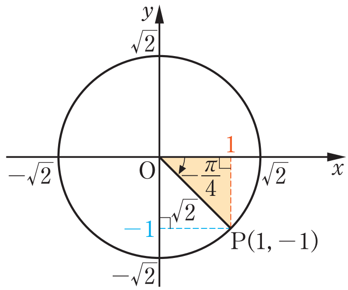


**例 6** 右の図で，原点Oを中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円と $-\dfrac{\pi}{4}$ の動径の交点Pの座標は $(1,\ -1)$ であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{1}=-1$$




**問 7** $\theta$ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。 p.133 Training 2

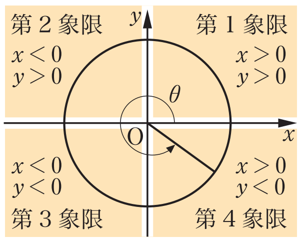
(1) $\dfrac{7}{6}\pi$　　(2) $\dfrac{9}{4}\pi$　　(3) $-\dfrac{\pi}{3}$　　(4) $-3\pi$

例 6 のように，角 $\theta$ の動径が第 4 象限にあるとき，$\theta$ を **第 4 象限の角** という。

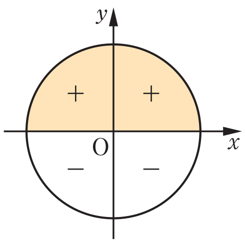
他の象限についても同様である。

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の正負は，$\theta$ がどの象限の角であるかによって定まる。

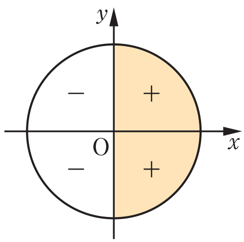
これを図に示すと，次のようになる。



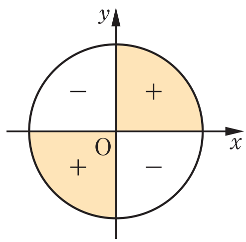

sinθ の正負




cosθ の正負




tanθ の正負

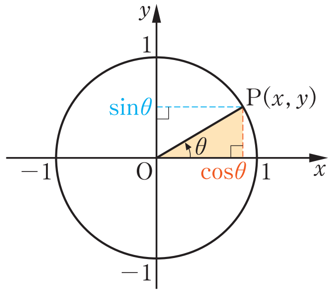



**問 8** 次の条件を満たす角 $\theta$ は第何象限の角か。

(1) $\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$　　(2) $\tan\theta<0$，$\cos\theta<0$

## 三角関数と単位円

原点Oを中心とする半径1の円を **単位円** という。単位円を用いて，三角関数の性質を調べてみよう。




右の図のように，単位円と角 $\theta$ の動径の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，三角関数の定義において，$r=1$ として

$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

が成り立つ。すなわち，Pの座標は

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

点Pは単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

$$\boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta \leqq 1,\qquad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1}$$ ←── $-1\leqq y\leqq 1,\ \ -1\leqq x\leqq 1$

次に，単位円を表す円の方程式 $x^2+y^2=1$ より

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

さらに，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ より　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって　　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

したがって，一般角の三角関数についても，数学Ⅰで学んだ三角比と同様に，次の公式が成り立つ。

### 三角関数の相互関係

[1] $\boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

[2] $\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$　　[3] $\boldsymbol{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

**例題 1** 三角関数の相互関係 [1]

$\theta$ が第 3 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

**解** $\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$ より $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

$\theta$ が第 3 象限の角であるから，$\sin\theta<0$ である。

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$ …… 答

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{4}{5}\right)\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{3}$ …… 答

**問 9** (1) $\theta$ が第 4 象限の角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\theta$ が第 3 象限の角で，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 3(1)

**例題 2** 三角関数の相互関係 [2]

$\theta$ が第 4 象限の角で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

**解** $\boxed{\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta}=1+(-2)^2=5$ より　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\theta$ が第 4 象限の角であるから，$\cos\theta>0$ である。

よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ …… 答

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-2)\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ …… 答

**問 10** $\theta$ が第 3 象限の角で，$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 3(2)

## 例題 3　相互関係による式の値

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

**解**　与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　　$2\sin\theta\cos\theta+1=\dfrac{1}{4}$

よって　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-1\right)=-\dfrac{3}{8}$　…… 答

また　　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　←― $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}\quad\cdots\cdots \text{答}$$

**問 11**　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

p.133 Training 4　p.144 Level Up 1

## 例題 4　相互関係による式変形

等式 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

**証明**　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$　　←― $\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

ゆえに　　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

**問 12**　等式 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ を証明せよ。

p.133 Training 5

## ❹ 三角関数の性質

$n$ を整数とするとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 $\theta$ の動径に一致するから，次の公式が成り立つ。

**$\theta+2n\pi$ の三角関数**

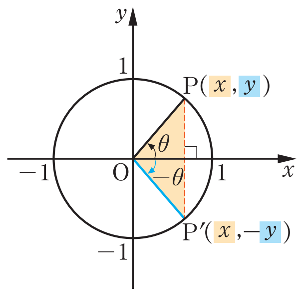
[1] $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$

$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$

$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

**例 7** $\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

次に，角 $-\theta$ の動径 OP′ は，角 $\theta$ の動径 OP と $x$ 軸に関して対称であるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(x,\ -y)$ となる。よって




$$\sin(-\theta)=-\boxed{y}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\boxed{x}=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

すなわち，$-\theta$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

**$-\theta$ の三角関数**

[2] $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

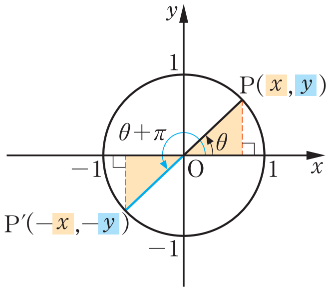
$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

**例 8** $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**問 13** $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。

角 $\theta+\pi$ の動径 OP′ は，角 $\theta$ の動径 OP を原点 O のまわりに $\pi$ だけ回転したもので，点 P と点 P′ は原点に関して対称である。




よって，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-x,\ -y)$ となる。

$$\sin(\theta+\pi)=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(\theta+\pi)=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(\theta+\pi)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

すなわち，$\theta+\pi$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

**$\theta+\pi$ の三角関数**

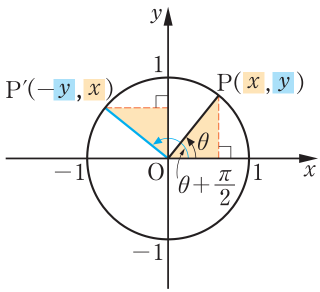
[3] $\boldsymbol{\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta}$　　$\boldsymbol{\tan(\theta+\pi)=\tan\theta}$

$\boldsymbol{\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta}$

**例 9**　$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

**問 14**　$\sin\frac{5}{4}\pi$，$\cos\frac{5}{4}\pi$，$\tan\frac{5}{4}\pi$ の値を求めよ。

角 $\theta+\frac{\pi}{2}$ の動径 OP′ は，角 $\theta$ の動径 OP を原点 O のまわりに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものであるから，点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-y,\ x)$ となる。




よって　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=x=\cos\theta$

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-y=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{\frac{y}{x}}=-\frac{1}{\tan\theta}$$

すなわち，$\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数について，次の公式が成り立つ。

### $\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数

[4] $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

さらに，公式 [3]，[4] の $\theta$ を $-\theta$ で置き換えることにより，次の公式が成り立つ。

### $\pi-\theta$，$\frac{\pi}{2}-\theta$ の三角関数

[5] $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

[6] $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

**例 10**

$\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$ ←公式 [4]

$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}$ ←公式 [6]

**問 15** 次の □ にあてはまる鋭角を答えよ。 p.133 Training 6 p.144 Level Up 2

(1) $\sin\frac{7}{8}\pi=\cos\square$

(2) $\tan\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{\tan\square}$

(3) $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\square$

(4) $\cos\frac{5}{6}\pi=-\cos\square$

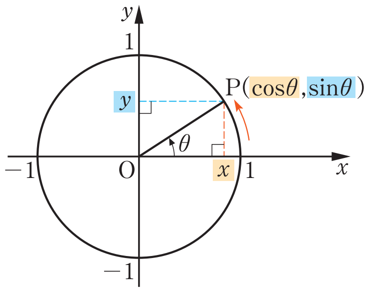
(5) $\cos\frac{3}{8}\pi=\sin\square$

(6) $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\tan\square}$

# 5 三角関数のグラフ

## $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ のグラフ

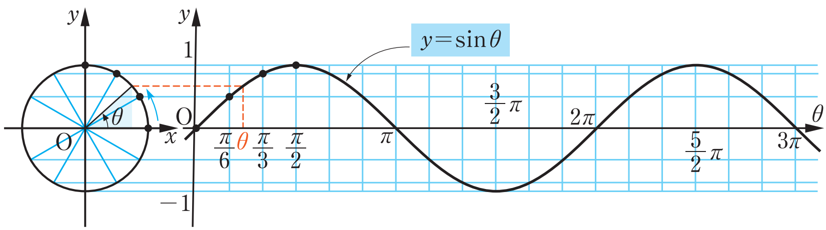
右の図において，角 $\theta$ の動径と単位円の交点Pの座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。すなわち，Pの $y$ 座標が $\sin\theta$ である。




このことを利用すると，関数

$$y=\sin\theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。

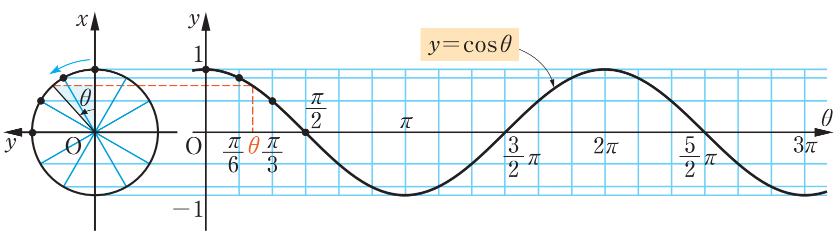



$y=\sin\theta$ のグラフの形の曲線を **正弦曲線** という。

また，点Pの $x$ 座標が $\cos\theta$ であることから，関数

$$y=\cos\theta$$

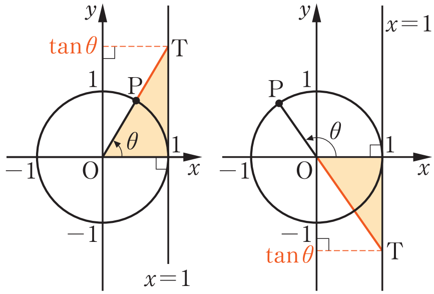
のグラフを次のようにしてかくことができる。




$y=\cos\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを $\theta$ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであり，$y=\cos\theta$ のグラフも正弦曲線である。

## $y = \tan\theta$ のグラフ

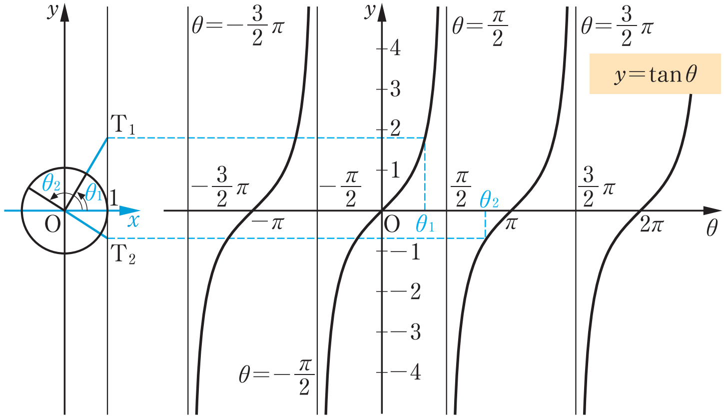
角 $\theta$ の動径を OP とし，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T とすると，T の $y$ 座標は $\tan\theta$ である。




このことを利用すると，関数

$$y = \tan\theta$$

のグラフを次のようにしてかくことができる。




$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，$\theta$ が 0 から増加するにつれて，$\tan\theta$ の値も増加する。そして，$\theta$ が $\dfrac{\pi}{2}$ に近づけば，$\tan\theta$ の値は限りなく大きくなり，グラフは直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このように，グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの **漸近線** という。同様に考えると，直線

$$\cdots,\ \theta = -\frac{3}{2}\pi,\ \theta = -\frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{3}{2}\pi,\ \cdots$$

は，$y = \tan\theta$ のグラフの漸近線である。

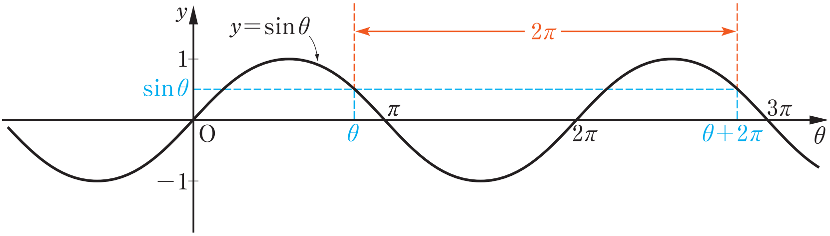
## 三角関数のグラフの性質

$\sin\theta$，$\cos\theta$ については，次の公式が成り立つ。

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

← p.119 公式 [1]

このことから，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは $2\pi$ ごとに同じ形がくり返されることがわかる。




一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 $p$ があって，等式

$$\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}$$

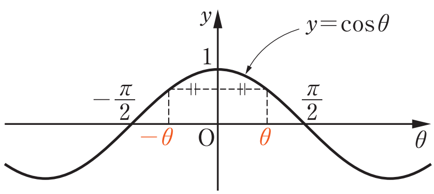
がすべての $x$ に対して成り立つとき，$f(x)$ を，$p$ を周期とする **周期関数** という。このとき，周期は無数にあるが，ふつうは，正で最小のものを **周期** という。

三角関数は周期関数で，**$\sin\theta$，$\cos\theta$ の周期は $2\pi$** である。また，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ が成り立つので，**$\tan\theta$ の周期は $\pi$** である。

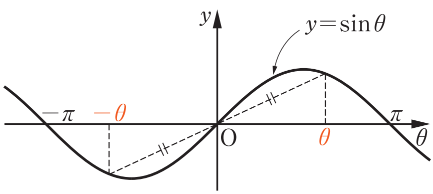
さらに，119 ページの公式 [2] より

$$\cos(-\theta)=\cos\theta,\qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

このことから，関数 $y=\cos\theta$ のグラフは **$y$ 軸に関して対称** であり，関数 $y=\sin\theta$ のグラフは **原点に関して対称** であることがわかる。




$\cos(-\theta)=\cos\theta$




$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

また，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ が成り立つので，$y=\tan\theta$ のグラフは **原点に関して対称** である。

## いろいろな三角関数のグラフ

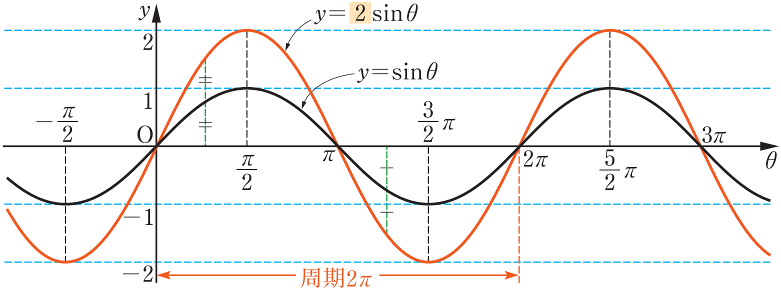
**例 11**　$y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

$y=\boxed{2}\sin\theta$ のグラフは

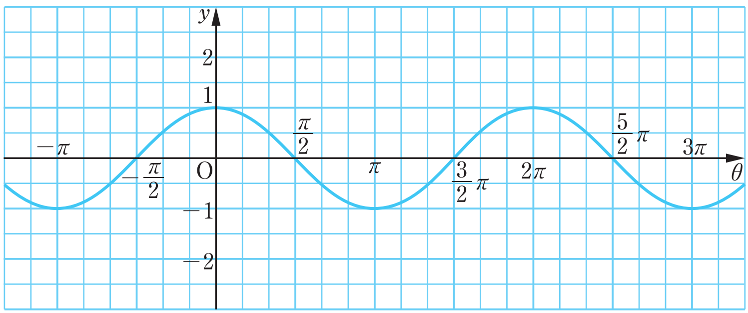
$y=\sin\theta$ のグラフを $y$ 軸方向に $\boxed{2}$ 倍

に拡大したものである。

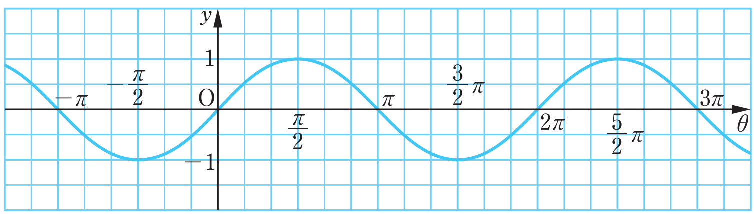
関数 $y=2\sin\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ と同じく $2\pi$ である。




**問 16**　$y=2\cos\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



**問 17**　$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。



p.133 Training 7(1)

**例 12** $y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフをかいてみよう。

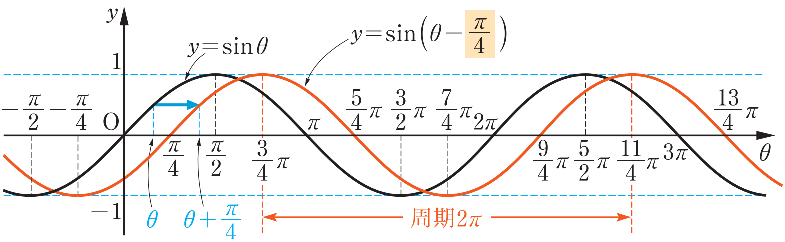
| $\theta$ | $-\dfrac{\pi}{2}$ | $-\dfrac{\pi}{4}$ | $0$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{3}{4}\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $-1$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ |
| $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ |

上の表からわかるように，$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは

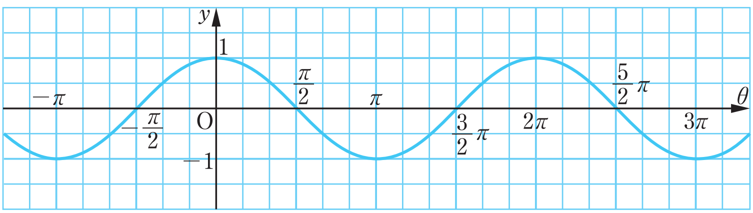
$y=\sin\theta$ のグラフを $\theta$ 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動

したものである。

関数 $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ の周期は，$y=\sin\theta$ と同じく $2\pi$ である。




**問 18** $y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。




p.133 Training 7(2)

**例 13**　$y=\sin\theta$ のグラフをもとにして，$y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

右の表からわかるように

$$y=\sin 2\theta$$

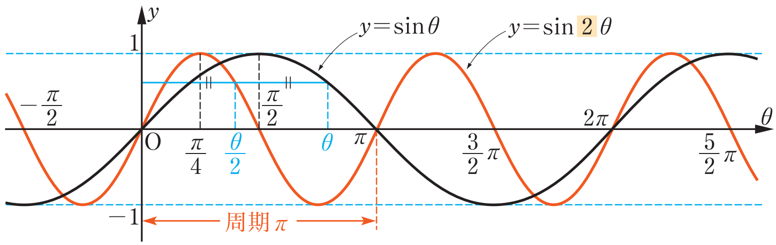
のグラフは

$$y=\sin\theta$$

のグラフを $\theta$ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

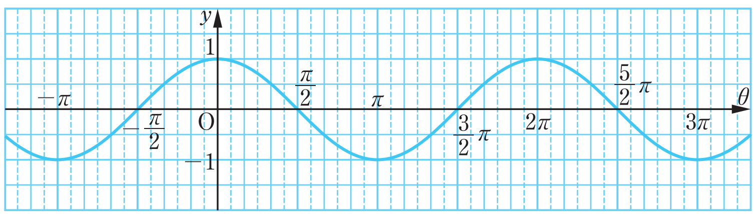
| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5}{12}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | $1$ |
| $\sin 2\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | | | |

したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $y=\sin\theta$ の周期 $2\pi$ の $\dfrac{1}{2}$ 倍で，$\pi$ である。




上と同様に考えると，$a$ を正の定数とするとき，**$\sin a\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{a}$** であり，**$\cos a\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{a}$** である。また，**$\tan a\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{a}$** である。

**問 19**　$y=\cos 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。




p.144 Level Up 3,4

**問 20**　$y=\tan 2\theta$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

p.133 Training 7(3)

## 6 三角関数を含む方程式・不等式

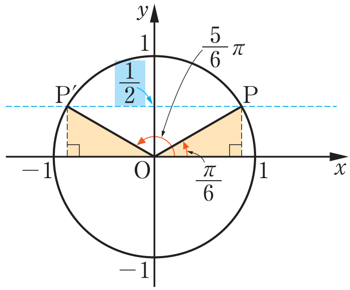
三角関数を含む方程式や不等式を解いてみよう。

**例題 5** 三角関数を含む方程式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす $\theta$ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　　(2) $\tan\theta = \sqrt{3}$

**解** (1) 右の図のように，単位円の周上で，$y$ 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。

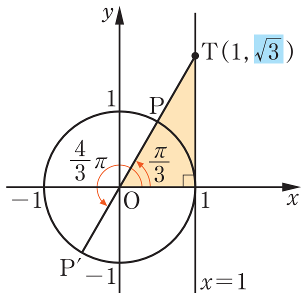



よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\theta$ の値を求めると

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

(2) 右の図のように，点 T$(1,\ \sqrt{3})$ と原点を通る直線と単位円の交点を P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角が求める角である。

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\theta$ の値を求めると




$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$$

**問21** $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす $\theta$ の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3) $\tan\theta = -1$

p.133 Training 8

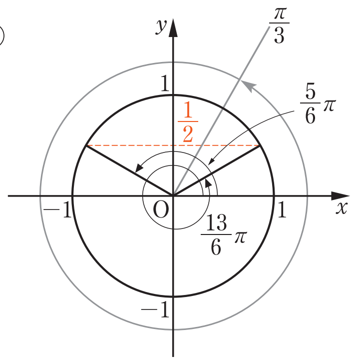
**例題 6** 　三角関数を含むやや複雑な方程式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ を満たす $\theta$ の値を求めよ。

**考え方** 　$\theta+\dfrac{\pi}{3}$ の値の範囲に注意して，まず $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ の値を求める。

**解** 　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

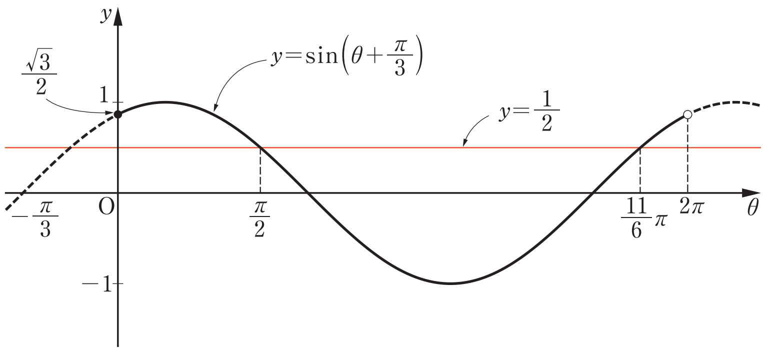



単位円の周上で，$y$ 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ の値は，① の範囲で

$$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi$

**注意** 　例題 6 の解は，関数 $y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフが直線 $y=\dfrac{1}{2}$ と交わる点の $\theta$ の値である。




**問22** 　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす $\theta$ の値を求めよ。

(1) $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 　　(2) $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

p.133 Training 9　p.144 Level Up 5(1)

**例題 7**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす $\theta$ の値の範囲を求めよ。

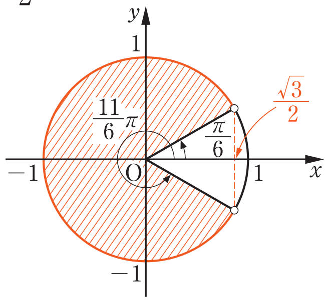
(1) $\cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2) $\sin\theta \geqq -\dfrac{1}{2}$

**解**

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる $\theta$ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$

であるから，求める角 $\theta$ の動径は，右の図の斜線部分にある。



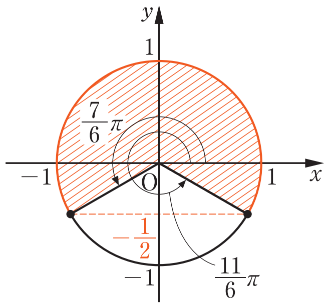

ゆえに　　$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{11}{6}\pi$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，

$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ となる $\theta$ の値は

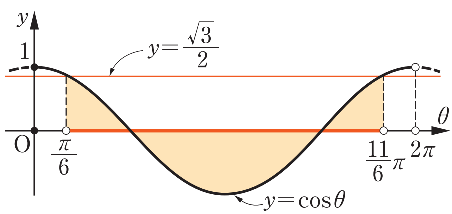
$$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

であるから，求める角 $\theta$ の動径は，右の図の斜線部分にある。




ゆえに　　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi$

**注意**　例題 7 (1) の解は，関数 $y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある $\theta$ の値の範囲である。




**問23**　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす $\theta$ の値の範囲を求めよ。

(1) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta > \dfrac{1}{2}$　　(3) $\sin\theta \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

p.133 Training 10(1),(2)　　p.144 Level Up 5(2),6

**例題 8** 三角関数を含む不等式 [2]

$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3} < \tan\theta < 1$ を満たす $\theta$ の値の範囲を求めよ。

**解** $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，

$\tan\theta = -\sqrt{3}$ となる $\theta$ の値は

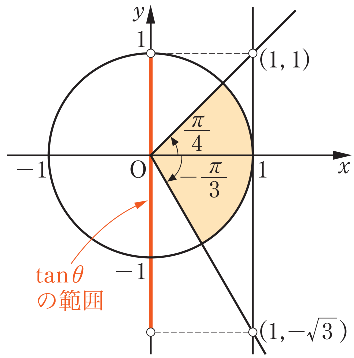
$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

$\tan\theta = 1$ となる $\theta$ の値は

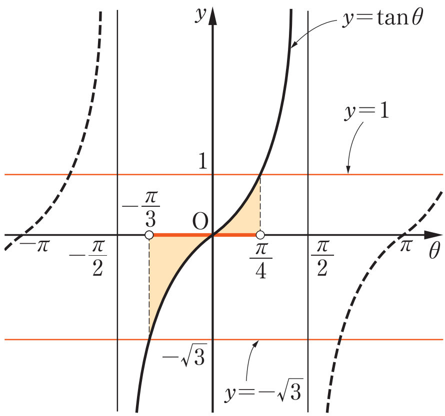
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって，右の図から，不等式を満たす $\theta$ の値の範囲は

$$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}$$




**注意** 例題 8 の解は，関数 $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = 1$ より下側で，しかも直線 $y = -\sqrt{3}$ より上側にある $\theta$ の値の範囲である。




**問24** $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式を満たす $\theta$ の値の範囲を求めよ。

(1) $-1 < \tan\theta < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $\tan\theta \leqq \sqrt{3}$

p.133 Training 10(3)

# Challenge（チャレンジ） 例題 三角関数を含む関数の最大・最小

やや複雑な三角関数を含む関数の最大値，最小値を調べてみよう。

**例題**

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

$$y = \sin^2\theta + \sin\theta$$

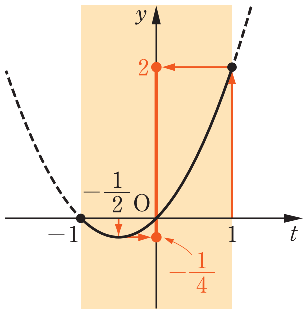
**考え方** $\sin\theta = t$ とおくことによって，与えられた関数を $t$ の 2 次関数とみて考える。

**解** $\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$-1 \leqq t \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$y$ を $t$ で表すと

$$y = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$




よって，① の範囲でこの関数は

$t = 1$ のとき　最大値 2

$t = -\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{4}$

をとる。ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$\sin\theta = 1$ となるのは　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ となるのは　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき

したがって

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値 2

$\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{4}$

**問 1** $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

(1) $y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$　　(2) $y = \cos^2\theta + \sin\theta$

## Training トレーニング

**1**　半径 4，中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。 p.113

**2**　$\theta$ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。 p.115

(1)　$\dfrac{11}{6}\pi$　　(2)　$\dfrac{11}{4}\pi$　　(3)　$-\dfrac{2}{3}\pi$　　(4)　$5\pi$

**3**　次の問に答えよ。 p.117

(1)　$\theta$ が第 4 象限の角で $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\theta$ が第 3 象限の角で $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

**4**　$\theta$ は第 1 象限の角で，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta+\cos\theta$　　(3)　$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ p.118

**5**　等式 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos\theta}$ を証明せよ。 p.118

**6**　$\sin\dfrac{5}{8}\pi=a$，$\cos\dfrac{5}{8}\pi=b$ とおくとき，次の値を $a$，$b$ を用いて表せ。

(1)　$\sin\dfrac{9}{8}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\dfrac{3}{8}\pi\right)$　　(3)　$\tan\dfrac{17}{8}\pi$ p.121

**7**　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。 p.125-127

(1)　$y=-\tan\theta$　　(2)　$y=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(3)　$y=\dfrac{1}{2}\cos 3\theta$

**8**　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を満たす $\theta$ の値を求めよ。 p.128

(1)　$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

**9**　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を満たす $\theta$ の値を求めよ。 p.129

(1)　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

**10**　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき,次の不等式を満たす $\theta$ の値の範囲を求めよ。 p.130-131

(1)　$2\sin\theta-\sqrt{3}\geqq 0$　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta-1>0$　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta+1\geqq 0$