

# 1節 点と直線

## 1 直線上の点の座標

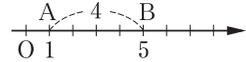
数直線上の点には実数が対応している。点Pに実数  $x$  が対応しているとき、**点Pの座標は  $x$**  であるといい、 $P(x)$  と書く。

### 数直線上の2点間の距離

5

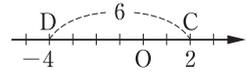
例1 (1) 2点  $A(1)$ ,  $B(5)$  間の距離  $AB$  は

$$AB = 5 - 1 = 4$$



(2) 2点  $C(2)$ ,  $D(-4)$  間の距離  $CD$  は

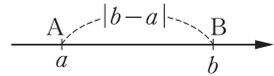
$$CD = 2 - (-4) = 6$$



数直線上において、原点と点  $P(x)$  の距離を実数  $x$  の絶対値といい、 $|x|$  で表す。2点  $A(a)$ ,  $B(b)$  間の距離  $AB$  は、 $a$ ,  $b$  の大小に関係なく、絶対値の記号を用いて次のように表される。

10

$$AB = |b - a|$$



問1 次の2点  $A$ ,  $B$  間の距離を求めよ。

(1)  $A(9)$ ,  $B(1)$

(2)  $A(-2)$ ,  $B(5)$

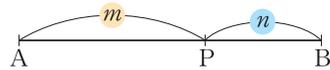
15

### 内分点・外分点

$m$ ,  $n$  は正の数とする。

線分  $AB$  上に点  $P$  があって

$$AP : PB = m : n$$

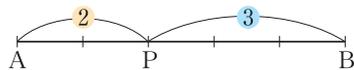


が成り立つとき、点  $P$  は線分  $AB$  を  $m : n$  に **内分する** という。このとき、点  $P$  を線分  $AB$  の **内分点** という。

20

とくに、線分  $AB$  の中点は  $AB$  を  $1 : 1$  に内分する点である。

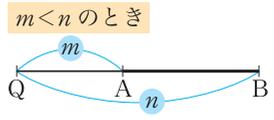
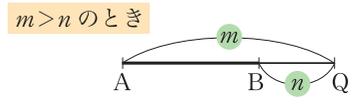
例2 右の図において、点  $P$  は線分  $AB$  を  $2 : 3$  に内分する。



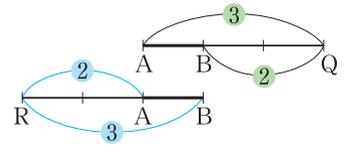
$m, n$  は正の数で,  $m \neq n$  とする。  
線分  $AB$  の延長上に点  $Q$  があって

$$AQ : QB = m : n$$

5 が成り立つとき, 点  $Q$  は線分  $AB$  を  $m : n$  に **外分する** という。このとき, 点  $Q$  を線分  $AB$  の **外分点** という。



**例 3** 右の図において, 点  $Q$  は線分  $AB$  を  $3 : 2$  に外分し, 点  $R$  は線分  $AB$  を  $2 : 3$  に外分する。



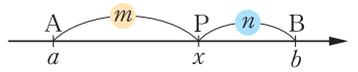
10 **問 2** 下の図において, 線分  $AB$  を  $2 : 1$  に内分する点  $P$ ,  $2 : 1$  に外分する点  $Q$ ,  $1 : 2$  に外分する点  $R$  をそれぞれ図示せよ。



2 点  $A(a), B(b)$  に対して, 線分  $AB$  を  $m : n$  に内分する点  $P$  の座標  $x$  を求めてみよう。

$a < b$  のとき

15  $a < x < b$  であるから



$$AP = x - a, \quad PB = b - x$$

よって  $(x - a) : (b - x) = m : n$

ゆえに  $n(x - a) = m(b - x)$   $\longleftarrow p : q = p' : q' \iff pq' = qp'$

これを解くと

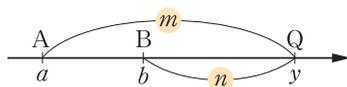
$$x = \frac{na + mb}{m + n}$$

20  $a > b$  のときも同様にして同じ式が導かれる。

次に、2点  $A(a)$ ,  $B(b)$  に対して、線分  $AB$  を  $m:n$  に外分する点  $Q$  の座標  $y$  を求めてみよう。

$a < b$ ,  $m > n$  のとき

$$AQ = y - a, \quad QB = y - b$$



ゆえに  $(y-a):(y-b) = m:n$  すなわち  $n(y-a) = m(y-b)$  5

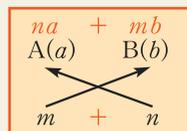
これを解くと 
$$y = \frac{-na + mb}{m - n}$$

この式は、 $a$  と  $b$ ,  $m$  と  $n$  の大小に関係なく成り立つ。

### 内分点・外分点の座標

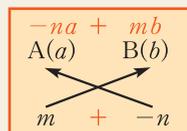
2点  $A(a)$ ,  $B(b)$  に対して、線分  $AB$  を

$m:n$  に内分する点  $P$  の座標は 
$$\frac{na + mb}{m + n}$$



とくに、線分  $AB$  の **中点**  $M$  の座標は 
$$\frac{a+b}{2}$$

$m:n$  に外分する点  $Q$  の座標は 
$$\frac{-na + mb}{m - n}$$



10

**注意** 外分点の公式は、内分点の公式で  $n$  を  $-n$  に置き換えたものである。

**例 4** 2点  $A(-1)$ ,  $B(9)$  に対して、線分  $AB$  を  $4:1$  に内分する点  $P$

の座標を  $x$  とすると 
$$x = \frac{1 \cdot (-1) + 4 \cdot 9}{4 + 1} = 7$$

また、線分  $AB$  を  $3:1$  に外分する点  $Q$  の座標を  $y$  とすると

$$y = \frac{-1 \cdot (-1) + 3 \cdot 9}{3 - 1} = 14$$

15

**問 3** 2点  $A(3)$ ,  $B(6)$  に対して、次の点の座標を求めよ。

- (1) 線分  $AB$  を  $2:1$  に内分する点  $P$
- (2) 線分  $AB$  を  $2:3$  に外分する点  $Q$
- (3) 線分  $AB$  の中点  $M$

20

## 2 平面上の点の座標

### 座標平面上の点

平面上に座標軸を定めると、その平面上の点Pの位置は座標  $(a, b)$  で表される。

5 座標が  $(a, b)$  である点Pのことを  $P(a, b)$  と書く。

このようにして座標の定められた平面を **座標平面** という。

10 座標平面は  $x$  軸と  $y$  軸により図のように4つの象限しやうげんに分けられる。ただし、座標軸上の点はどの象限にも入らない。

各象限における  $x$  座標、 $y$  座標の符号は右の図のようになる。

15 たとえば、第2象限にある点は、 $x$  座標が負、 $y$  座標が正である。

**問4** 次の各点はどの象限にあるか。

A(4, -2), B(-3, 1), C(-5, -1), D(6, 5)

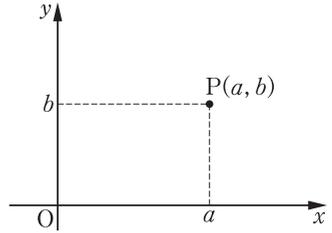
20 **例5** 点A(3, 2)について、 $x$  軸、 $y$  軸、原点に関して対称な点B, C, Dの座標は、それぞれ、B(3, -2), C(-3, 2), D(-3, -2)である。

25 **問5** 点P(5, -4)について、次の直線または点に関して対称な点の座標を求めよ。

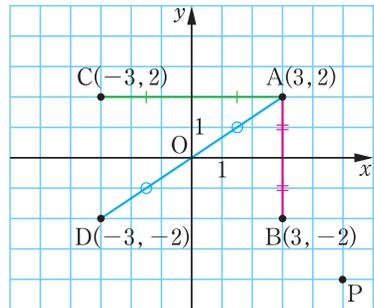
(1)  $x$  軸

(2)  $y$  軸

(3) 原点



象限と座標  $(x, y)$  の符号



## 2点間の距離

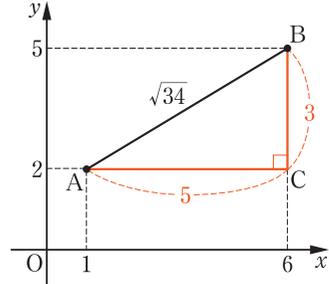
**例 6** 座標平面上の2点  $A(1, 2)$ ,  $B(6, 5)$  間の距離  $AB$  を求めてみよう。  
右の図のように直角三角形  $ABC$  をかけば、点  $C$  の座標は  $(6, 2)$  であり

$$AC = 6 - 1 = 5$$

$$BC = 5 - 2 = 3$$

よって、三平方の定理により

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \end{aligned}$$



一般に、次のことが成り立つ。

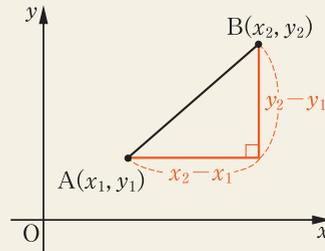
## 2点間の距離

2点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに、原点  $O$  と点  $P(x, y)$  の距離は

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$



**例 7** 2点  $A(1, 4)$ ,  $B(-2, 8)$  間の距離は

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (8 - 4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

原点  $O(0, 0)$  と点  $P(4, -6)$  の距離は

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} \\ &= \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

**問 6** 次の2点間の距離を求めよ。

p.81 Training 1、 p.104 LevelUp 1、

(1)  $A(4, 2)$ ,  $B(7, 3)$

(2)  $A(-1, 1)$ ,  $B(-4, -3)$

(3)  $O(0, 0)$ ,  $P(-4, 2)$

(4)  $A(3, -2)$ ,  $B(3, -9)$

## 内分点・外分点

2点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  に対して、線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点  $P$  の座標  $(x, y)$  を求めてみよう。

点  $A, B, P$  から  $x$  軸に垂線  $AA', BB', PP'$  を下ろすと、点  $P'$  は線分  $A'B'$  を  $m:n$  に内分する点である。  
よって、数直線上の内分点の公式により

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

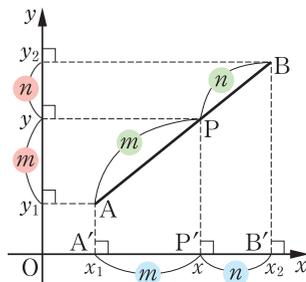
また、点  $A, B, P$  から  $y$  軸に垂線を下ろして  $x$  座標と同様に考えれば、 $y$  座標は

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

よって、 $P$  の座標は

$$\left( \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$

外分点の座標も、内分点の場合と同様に求めることができる。



## 内分点・外分点の座標

2点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  に対して、線分  $AB$  を  $m:n$  に **内分する** 点  $P$  の座標は

$$\left( \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$

とくに、線分  $AB$  の **中点**  $M$  の座標は

$$\left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$m:n$  に **外分する** 点  $Q$  の座標は

$$\left( \frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

**例 8**

2点  $A(-2, 1)$ ,  $B(4, 4)$  がある。

線分  $AB$  を  $2:1$  に内分する点  $P$ ,  $2:1$  に外分する点  $Q$  の座標を求めてみよう。

$P$  の座標を  $(x, y)$  とすると

$$x = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{2+1} = 2, \quad y = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2+1} = 3$$

したがって、点  $P$  の座標は  $(2, 3)$  である。

次に、 $Q$  の座標を  $(x', y')$  とすると

$$x' = \frac{-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{2-1} = 10, \quad y' = \frac{-1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2-1} = 7$$

したがって、点  $Q$  の座標は  $(10, 7)$  である。

5

**問 7**

次の 2 点  $A, B$  に対して、線分  $AB$  を  $4:3$  に内分する点  $P$ ,  $4:3$  に外分する点  $Q$ , および線分  $AB$  の中点  $M$  の座標を求めよ。

(1)  $A(2, 1)$ ,  $B(9, 8)$

(2)  $A(-2, 3)$ ,  $B(6, -1)$

[p.81 Training 2](#)

10

**例題**

ある点に関して対称な点

**1**

点  $A(2, 3)$  に関して、点  $P(-1, 2)$  と対称な点  $Q$  の座標を求めよ。

15

**解**

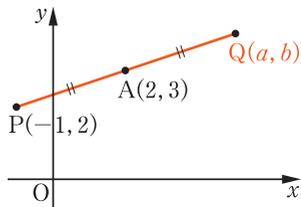
点  $Q$  の座標を  $(a, b)$  とすると、線分  $PQ$  の中点が点  $A$  であるから

$$\frac{-1+a}{2} = 2, \quad \frac{2+b}{2} = 3$$

よって  $a = 5$ ,  $b = 4$

であるから、点  $Q$  の座標は

$(5, 4)$



20

**問 8**

点  $A(-3, 1)$  に関して、点  $P(4, 3)$  と対称な点  $Q$  の座標を求めよ。

[p.81 Training 3](#), [p.104 LevelUp 2](#)

## 三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を **中線** という。三角形の3本の中線は1点で交わり、この点をその三角形の **重心** という。重心はそれぞれの中線を2:1に内分する点である。

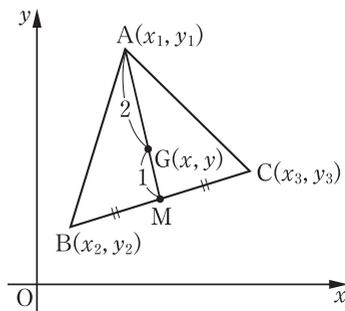
- 5 3点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の座標を求めてみよう。

辺  $BC$  の中点を  $M$  とすると、点  $M$  の座標は  $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$  である。

重心  $G(x, y)$  は線分  $AM$  を2:1に内分するから

$$10 \quad x = \frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{1 \cdot y_1 + 2 \cdot \frac{y_2+y_3}{2}}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$



以上より、次のことがわかる。

### 三角形の重心の座標

- 15 3点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の座標は  $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

- 例9** 3点  $A(2, 3)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(6, 1)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の座標  $(x, y)$  を求めてみよう。

$$x = \frac{2+1+6}{3} = 3, \quad y = \frac{3+(-1)+1}{3} = 1$$

したがって、 $G$  の座標は  $(3, 1)$

- 20 **問9** 次の3点を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の座標を求めよ。

(1)  $A(5, -3)$ ,  $B(4, 7)$ ,  $C(-6, 2)$

(2)  $A(0, -4)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(2, -4)$

### ③ 直線の方程式

$x, y$  についての方程式を満たす点  $(x, y)$  全体の集合を、その **方程式の表す図形** という。また、その方程式をその **図形の方程式** という。

ここでは、直線の方程式について考えてみよう。

#### 1 点を通り傾きが $m$ の直線

点  $A(x_1, y_1)$  を通り、傾きが  $m$  の直線の方程式を求めてみよう。

直線と  $y$  軸との交点の  $y$  座標を **y 切片** せつぺん という。y 切片を  $n$  とすると、この直線の方程式は

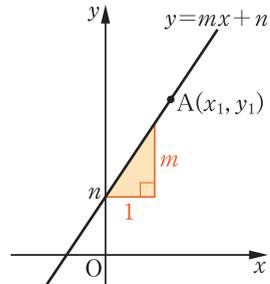
$$y = mx + n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表される。① が点  $A(x_1, y_1)$  を通るから

$$y_1 = mx_1 + n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



#### 1 点を通り傾きが $m$ の直線

点  $(x_1, y_1)$  を通り、傾きが  $m$  の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**例 10** 点  $(2, -5)$  を通り、傾きが  $-4$  の直線の方程式は

$$y - (-5) = -4(x - 2)$$

すなわち

$$y = -4x + 3$$

**問 10** 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点  $(1, 3)$  を通り、傾きが  $2$  の直線

(2) 点  $(-3, 4)$  を通り、傾きが  $-\frac{1}{3}$  の直線

## 2点を通る直線

異なる2点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  を通る直線の方程式を求めてみよう。

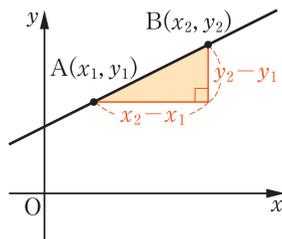
(i)  $x_1 \neq x_2$  のとき

直線 AB の傾き  $m$  は

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

さらに点  $(x_1, y_1)$  を通るから、その直線の方程式は

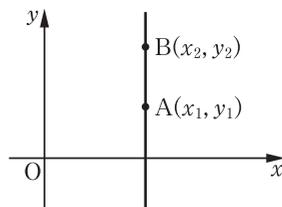
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



(ii)  $x_1 = x_2$  のとき

直線 AB は  $y$  軸に平行であるから、その直線の方程式は

$$x = x_1$$



## 2点を通る直線

2点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  を通る直線の方程式は

$$x_1 \neq x_2 \text{ のとき} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ のとき} \quad x = x_1$$

**例 11** (1) 2点  $A(2, -1)$ ,  $B(4, 3)$  を通る直線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$$

$$\text{すなわち} \quad y = 2x - 5$$

(2) 2点  $A(1, -2)$ ,  $B(1, 5)$  を通る直線の方程式は  $x = 1$

**問 11** 次の2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)  $A(-2, 3)$ ,  $B(1, 9)$

(2)  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 6)$

(3)  $A(-4, 1)$ ,  $B(-4, 5)$

(4)  $A(2, 5)$ ,  $B(-7, 5)$

## 1 次方程式と直線

方程式  $ax + by + c = 0$  の表す図形について考えてみよう。

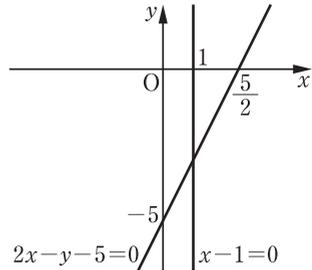
### 例 12

2つの方程式  $2x - y - 5 = 0$ ,

$x - 1 = 0$  は、それぞれ

$$y = 2x - 5, x = 1$$

と変形できるので、ともに直線を表す。



5

一般に、 $a \neq 0$  または  $b \neq 0$  のとき、 $x, y$  の1次方程式  $ax + by + c = 0$  の表す図形は直線である。

2直線の交点の座標は、2直線を表す方程式を連立させた連立2元1次方程式の解として得られる。

10

### 例題

#### 2 直線の交点を通る直線

2

2直線  $x + y - 4 = 0$ ,  $2x - y + 1 = 0$  の交点と点  $(-2, 1)$  を通る直線の方程式を求めよ。

解

$$\text{連立方程式} \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

を解くと、 $x = 1, y = 3$

となるから、交点の座標は

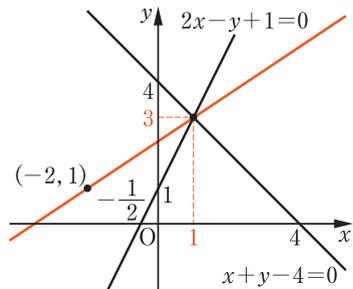
$(1, 3)$  である。

求める直線は2点  $(-2, 1)$ ,

$(1, 3)$  を通るから、その方程式は

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{1 - (-2)} \{x - (-2)\}$$

すなわち  $2x - 3y + 7 = 0$



15

20

### 問 12

2直線  $x + 2y + 1 = 0$ ,  $x - y - 5 = 0$  の交点と点  $(1, 2)$  を通る直線の方程式を求めよ。

25

参考

2直線の交点を通る直線

前ページの例題2で求めた2直線の交点を通る直線の方程式を、別の方法で考えてみよう。

2つの直線  $x + y - 4 = 0$  ..... ①

5  $2x - y + 1 = 0$  ..... ②

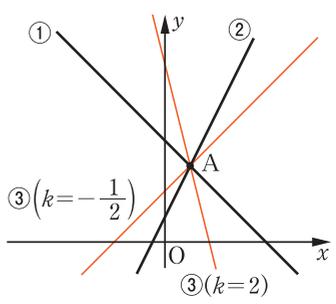
は平行でないから、1点Aで交わる。このとき、 $k$ を定数として

$$k(x + y - 4) + (2x - y + 1) = 0 \quad \text{..... ③}$$

を考えると、③は点Aを通る直線を表す。

このことを示してみよう。

10 ①、②をともに満たす $x, y$ の値の組は③も満たすから、③で表される図形は2直線①、②の交点Aを通る。



また、③を変形すると

$$(k + 2)x + (k - 1)y + (-4k + 1) = 0$$

15 となる。どのような $k$ に対しても、 $x$ の係数 $k + 2$ と $y$ の係数 $k - 1$ が同時には0にならないから、この1次方程式が表す図形は直線である。

したがって、③は2直線①、②の交点Aを通る直線を表す。

例1

2直線①、②の交点Aと点B(-2, 1)を通る直線の方程式を求めてみよう。③に、 $x = -2, y = 1$ を代入して

20  $k\{(-2) + 1 - 4\} + \{2 \cdot (-2) - 1 + 1\} = 0$

よって  $k = -\frac{4}{5}$

③より  $-\frac{4}{5}(x + y - 4) + (2x - y + 1) = 0$

したがって、求める直線ABの方程式は  $2x - 3y + 7 = 0$

問1

2直線  $4x - 5y + 5 = 0, x + 2y - 6 = 0$ の交点と点(1, 1)を通る直線の方程式を求めよ。

25

## 4 2直線の関係

### 平行条件と垂直条件

2直線  $y = mx + n$ ,  $y = m'x + n'$  が平行になるのは、傾きが等しい、すなわち

$$m = m'$$

のときである。ただし、 $m = m'$ ,  $n = n'$  のとき、2直線は一致するが、このときも平行と考えることにする。

次に  $m \neq 0$ ,  $m' \neq 0$  であるとき、原点を通る2直線  $y = mx$ ,  $y = m'x$  が垂直になる条件を調べてみよう。

直線  $y = mx$  上に点  $A(1, m)$  をとり、点  $A$  から  $x$  軸、 $y$  軸にそれぞれ垂線  $AB$ ,  $AC$  を下ろす。右の図のように長方形  $ACOB$  と合同な長方形  $A'C'O'B'$  を考える。このとき、対角線  $OA$  と  $OA'$  は垂直である。

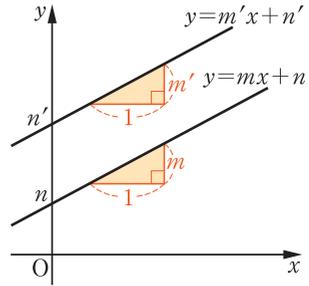
点  $A'$  の座標は  $(-m, 1)$  で、2直線  $y = mx$ ,  $y = m'x$  が垂直になるのは、点  $A'$  が直線  $y = m'x$  上にあるときであるから

$$1 = m' \cdot (-m)$$

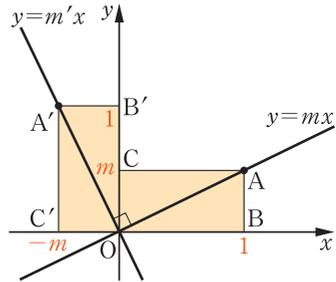
すなわち

$$mm' = -1 \quad \text{---} \quad m' = -\frac{1}{m}$$

2直線  $y = mx$ ,  $y = m'x$  が垂直であれば、これらを平行移動して得られる2直線  $y = mx + n$ ,  $y = m'x + n'$  も垂直である。



5



10

15

### 平行条件と垂直条件

2直線  $y = mx + n$ ,  $y = m'x + n'$  について

2直線が平行  $\iff m = m'$

2直線が垂直  $\iff mm' = -1$

25



ある直線に関して対称な点について考えてみよう。

**例題**

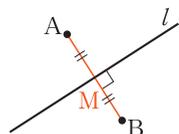
ある直線に関して対称な点

**4** 直線  $x+2y-10=0$  に関して、点  $A(1, 2)$  と対称な点  $B$  の座標を求めよ。

**考え方** 2点  $A, B$  が、ある直線  $l$  に関して対称である条件は

- (i) 直線  $AB$  は直線  $l$  に垂直である
- (ii) 線分  $AB$  の中点  $M$  は直線  $l$  上にある

が成り立つことである。



**解** 直線  $x+2y-10=0$  を  $l$  とし、点  $B$  の座標を  $(a, b)$  とする。

直線  $l$  の傾きは  $-\frac{1}{2}$

直線  $AB$  の傾きは  $\frac{b-2}{a-1}$

直線  $l$  と直線  $AB$  は垂直であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-2}{a-1} = -1$$

すなわち  $b = 2a$  …… ①

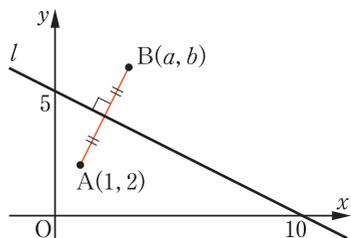
また、線分  $AB$  の中点  $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$  は  $l$  上にあるから

$$\frac{a+1}{2} + 2 \cdot \frac{b+2}{2} - 10 = 0$$

すなわち  $a + 2b - 15 = 0$  …… ②

①, ② より  $a = 3, b = 6$

したがって、点  $B$  の座標は  $(3, 6)$



5

10

15

20

**問15**

直線  $4x-2y-3=0$  に関して、点  $A(4, -1)$  と対称な点  $B$  の座標を求めよ。

p.81 Training 8、 p.104 Level Up 5、

## 点と直線の距離

直線  $l$  上にない点  $P$  から  $l$  に下ろした垂線  $PH$  の長さを **点  $P$  と直線  $l$  の距離** という。

点  $P$  の座標を  $(x_1, y_1)$ 、直線  $l$  の方程式を  $2x + 3y - 12 = 0$  とするとき、点  $P$  と直線  $l$  の距離  $d$  を求めてみよう。

点  $H$  の座標を  $(x_2, y_2)$  とおくと、垂直条

$$\text{件から } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

$$\text{すなわち } \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{3}$$

である。この値を  $k$  とおけば

$$x_2 - x_1 = 2k, \quad y_2 - y_1 = 3k$$

$$\text{すなわち } x_2 = x_1 + 2k, \quad y_2 = y_1 + 3k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また、点  $H$  は直線  $l$  上にあるから  $2x_2 + 3y_2 - 12 = 0$  である。

$$\text{よって、}\textcircled{1}\text{より } 2(x_1 + 2k) + 3(y_1 + 3k) - 12 = 0$$

$$(2^2 + 3^2)k + (2x_1 + 3y_1 - 12) = 0$$

$$\text{これより } k = -\frac{2x_1 + 3y_1 - 12}{2^2 + 3^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

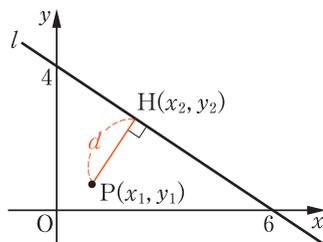
$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より

$$PH^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (2k)^2 + (3k)^2 = (2^2 + 3^2)k^2$$

$$= (2^2 + 3^2) \cdot \frac{(2x_1 + 3y_1 - 12)^2}{(2^2 + 3^2)^2} = \frac{(2x_1 + 3y_1 - 12)^2}{2^2 + 3^2}$$

$$\text{よって、求める距離は } d = PH = \frac{|2x_1 + 3y_1 - 12|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

一般に、次のことが成り立つ。



## 点と直線の距離

点  $(x_1, y_1)$  と直線  $ax + by + c = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

例 14 点  $(-2, -1)$  と直線  $4x + 3y + 1 = 0$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

問 16 次の点と直線の距離を求めよ。

p.81 Training 9、 p.104 LevelUp 6、

(1) 点  $(2, -3)$ , 直線  $x + 2y + 2 = 0$

(2) 原点, 直線  $4x - 3y - 5 = 0$

5

参考

中線定理

$\triangle ABC$  に関して, 次の定理が成り立つ。

### 中線定理

$\triangle ABC$  の辺  $BC$  の中点を  $M$  とすると

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

10

座標を利用して, 中線定理を証明してみよう。

証明

$M$  を原点, 直線  $BC$  を  $x$  軸にとると, 三角形の 3 つの頂点  $A, B, C$  の座標はそれぞれ

$$A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$$

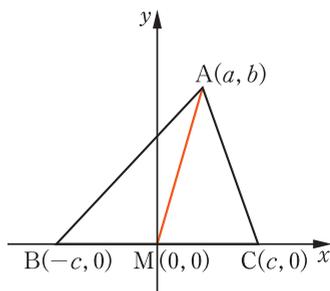
とおける。

このとき

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\} \\ &= (a^2 + 2ac + c^2 + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2 + b^2) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(AM^2 + BM^2) &= 2\{(a^2 + b^2) + c^2\} \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

ゆえに  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$



15

20

## Training トレーニング

- 1 次の2点間の距離を求めよ。 ↙ p.68  
(1)  $A(4, -2)$ ,  $B(-5, 7)$       (2)  $O(0, 0)$ ,  $A(4, -8)$
- 5 2 点  $A(-3, -2)$ ,  $B(4, 10)$  に対して、線分  $AB$  を  $2:5$  に内分する点  $P$ ,  
 $2:5$  に外分する点  $Q$  の座標を求めよ。 ↙ p.70
- 3 点  $A(-1, 1)$  に関して、点  $P(2, 3)$  と対称な点  $Q$  の座標を求めよ。 ↙ p.70
- 4 3 点  $A(2, 3)$ ,  $B(-1, 5)$ ,  $C(2, 1)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の座標  
を求めよ。 ↙ p.71
- 10 5 次の2点  $A$ ,  $B$  を通る直線の方程式を求めよ。 ↙ p.73  
(1)  $A(6, -1)$ ,  $B(-3, 5)$       (2)  $A(-2, 0)$ ,  $B(-2, 6)$
- 6 2 直線  $x+y+1=0$ ,  $3x-y+7=0$  の交点と原点を通る直線の方程  
式を求めよ。 ↙ p.74
- 15 7 2 点  $A(1, -3)$ ,  $B(7, 6)$  を通る直線を  $l$  とする。点  $C(3, 4)$  を通り、 $l$   
に平行な直線と、垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。 ↙ p.77
- 8 直線  $2x+y+4=0$  に関して、点  $A(-4, -1)$  と対称な点  $B$  の座標を求  
めよ。 ↙ p.78
- 9 次の点と直線の距離を求めよ。 ↙ p.80  
(1) 点  $(2, 4)$ , 直線  $2x-6y-5=0$   
20 (2) 点  $(-7, 0)$ , 直線  $y=x+3$