1節 整式・分数式の計算

1 整式の乗法と因数分解

3次式の乗法公式

2次式の乗法公式については数学Ⅰで学んだ。ここでは，3次式の乗法公式と，それを用いた整式の展開について考えてみよう。

例1 $(a+b)^3$ を展開してみよう。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a(a^2+2ab+b^2)\\ &\qquad +b(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2\\ &\qquad +a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & & a^2 & +2ab & +b^2 \\ \times) & & a & +b & \\ \hline & a^3 & +2a^2b & +ab^2 & \\ & & a^2b & +2ab^2 & +b^3 \\ \hline & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 \end{array}$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式 (1)

[1] $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

[2] $\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

問1 公式[2]が成り立つことを示せ。

例2 (1) $(x+2)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$(a+b)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

$= x^3+6x^2+12x+8$

(2) $(2x-y)^3 = (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot 2x\cdot y^2-y^3$

$(a-b)^3 = a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3$

$= 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

問 2　次の式を展開せよ。 p.21 Training 1 (1) (2)

(1)　$(x+1)^3$　　(2)　$(2x-1)^3$

(3)　$(x+3y)^3$　　(4)　$(3x-2y)^3$

例 3　$(a+b)(a^2-ab+b^2)$ を展開してみよう。

$$\begin{aligned}&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\&=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)\\&=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3\\&=a^3+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrr} & a^2 & -ab & +b^2 \\ \times) & a & +b & \\ \hline & a^3 & -a^2b & +ab^2 \\ & & a^2b & -ab^2 & +b^3 \\ \hline & a^3 & & & +b^3 \end{array}$$

一般に，次の乗法公式が成り立つ。

乗法公式 (2)

[3]　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$

[4]　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

問 3　公式 [4] が成り立つことを示せ。

例 4　(1)　$(x+3)(x^2-3x+9)$

$$=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=x^3+3^3$$

$$(a+b)\,(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3$$

$$=x^3+27$$

(2)　$(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

$$=(2x-5y)\{(2x)^2+2x\cdot 5y+(5y)^2\}=(2x)^3-(5y)^3$$

$$(a-b)\,(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3$$

$$=8x^3-125y^3$$

問 4　次の式を展開せよ。 p.21 Training 1 (3) (4)

(1)　$(x+1)(x^2-x+1)$　　(2)　$(2x-1)(4x^2+2x+1)$

(3)　$(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$　　(4)　$(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$

3次式の因数分解

乗法公式 [3], [4] から，次の公式が成り立つ。

因数分解の公式

[1] $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

[2] $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

例 5 (1) $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-a\cdot b+b^2)$

$=(x+1)(x^2-x+1)$

(2) $x^3-8y^3=x^3-(2y)^3=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+a\cdot b+b^2)$

$=(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

問 5 次の式を因数分解せよ。 p.21 Training 2 p.58 Level Up 1

(1) x^3-1 (2) x^3+125

(3) x^3-27y^3 (4) $8x^3+y^3$

例題 1 因数分解

次の式を因数分解せよ。

$$x^6-1$$

考え方 $x^6=(x^3)^2$ より，$x^3=A$ とおくと $x^6-1=A^2-1$ と表される。

解 $x^3=A$ とおくと

$$\begin{aligned} x^6-1 &= A^2-1=(A+1)(A-1) \\ &= (x^3+1)(x^3-1) \\ &= (x+1)(x^2-x+1)\times(x-1)(x^2+x+1) \\ &= (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

問 6 次の式を因数分解せよ。 p.21 Training 3

(1) a^6-b^6 (2) x^6+2x^3+1

❷ 二項定理

パスカルの三角形

$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ を展開すると次のようになる。

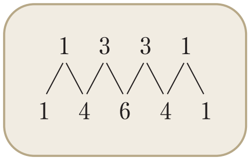
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$(a+b)^3$ の展開をもとに，$(a+b)^4$ を展開してみよう。

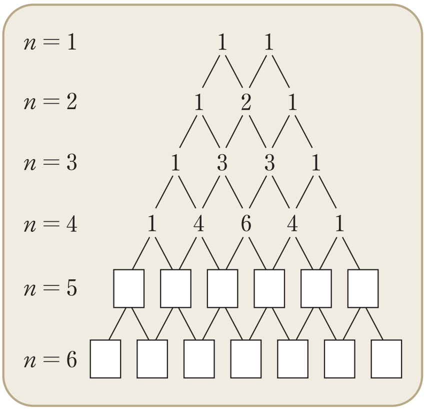
$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\ &= 1a^4+3a^3b+3a^2b^2+1ab^3 \\ &\qquad +1a^3b+3a^2b^2+3ab^3+1b^4 \\ &= \ \ a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

このように，$(a+b)^4$ の展開式において，両端の 1 以外の係数は，$(a+b)^3$ の展開式における隣り合った係数 1 と 3， 3 と 3， 3 と 1 のそれぞれの和として得られる。



問 7　$(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が $(a+b)^4$ の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求めて右のように並べたものを **パスカルの三角形** という。



問 8　右のパスカルの三角形で，$n=5$，$n=6$ の行の □ をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

二項定理

$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の係数は，パスカルの三角形から4である。これは，次のように考えることもできる。

$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の項は，4個の因数

$$a+b,\quad a+b,\quad a+b,\quad a+b$$

から a，b のいずれかを，全体で a が3個，b が1個となるように取ることによって得られる。

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow a\,a\,a\,b$$
$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow a\,a\,b\,a$$
$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow a\,b\,a\,a$$
$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \longrightarrow b\,a\,a\,a$$

すなわち，4個の因数から b を取る1個の因数を選ぶ選び方の数だけ a^3b の項ができる。

よって，$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の係数は

$${}_4\mathrm{C}_1=\frac{4}{1}=4$$

である。*

同様に考えて，$(a+b)^4$ の展開式における

$$a^4,\quad a^3b,\quad a^2b^2,\quad ab^3,\quad b^4$$

の係数は，それぞれ次のようになる。

$${}_4\mathrm{C}_0,\quad {}_4\mathrm{C}_1,\quad {}_4\mathrm{C}_2,\quad {}_4\mathrm{C}_3,\quad {}_4\mathrm{C}_4$$

したがって，$(a+b)^4$ の展開式は次のように表される。

$$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$$

一般に，次ページの **二項定理** が成り立つ。

---

* 異なる n 個のものから r 個を取り出してつくった組合せを

n 個から r 個とる組合せ

といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す。このとき，次の公式が成り立つ。

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ここで，$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ である。

ただし，$0!=1$，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定める。

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

例 6

$$(a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0a^5 + {}_5\mathrm{C}_1a^4b + {}_5\mathrm{C}_2a^3b^2 + {}_5\mathrm{C}_3a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

問 9 二項定理を用いて，$(a+b)^6$ を展開せよ。

二項定理により $(a+b)^n$ の展開式における項は，一般に

$$ {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と表される。これを $(a+b)^n$ の展開式の **一般項** という。ただし，$a^0=1$，$b^0=1$ とする。また，${}_n\mathrm{C}_r$ を **二項係数** ともいう。

例題 2 　二項定理

$(2a-b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数を求めよ。

解 $(2a-b)^5$ の展開式の一般項は

$$ {}_5\mathrm{C}_r(2a)^{5-r}(-b)^r \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$$

と表される。a^2b^3 の項は，$r=3$ の場合であるから

$$ {}_5\mathrm{C}_3(2a)^2(-b)^3 = 10\cdot2^2\cdot(-1)^3a^2b^3 = -40a^2b^3$$

よって，a^2b^3 の係数は -40 である。

問 10 $(3a-2b)^4$ の展開式における a^3b の係数を求めよ。

p.21 Training 4　p.58 Level Up 2

例 7 二項定理において，$a=1$，$b=x$ とおくと

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1x + {}_n\mathrm{C}_2x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_rx^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nx^n$$

さらに，$x=1$ を代入すると，次の等式が得られる。

$$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$$

問 11 等式 $3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$ を示せ。

p.21 Training 5

Challenge（チャレンジ） 例題 $(a+b+c)^n$ の展開

例 題

$(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数を求めよ。

解　$\{(a+b)+c\}^5$ の展開式において $(a+b)^4c$ が現れるのは

$${}_5\mathrm{C}_1(a+b)^4c$$

←── a^2b^2c が現れるのはこの式のみ

であり，$(a+b)^4$ を展開したときの a^2b^2 の係数は ${}_4\mathrm{C}_2$ である。

したがって，a^2b^2c の係数は

$${}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=30$$

上の例題は，次のように考えて解くこともできる。

$(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の項は 5 個の因数

$$a+b+c,\quad a+b+c,\quad a+b+c,\quad a+b+c,\quad a+b+c$$

から a，b，c のいずれかを，全体で a が 2 個，b が 2 個，c が 1 個となるように取ることによって得られる。

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\longrightarrow b\,a\,a\,c\,b$$

すなわち，a を 2 個，b を 2 個，c を 1 個並べる並べ方の数だけ a^2b^2c の項ができる。よって，$(a+b+c)^5$ の展開式における a^2b^2c の係数は $\dfrac{5!}{2!2!1!}=30$ である。*

一般に，次のことが成り立つ。

> $(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は
>
> $$\boldsymbol{\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r}\quad \text{ただし，}p+q+r=n$$

問 1　(1) $(a+b+c)^6$ の展開式における $a^2b^2c^2$ の係数を求めよ。

(2) $(a+2b+3c)^6$ の展開式における a^2b^3c の係数を求めよ。

* 一般に，a が p 個，b が q 個，c が r 個の合計 n 個のものをすべて並べる並べ方の総数は $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ である。

❸ 整式の除法

整式の除法

整数の割り算で，$275 \div 13$ を計算すると，商が 21，余りが 2 である。このとき

$$275 = 13 \times 21 + 2$$

割られる数＝割る数×商＋余り

が成り立っている。

同じような計算を整式で行うことを考えてみよう。

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2\;1 \quad \text{商}\\
13\,\big) & 2\;7\;5\\
 & 2\;6 \quad \longleftarrow 13 \times 2\\ \hline
 & 1\;5\\
 & 1\;3 \quad \longleftarrow 13 \times 1\\ \hline
 & 2 \quad \text{余り}
\end{array}$$

例 8 $A = 2x^2 + 7x + 5$，$B = x + 3$ のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x + 1 \quad \text{商}\\
x+3\,\big) & 2x^2 + 7x + 5\\
 & 2x^2 + 6x \quad \longleftarrow (x+3) \times 2x\\ \hline
 & \phantom{2x^2 + {}} x + 5\\
 & \phantom{2x^2 + {}} x + 3 \quad \longleftarrow (x+3) \times 1\\ \hline
 & \phantom{2x^2 + x + {}} 2 \quad \text{余り}
\end{array}$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x+3$ よりも次数が低いので，これ以上計算を続けることができない。

このとき，$2x^2 + 7x + 5$ を $x+3$ で割ったときの

商 は $2x+1$，**余り** は 2

であるという。上の割り算から

$$A = B(2x+1) + 2 \quad \cdots\cdots ①$$

割られる式 ＝ 割る式 × 商 ＋ 余り

が成り立つことがわかる。

問 12 $A = 6x^2 - 5x + 1$ を $B = 3x - 4$ で割る計算をせよ。また，例 8 にならって，A を ① の形で表せ。

一般に，整式Aを 0 でない整式Bで割ったときの商をQ，余りをRとすると，次の式が成り立つ。

商と余り

$$A = BQ + R \qquad \text{ただし，} R \text{の次数} < B \text{の次数}$$

このようなQ，Rはただ 1 つ定まる。とくに，$R=0$ となるとき，AはBで **割り切れる** といい，BはAの **因数** であるという。

例題 3 整式の除法 [1]

次の整式Aを整式Bで割り，商と余りを求めよ。

(1) $A = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 8$, $B = x^2 - x - 3$

(2) $A = 2x^3 + 4x^2 + 7$, $B = 2x^2 - 3$

解

(1)
$$\begin{array}{r@{\;}l}
 & 2x - 5 \\
x^2 - x - 3 \,\big) & \overline{2x^3 - 7x^2 + 3x + 8} \\
 & \underline{2x^3 - 2x^2 - 6x\phantom{{}+8}} \\
 & -5x^2 + 9x + 8 \\
 & \underline{-5x^2 + 5x + 15} \\
 & \phantom{2x^3-5x^2+{}}4x - 7
\end{array}$$

〈答〉商 $2x-5$，余り $4x-7$

(2)
$$\begin{array}{r@{\;}l}
 & x + 2 \\
2x^2 \boxed{} - 3 \,\big) & \overline{2x^3 + 4x^2 \boxed{} + 7} \\
 & \underline{2x^3 \boxed{} - 3x\phantom{{}+7}} \\
 & \phantom{2x^3+{}}4x^2 + 3x + 7 \\
 & \phantom{2x^3+{}}\underline{4x^2 \boxed{} - 6} \\
 & \phantom{2x^3+4x^2+{}}3x + 13
\end{array}$$

項がないときはあけておく

〈答〉商 $x+2$，余り $3x+13$

注意 このような計算では，割る式も割られる式も，文字 x について降べきの順に整理しておくとよい。

問 13 次の整式Aを整式Bで割り，商と余りを求めよ。 p.21 Training 6

(1) $A = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 1$, $B = x^2 + 3x - 2$

(2) $A = x^3 - x^2 - 1$, $B = x^2 + 2$

例題 4 整式の除法 [2]

整式 x^3-3x^2-6x-2 をある整式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $3x-4$ である。整式 B を求めよ。

解 $x^3-3x^2-6x-2=B(x+2)+(3x-4)$

が成り立つから

$$B(x+2)=(x^3-3x^2-6x-2)-(3x-4)$$
$$=x^3-3x^2-9x+2$$

x^3-3x^2-9x+2 を $x+2$ で割って

$$B=x^2-5x+1$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x+1 \\ \hline
x+2 & x^3-3x^2-9x+2 \\
 & x^3+2x^2 \\ \hline
 & -5x^2-9x \\
 & -5x^2-10x \\ \hline
 & x+2 \\
 & x+2 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

問 14 整式 $3x^3+14x^2-4x+5$ をある整式 B で割ると，商が $3x-1$，余りが $7x+3$ である。整式 B を求めよ。

p.21 Training 7

Challenge（チャレンジ）例題 2種類の文字を含む整式の除法

2 種類以上の文字を含む整式についても，その中の 1 つの文字に着目して，割り算を行うことができる。

例題

$A=2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3$，$B=x-2a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-ax+4a^2 \\ \hline
x-2a & 2x^3-5ax^2+6a^2x-8a^3 \\
 & 2x^3-4ax^2 \\ \hline
 & -ax^2+6a^2x \\
 & -ax^2+2a^2x \\ \hline
 & 4a^2x-8a^3 \\
 & 4a^2x-8a^3 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

〈答〉 商 $2x^2-ax+4a^2$，余り 0

問 1 $A=x^3-2ax^2-a^2x+2a^3$，$B=x-a$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

4 分数式とその計算

$\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ のように，$\dfrac{\text{整式}}{\text{1次以上の整式}}$ の形で表される式を **分数式** という。整式と分数式を合わせて **有理式** という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\dfrac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。したがって，分母と分子に共通な因数があれば，**約分** することができる。それ以上約分できない分数式は **既約** であるという。

例 9　(1) $\dfrac{4xy^2}{6x^3y}=\dfrac{2y}{3x^2}$

(2) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

問 15　次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1) $\dfrac{3x^2y}{9xyz}$　　(2) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$　　(3) $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}$

乗法・除法

分数式の乗法，除法は次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 10

$$\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\div\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}\times\frac{x+1}{x-2}$$
$$=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-3)}\times\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+2}{x-3}$$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 16 次の式を計算せよ。 p.21 Training 8

(1) $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\times\dfrac{x+2}{x-7}$　　(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$

加法・減法

分母が等しい分数式の加法，減法は次のようにする。

$$\boldsymbol{\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}}$$

例 11

$$\frac{3}{x^2-4}-\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3-(x+1)}{x^2-4}=\frac{-x+2}{x^2-4}$$
$$=\frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}=-\frac{1}{x+2}$$

問 17 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+1}{x^2-x}+\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x}$　　(2) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

たとえば $\dfrac{2}{xy}$，$\dfrac{x}{y^2}$ は $\dfrac{2}{xy}=\dfrac{2\times y}{xy\times y}=\dfrac{2y}{xy^2}$，$\dfrac{x}{y^2}=\dfrac{x\times x}{y^2\times x}=\dfrac{x^2}{xy^2}$

$\dfrac{2}{x}$，$\dfrac{3}{x+1}$ は $\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)}$，$\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{3x}{x(x+1)}$

のように，分母が同じ分数式になおすことができる。このように，いくつかの分数式の分母を同じにすることを **通分** するという。

分母が異なる分数式の加法，減法は，通分してから計算する。

例 12

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}-\frac{x+2}{(x+2)(2x+1)}$$ ←通分する

$$=\frac{4x+2-(x+2)}{(x+2)(2x+1)}$$

$$=\frac{3x}{(x+2)(2x+1)}$$ ←分母は展開しなくてもよい

問 18 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}$　　(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2x-3}$

例題 5

$$\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}$$ を計算せよ。

解

$$\frac{x+4}{x^2-2x}-\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{x+4}{x(x-2)}-\frac{3}{(x-1)(x-2)}$$

分母を因数分解する

$$=\frac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}-\frac{3x}{x(x-1)(x-2)}$$

通分する

$$=\frac{(x+4)(x-1)-3x}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-4}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x+2}{x(x-1)}$$

問 19 次の式を計算せよ。 p.21 Training 9

(1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$　(2) $\dfrac{x-6}{x^2-9}+\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

(3) $\dfrac{x^3+8x}{x^2-x-2}-\dfrac{8}{x-2}$

分母や分子に分数式を含む式について考えてみよう。

例 13

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\div\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\div\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

注意 上の例 13 は，分母と分子に x を掛けて右のように計算してもよい。

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}\times x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x}=\frac{1}{x+1}$$

問 20 次の式を簡単にせよ。 p.21 Training 10

(1) $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}}$　(2) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

Training トレーニング

1 次の式を展開せよ。 p.9

(1) $(2x+3y)^3$　　(2) $(4a-b)^3$

(3) $(5x+2)(25x^2-10x+4)$　　(4) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

2 次の式を因数分解せよ。 p.10

(1) $27x^3+8y^3$　　(2) a^3-64b^3

(3) $ax^3+125ay^3$　　(4) $8a^3b-27bc^3$

3 次の式を因数分解せよ。 p.10

(1) $(a+b)^3+1$　　(2) $(2x+y)^3-(2x-y)^3$

(3) x^6+16x^3+64　　(4) $a^6-7a^3b^3-8b^6$

4 次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。 p.13

(1) $(x-3y)^7$ における x^5y^2　　(2) $(3x^2+2)^6$ における x^2

5 次の等式が成り立つことを示せ。 p.13

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 0 $$

6 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。 p.16

(1) $A=6x^3+7x^2-9x+2,\quad B=2x-1$

(2) $A=x^3+2x^2+3,\quad B=x^2+4$

7 整式 $2x^3-8x+7$ をある整式 B で割ると，商が $x-2$，余りが $3x+1$ である。整式 B を求めよ。 p.17

8 次の式を計算せよ。 p.19

(1) $\dfrac{6x+6}{x^2-4}\times\dfrac{x^3-8}{2x^2+2x}$　　(2) $\dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15}\times\dfrac{x^2-1}{x}$

9 次の式を計算せよ。 p.20

(1) $\dfrac{2x-1}{x^2-3x}-\dfrac{2x+1}{x^2+3x}$　　(2) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2x+1}{x^3-1}$

10 次の式を簡単にせよ。 p.20

(1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$　　(2) $\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$