

1 章 方程式・式と証明

Readiness check レディネス チェック

教科書 P.6

- 問 1** (1) $(2x - 5y)^2$
 $= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2$
 $= 4x^2 - 20xy + 25y^2$
- (2) $(4x + 3y)(4x - 3y)$
 $= (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2$
- (3) $(x - 4)(x - 6)$
 $= x^2 + (-4 - 6)x + (-4) \cdot (-6)$
 $= x^2 - 10x + 24$
- (4) $(2x + 3)(3x - 7)$
 $= 2 \cdot 3x^2 + \{2 \cdot (-7) + 3 \cdot 3\}x + 3 \cdot (-7)$
 $= 6x^2 - 5x - 21$

- 問 2** (1) $4x^2 + 12x + 9$
 $= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$
- (2) $25x^2 - y^2$
 $= (5x)^2 - y^2 = (5x + y)(5x - y)$
- (3) $x^2 + 8x + 12$
 $= x^2 + (2 + 6)x + 2 \cdot 6$
 $= (x + 2)(x + 6)$
- (4) $6x^2 - 23xy + 18y^2$
 $= (2x - 9y)(3x + 2y)$

$$\begin{array}{r} 2 \times -9 \longrightarrow -27 \\ 3 \times 2 \longrightarrow 6 \\ \hline -23 \end{array}$$

教科書 P.7

- 問 3** (1) $\sqrt{8} \times \sqrt{6} \times \sqrt{48}$
 $= \sqrt{8 \times 6 \times 48} = \sqrt{8 \times 6 \times 6 \times 8}$
 $= \sqrt{8^2 \times 6^2} = 8 \times 6 = 48$
- (2) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{48}{6}} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$
- (3) $\sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{125}$
 $= \sqrt{3^2 \times 5} - \sqrt{2^2 \times 5} + \sqrt{5^2 \times 5}$
 $= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- (4) $(\sqrt{15} + \sqrt{6})^2$
 $= (\sqrt{15})^2 + 2 \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$
 $= 15 + 2\sqrt{3 \times 5 \times 2 \times 3} + 6$
 $= 21 + 6\sqrt{10}$
- (5) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 3\sqrt{5})$

$$\begin{aligned} &= 2(\sqrt{3})^2 + (2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \\ &\quad - 3(\sqrt{5})^2 \\ &= 6 + 5\sqrt{15} - 15 = -9 + 5\sqrt{15} \end{aligned}$$

- 問 4** (1) $\frac{7}{\sqrt{28}} = \frac{7}{\sqrt{2^2 \times 7}} = \frac{7}{2\sqrt{7}}$
 $= \frac{7 \times \sqrt{7}}{2\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{14} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
- (2) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
 $= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$
 $= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$
 $= \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}$

1 節 整式・分数式の計算

① 整式の乗法と因数分解

教科書 P.8

- 問 1** $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$
 $= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

教科書 P.9

- 問 2** (1) $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$
 $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- (2) $(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1$
 $\quad + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3$
 $= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
- (3) $(x + 3y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3y$
 $\quad + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 + (3y)^3$
 $= x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$
- (4) $(3x - 2y)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y$
 $\quad + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$
 $= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

- 問 3** $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 $= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$
 $= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$
 $= a^3 - b^3$

- 問4** (1) $(x+1)(x^2-x+1)$
 $= (x+1)(x^2-x \cdot 1+1^2)$
 $= x^3+1^3 = x^3+1$
- (2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
 $= (2x-1)\{(2x)^2+2x \cdot 1+1^2\}$
 $= (2x)^3-1^3 = 8x^3-1$
- (3) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$
 $= (3x+y)\{(3x)^2-3x \cdot y+y^2\}$
 $= (3x)^3+y^3 = 27x^3+y^3$
- (4) $(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$
 $= (x-10y)\{x^2+x \cdot 10y+(10y)^2\}$
 $= x^3-(10y)^3 = x^3-1000y^3$

教科書 P.10

- 問5** (1) $x^3-1 = x^3-1^3$
 $= (x-1)(x^2+x \cdot 1+1^2)$
 $= (x-1)(x^2+x+1)$
- (2) $x^3+125 = x^3+5^3$
 $= (x+5)(x^2-x \cdot 5+5^2)$
 $= (x+5)(x^2-5x+25)$
- (3) $x^3-27y^3 = x^3-(3y)^3$
 $= (x-3y)\{x^2+x \cdot 3y+(3y)^2\}$
 $= (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
- (4) $8x^3+y^3 = (2x)^3+y^3$
 $= (2x+y)\{(2x)^2-2x \cdot y+y^2\}$
 $= (2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

- 問6** (1) $a^3 = A, b^3 = B$ とおくと
 $a^6 - b^6$
 $= A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
 $= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$
 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)$
 $= (a+b)(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
- (2) $x^3 = A$ とおくと
 $x^6 + 2x^3 + 1$
 $= A^2 + 2A + 1 = (A+1)^2 = (x^3+1)^2$
 $= \{(x+1)(x^2-x+1)\}^2$
 $= (x+1)^2(x^2-x+1)^2$

② 二項定理

教科書 P.11

- 問7** $(a+b)^5$
 $= (a+b)(a+b)^4$
 $= (a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$

$$= 1a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+1ab^4$$

$$+ 1a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+1b^5$$

$$= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

上の展開式において、両端の1以外の係数は
 $5=1+4, 10=4+6, 10=6+4, 5=4+1$
より、 $(a+b)^4$ の展開式における隣り合った係数の和となっている。

- 問8** $n=5$ の行は左から順に

$$1, 5, 10, 10, 5, 1$$

- $n=6$ の行は左から順に

$$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$$

これより

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3$$

$$+ 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

教科書 P.13

- 問9** $(a+b)^6$
 $= {}_6C_0a^6 + {}_6C_1a^5b + {}_6C_2a^4b^2 + {}_6C_3a^3b^3$
 $+ {}_6C_4a^2b^4 + {}_6C_5ab^5 + {}_6C_6b^6$
 $= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3$
 $+ 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

- 問10** $(3a-2b)^4$ の展開式の一般項は
 ${}_4C_r(3a)^{4-r}(-2b)^r \quad (r=0, 1, \dots, 4)$
と表される。 a^3b の項は、 $r=1$ の場合であるから

$${}_4C_1(3a)^3(-2b) = 4 \cdot 3^3 \cdot (-2)a^3b$$

$$= -216a^3b$$

よって、 a^3b の係数は -216

- 問11** $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n$
に $x=2$ を代入すると

$$3^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot 2 + {}_nC_2 \cdot 2^2 + \dots + {}_nC_n \cdot 2^n$$

$$= {}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 + \dots + 2^n \cdot {}_nC_n$$

が成り立つ。

Challenge チャレンジ 例題 $(a+b+c)^n$ の展開

教科書 P.14

- 問1** (1) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において $(a+b)^4c^2$ が現れるのは

$${}_6C_2(a+b)^4c^2$$

であり、 $(a+b)^4$ を展開したときの a^2b^2 の係数は ${}_4C_2$ である。したがって、 $a^2b^2c^2$ の係数は

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$$

〔別解〕 $\frac{n!}{p!q!r!}$ に $n = 6, p = q = r = 2$

を代入して $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$

(2) $\{(a+2b)+3c\}^6$ の展開式において

$(a+2b)^5 \cdot 3c$ が現れるのは

$${}^6C_1(a+2b)^5 \cdot 3c$$

であり、 $(a+2b)^5$ の展開式において

$a^2 \cdot (2b)^3$ が現れるのは

$${}^5C_3 a^2 (2b)^3$$

であるから、文字の部分が $a^2 b^3 c$ の項は

$${}^6C_1 \cdot {}^5C_3 \cdot a^2 (2b)^3 \cdot 3c$$

よって、 $a^2 b^3 c$ の係数は

$${}^6C_1 \times {}^5C_3 \times 2^3 \times 3 = 1440$$

〔別解〕 $(a+2b+3c)^6$ の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!} a^p \cdot (2b)^q \cdot (3c)^r$$

ただし、 $p+q+r=6$

であるから、文字の部分が $a^2 b^3 c$ の項は

$p=2, q=3, r=1$ のときである。

$$\frac{6!}{2!3!1!} a^2 (2b)^3 \cdot 3c$$

$$= 60 \cdot a^2 \cdot 8b^3 \cdot 3c$$

$$= 1440 a^2 b^3 c$$

より、 $a^2 b^3 c$ の係数は 1440

3 整式の除法

教科書 P.15

問12

$$3x-4 \overline{) 2x+1} \\ \underline{6x^2-5x+1} \\ 6x^2-8x \\ \underline{-8x} \\ 3x+1 \\ \underline{3x-4} \\ 5$$

$$A = B(2x+1) + 5$$

教科書 P.16

問13

$$(1) \quad x^2+3x-2 \overline{) 2x-3} \\ \underline{2x^3+3x^2-8x+1} \\ 2x^3+6x^2-4x \\ \underline{-3x^2-4x+1} \\ -3x^2-9x+6 \\ \underline{-9x+6} \\ 5x-5$$

商 $2x-3$, 余り $5x-5$

$$(2) \quad x^2 \overline{) x-1} \\ \underline{x^3-x^2-1} \\ x^3+x^2+2x \\ \underline{-x^2-2x-1} \\ -x^2-2 \\ \underline{-2} \\ -2x+1$$

商 $x-1$, 余り $-2x+1$

教科書 P.17

問14

$$3x^3+14x^2-4x+5 = B(3x-1) + (7x+3)$$

が成り立つから

$$B(3x-1)$$

$$= (3x^3+14x^2-4x+5) - (7x+3)$$

$$= 3x^3+14x^2-11x+2$$

$3x^3+14x^2-11x+2$ を $3x-1$ で割って

$$3x-1 \overline{) x^2+5x-2} \\ \underline{3x^3+14x^2-11x+2} \\ 3x^3-x^2 \\ \underline{-x^2-11x} \\ 15x^2-11x \\ \underline{15x^2-5x} \\ -6x+2 \\ \underline{-6x+2} \\ 0$$

よって $B = x^2+5x-2$

Challenge 例題 2種類の文字を含む整式の除法

問1

$$x-a \overline{) x^2-ax-2a^2} \\ \underline{x^3-2ax^2-a^2x+2a^3} \\ x^3-ax^2 \\ \underline{-ax^2-a^2x} \\ -2a^2x+2a^3 \\ \underline{-2a^2x+2a^3} \\ 0$$

商 $x^2-ax-2a^2$, 余り 0

4 分数式とその計算

教科書 P.18

問15

$$(1) \quad \frac{3x^2y}{9xyz} = \frac{x}{3z}$$

$$(2) \quad \frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8} = \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-2)}$$

$$= \frac{x+1}{x-2}$$

$$(3) \quad \frac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8} = \frac{x(x+1)(x+2)}{8(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x+2)}{8(x-1)}$$

$$\text{問16 (1)} \quad \frac{x^2-49}{x^2+2x} \times \frac{x+2}{x-7}$$

$$= \frac{(x+7)(x-7)}{x(x+2)} \times \frac{x+2}{x-7} = \frac{x+7}{x}$$

$$(2) \quad \frac{2x-1}{x^2-2x+1} \div \frac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$$

$$= \frac{2x-1}{x^2-2x+1} \times \frac{x^2-5x+4}{4x^2-1}$$

$$= \frac{2x-1}{(x-1)^2} \times \frac{(x-1)(x-4)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$= \frac{x-4}{(x-1)(2x+1)}$$

$$\text{問17 (1)} \quad \frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x^2-x-1}{x^2-x}$$

$$= \frac{(x+1)+(x^2-x-1)}{x^2-x} = \frac{x^2}{x^2-x}$$

$$= \frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

$$(2) \quad \frac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6} - \frac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$$

$$= \frac{(x^2+3x+1)-(x^2+x-3)}{x^2+5x+6}$$

$$= \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2}{x+3}$$

$$\text{問18 (1)} \quad \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

$$= \frac{x-1}{(x+3)(x-1)} - \frac{x+3}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1-(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= -\frac{4}{(x+3)(x-1)}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x-3}$$

$$= \frac{2x-3}{(x+1)(2x-3)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$$

$$= \frac{2x-3+3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$$

$$= \frac{5x}{(x+1)(2x-3)}$$

$$\text{問19 (1)} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x-1-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = -\frac{1}{x-1}$$

$$(2) \quad \frac{x-6}{x^2-9} + \frac{x-1}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{x-6}{(x+3)(x-3)} + \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x+3)(x-3)} + \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-6)(x+1)+(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2x^2-3x-9}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)(2x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)} = \frac{2x+3}{(x+1)(x+3)}$$

$$(3) \quad \frac{x^3+8x}{x^2-x-2} - \frac{8}{x-2}$$

$$= \frac{x^3+8x}{(x-2)(x+1)} - \frac{8}{x-2}$$

$$= \frac{x^3+8x}{(x-2)(x+1)} - \frac{8(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^3+8x-8(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^3-8}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+4}{x+1}$$

$$\text{問20 (1)} \quad \frac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{1}{x}} = \left(1+\frac{2}{x}\right) \div \left(3-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x+2}{x} \div \frac{3x-1}{x}$$

$$= \frac{x+2}{x} \times \frac{x}{3x-1}$$

$$= \frac{x+2}{3x-1}$$

$$\text{[別解]} \quad \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right) \times x}{\left(3-\frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{x+2}{3x-1}$$

$$(2) \quad \frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \left(x-\frac{1}{x}\right) \div \left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2-1}{x} \div \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x} \times \frac{x}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 &= x - 1 \\
 \text{〔別解〕} \quad &\frac{\left(x - \frac{1}{x}\right) \times x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\
 &= \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1
 \end{aligned}$$

Training トレーニング

教科書 P.21

- 1 (1) $(2x + 3y)^3$
 $= (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 + (3y)^3$
 $= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$
- (2) $(4a - b)^3$
 $= (4a)^3 - 3 \cdot (4a)^2 \cdot b + 3 \cdot 4a \cdot b^2 - b^3$
 $= 64a^3 - 48a^2b + 12ab^2 - b^3$
- (3) $(5x + 2)(25x^2 - 10x + 4)$
 $= (5x + 2)\{(5x)^2 - 5x \cdot 2 + 2^2\}$
 $= (5x)^3 + 2^3 = 125x^3 + 8$
- (4) $(3a - 4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)$
 $= (3a - 4b)\{(3a)^2 + 3a \cdot 4b + (4b)^2\}$
 $= (3a)^3 - (4b)^3 = 27a^3 - 64b^3$
- 2 (1) $27x^3 + 8y^3$
 $= (3x)^3 + (2y)^3$
 $= (3x + 2y)\{(3x)^2 - 3x \cdot 2y + (2y)^2\}$
 $= (3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$
- (2) $a^3 - 64b^3$
 $= a^3 - (4b)^3$
 $= (a - 4b)\{a^2 + a \cdot 4b + (4b)^2\}$
 $= (a - 4b)(a^2 + 4ab + 16b^2)$
- (3) $ax^3 + 125ay^3$
 $= a(x^3 + 125y^3)$
 $= a\{x^3 + (5y)^3\}$
 $= a(x + 5y)\{x^2 - x \cdot 5y + (5y)^2\}$
 $= a(x + 5y)(x^2 - 5xy + 25y^2)$
- (4) $8a^3b - 27bc^3$
 $= b(8a^3 - 27c^3)$
 $= b\{(2a)^3 - (3c)^3\}$
 $= b(2a - 3c)\{(2a)^2 + 2a \cdot 3c + (3c)^2\}$
 $= b(2a - 3c)(4a^2 + 6ac + 9c^2)$
- 3 (1) $a + b = A$ とおくと
 $(a + b)^3 + 1 = A^3 + 1$
 $= (A + 1)(A^2 - A + 1)$

- $$\begin{aligned}
 &= (a + b + 1)\{(a + b)^2 - (a + b) + 1\} \\
 &= (a + b + 1)(a^2 + 2ab + b^2 - a - b + 1)
 \end{aligned}$$
- (2) $2x + y = A, 2x - y = B$ とおくと
 $(2x + y)^3 - (2x - y)^3$
 $= A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
 $= \{(2x + y) - (2x - y)\} \times \{(2x + y)^2$
 $\quad + (2x + y)(2x - y) + (2x - y)^2\}$
 $= 2y \times \{(4x^2 + 4xy + y^2) + (4x^2 - y^2)$
 $\quad + (4x^2 - 4xy + y^2)\}$
 $= 2y(12x^2 + y^2)$
- (3) $x^3 = A$ とおくと
 $x^6 + 16x^3 + 64$
 $= A^2 + 16A + 64$
 $= (A + 8)^2 = (x^3 + 8)^2 = (x^3 + 2^3)^2$
 $= \{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)\}^2$
 $= (x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)^2$
- (4) $a^3 = A, b^3 = B$ とおくと
 $a^6 - 7a^3b^3 - 8b^6$
 $= A^2 - 7AB - 8B^2$
 $= (A + B)(A - 8B)$
 $= (a^3 + b^3)(a^3 - 8b^3)$
 $= (a + b)\{a^3 - (2b)^3\}$
 $= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 $\quad \times (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$
 $= (a + b)(a - 2b)$
 $\quad (a^2 - ab + b^2)(a^2 + 2ab + 4b^2)$
- 4 (1) $(x - 3y)^7$ の展開式の一般項は
 ${}_7C_r x^{7-r} (-3y)^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 7)$
と表される。 $x^5 y^2$ の項は $r = 2$ の場合であるから
 ${}_7C_2 x^5 (-3y)^2 = 21 \cdot 9x^5 y^2$
 $= 189x^5 y^2$
よって、 $x^5 y^2$ の係数は **189**
- (2) $(3x^2 + 2)^6$ の展開式の一般項は
 ${}_6C_r (3x^2)^{6-r} \cdot 2^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 6)$
と表される。 x^2 の項は $r = 5$ の場合であるから
 ${}_6C_5 (3x^2) \cdot 2^5 = 6 \cdot 3 \cdot 32x^2$
 $= 576x^2$
よって、 x^2 の係数は **576**
- 5 $(1 + x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \dots + {}_nC_n x^n$
に $x = -1$ を代入すると
 $0^n = {}_nC_0 + {}_nC_1(-1) + {}_nC_2 \cdot 1$
 $\quad + \dots + {}_nC_n(-1)^n$

$$= {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}_n C_n$$

よって

$${}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}_n C_n = 0$$

が成り立つ。

$$6 \quad (1) \quad \begin{array}{r} 3x^2 + 5x - 2 \\ 2x - 1 \overline{) 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2} \\ \underline{6x^3 - 3x^2} \\ 10x^2 - 9x \\ \underline{10x^2 - 5x} \\ -4x + 2 \\ \underline{-4x + 2} \\ 0 \end{array}$$

商 $3x^2 + 5x - 2$, 余り 0

$$(2) \quad \begin{array}{r} x + 2 \\ x^2 + 4 \overline{) x^3 + 2x^2 + 3} \\ \underline{x^3 + 4x} \\ 2x^2 - 4x + 3 \\ \underline{2x^2 + 8} \\ -4x - 5 \end{array}$$

商 $x + 2$, 余り $-4x - 5$

$$7 \quad 2x^3 - 8x + 7 = B(x-2) + (3x+1)$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} B(x-2) &= (2x^3 - 8x + 7) - (3x + 1) \\ &= 2x^3 - 11x + 6 \end{aligned}$$

$2x^3 - 11x + 6$ を $x-2$ で割って

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 4x - 3 \\ x - 2 \overline{) 2x^3 - 11x + 6} \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 4x^2 - 11x \\ \underline{4x^2 - 8x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

よって $B = 2x^2 + 4x - 3$

$$8 \quad (1) \quad \begin{aligned} & \frac{6x+6}{x^2-4} \times \frac{x^3-8}{2x^2+2x} \\ &= \frac{6(x+1)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2x(x+1)} \\ &= \frac{3(x^2+2x+4)}{x(x+2)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} & \frac{x^2-x}{x^2-2x-3} \div \frac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15} \times \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-3)} \times \frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)^2} \\ & \quad \times \frac{(x+1)(x-1)}{x} \end{aligned}$$

$= x-5$

$$9 \quad (1) \quad \frac{2x-1}{x^2-3x} - \frac{2x+1}{x^2+3x}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x-1}{x(x-3)} - \frac{2x+1}{x(x+3)} \\ &= \frac{(2x-1)(x+3) - (2x+1)(x-3)}{x(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{(2x^2+5x-3) - (2x^2-5x-3)}{x(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{10x}{x(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{10}{(x+3)(x-3)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^3-1} \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1) - (x+1)(x^2+x+1) + (x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(x^3-1) - (x^3+2x^2+2x+1) + (2x^2+3x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$10 \quad (1) \quad \begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) \div \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2} \\ &= \frac{x+1}{x} \times \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔別解〕} \quad & \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times x^2}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \times x^2} = \frac{x^2+x}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{a+2}{a - \frac{2}{a+1}} &= (a+2) \div \left(a - \frac{2}{a+1}\right) \\ &= (a+2) \div \frac{a(a+1)-2}{a+1} \\ &= (a+2) \times \frac{a+1}{a^2+a-2} \\ &= (a+2) \times \frac{a+1}{(a+2)(a-1)} \\ &= \frac{a+1}{a-1} \end{aligned}$$

$$\text{〔別解〕} \quad \frac{(a+2) \times (a+1)}{\left(a - \frac{2}{a+1}\right) \times (a+1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a+2)(a+1)}{a(a+1)-2} = \frac{(a+2)(a+1)}{a^2+a-2} \\
 &= \frac{(a+2)(a+1)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}
 \end{aligned}$$

2 節 2次方程式

1 複素数とその演算

教科書 P.23

- 問1 (1) 実部 -1 , 虚部 $\sqrt{3}$
 (2) 実部 2 , 虚部 1
 (3) 実部 0 , 虚部 $\sqrt{7}$
 (4) 実部 -5 , 虚部 0

問2 (1) $-x+4y$, $2x+3y$ は実数であるから

$$\begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$$

これを解いて $x=-2$, $y=1$

(2) $x+5$, $y-3$ は実数であるから

$$\begin{cases} x+5=0 \\ y-3=0 \end{cases}$$

これを解いて $x=-5$, $y=3$

教科書 P.24

- 問3 (1) $(4+5i)+(3-2i) = (4+3) + (5i-2i) = 7+3i$
 (2) $(2-4i)-(1-i) = (2-1) + (-4i+i) = 1-3i$
 (3) $(5+3i)(2-7i) = 10-35i+6i-21i^2 = 10-35i+6i+21 = 31-29i$
 (4) $(3+4i)(3-4i) = 9-16i^2 = 9+16 = 25$
 (5) $(-\sqrt{2}i)^4 = (-\sqrt{2})^4 i^4 = 4(i^2)^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4$

- 問4 (1) $3-2i$ (2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}i$
 (3) $-3i$ (4) -4

教科書 P.25

- 問5 (1) $\frac{1}{3-i} = \frac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{9-i^2} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$
 (2) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$
 (3) $\frac{2-i}{1-2i} = \frac{(2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2+4i-i-2i^2}{1-4i^2} \\
 &= \frac{2+3i+2}{1+4} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i
 \end{aligned}$$

$$(4) \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

教科書 P.26

- 問6 (1) $2\sqrt{2}i$ (2) $-5\sqrt{2}i$

$$(3) \sqrt{-\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}}i = \frac{\sqrt{7}}{4}i$$

- 問7 $\sqrt{-18} = \sqrt{18}i = 3\sqrt{2}i$

$$-\sqrt{-18} = -\sqrt{18}i = -3\sqrt{2}i$$

より, -18 の平方根は

$$3\sqrt{2}i, -3\sqrt{2}i$$

- 問8 (1) $\sqrt{-28} \times \sqrt{-35} = \sqrt{28}i \times \sqrt{35}i$

$$= 14\sqrt{5}i^2 = -14\sqrt{5}$$

$$(2) \frac{6}{\sqrt{-4}} = \frac{6}{\sqrt{4}i} = \frac{6}{2i} = \frac{3}{i} = \frac{3i}{i^2} = \frac{3i}{-1} = -3i$$

2 解の公式

教科書 P.28

問9 (1) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(2) $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$

$$= \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

(3) $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5}$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-44}}{10} = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}i}{10}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{5}$$

(4) $x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 13}}{2 \cdot 4}$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{-64}}{8}$$

$$= \frac{-12 \pm 8i}{8} = \frac{-3 \pm 2i}{2}$$

- 問10 $ax^2+2b'x+c=0$ より

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\
 &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\
 &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}
 \end{aligned}$$

よって、 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

である。

問11 (1) $x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-4)} = -1 \pm \sqrt{5}$

(2) $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot 2}}{3}$
 $= \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$

教科書 P.30

問12 判別式を D とおく。

(1) $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -15 < 0$

であるから、異なる2つの虚数解をもつ。

(2) $\frac{D}{4} = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$

であるから、重解をもつ。

(3) $\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot (-3) = 12 > 0$

であるから、異なる2つの実数解をもつ。

(4) $D = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -12 < 0$

であるから、異なる2つの虚数解をもつ。

問13 この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2k = 9 - 8k$$

虚数解をもつのは、 $D < 0$ のときであるから

$$9 - 8k < 0$$

すなわち $k > \frac{9}{8}$

問14 この2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= (-k)^2 - 2 \cdot (k^2 - 8) \\
 &= -k^2 + 16 = -(k+4)(k-4)
 \end{aligned}$$

2つの実数解をもつのは、 $\frac{D}{4} > 0$ のときであ

るから $(k+4)(k-4) < 0$

すなわち $-4 < k < 4$

③ 解と係数の関係

教科書 P.31

問15 (1) 2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{-4}{2} = -2$$

よって、和 $-\frac{3}{2}$ 、積 -2

(2) 2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1, \quad \alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$$

よって、和 1 、積 -2

教科書 P.32

問16 解と係数の関係より $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 5$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 5$
 $= 6$

(2) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4^2 - 4 \cdot 5$
 $= -4$

(3) $\alpha^3 + \beta^3$
 $= (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) - 3(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)$
 $= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
 $= 4^3 - 3 \cdot 5 \cdot 4 = 4$

問17 2つの解を $\alpha, \alpha + 1$ とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha + (\alpha + 1) = -m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha + 1) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ より $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$$

$$\alpha = -2, 1$$

$\textcircled{1}$ より、 $m = -2\alpha - 1$ であるから

$$\alpha = -2 \text{ のとき } m = 3$$

$$\alpha = 1 \text{ のとき } m = -3$$

よって $m = \pm 3$

教科書 P.33

問18 (1) $x^2 - 2x - 2 = 0$ を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 2x - 2 \\
 &= \{x - (1 + \sqrt{3})\}\{x - (1 - \sqrt{3})\} \\
 &= (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

(2) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 &3x^2 - 2x + 1 \\
 &= 3\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}\right)
 \end{aligned}$$

(3) $x^2 + 1 = 0$ を解くと

$$x = \pm i$$

したがって

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$$

教科書 P.34

問19 $x^2 = A$ とおくと

$$x^4 - x^2 - 6 = A^2 - A - 6$$

$$= (A + 2)(A - 3)$$

(1) $x^4 - x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x^2 - 3)$

(2) $x^4 - x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x^2 - 3)$

$$= (x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

(3) $x^4 - x^2 - 6$

$$= (x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$= (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

問20 (1) $(2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4$

$$(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = -1$$

よって $x^2 - 4x - 1 = 0$

(2) $(-5 + i) + (-5 - i) = -10$

$$(-5 + i)(-5 - i) = 26$$

よって $x^2 + 10x + 26 = 0$

教科書 P.35

問21 2数を α, β とおく。

(1) $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$ より,

2数は2次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$

の2つの解であるから、これを解くと

$$1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$$

(2) $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$ より,

2数は2次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$

の2つの解であるから、これを解くと

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

問22 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = -\frac{5}{2}$$

(1) $(2\alpha + 1) + (2\beta + 1) = 2(\alpha + \beta) + 2$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2$$

$$= 3$$

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1$$

$$= 4 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1$$

$$= -8$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 - 3x - 8 = 0$$

(2) $(\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2$

$$= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$$

$$= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -2$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$$

すなわち $2x^2 + 3x - 4 = 0$

Training トレーニング

教科書 P.36

11 (1) $(2 - i)x + (3 - 2i)y$

$$= (2x + 3y) + (-x - 2y)i$$

$2x + 3y, -x - 2y$ は実数であるから

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ -x - 2y = 2 \end{cases}$$

これを解いて $x = 4, y = -3$

(2) $(3 + 2i)x + (3i - 2)y$

$$= (3x - 2y) + (2x + 3y)i$$

$3x - 2y, 2x + 3y$ は実数であるから

$$\begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 2x + 3y = -11 \end{cases}$$

これを解いて $x = 2, y = -5$

12 (1) $-5i \cdot (-4i) = 20i^2 = -20$

(2) $(5 - \sqrt{3}i)^2 = 25 - 10\sqrt{3}i + 3i^2$

$$= 25 - 10\sqrt{3}i - 3$$

$$= 22 - 10\sqrt{3}i$$

(3) $\frac{4+i}{4-i} = \frac{(4+i)^2}{(4-i)(4+i)} = \frac{16+8i+i^2}{16-i^2}$

$$= \frac{16+8i-1}{16+1} = \frac{15}{17} + \frac{8}{17}i$$

(4) $\frac{1+3i}{3-i} - \frac{3-i}{1+3i}$

$$= \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} - \frac{(3-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$

$$= \frac{3+i+9i+3i^2}{9-i^2} - \frac{3-9i-i+3i^2}{1-9i^2}$$

$$= \frac{3+i+9i-3}{9+1} - \frac{3-9i-i-3}{1+9}$$

$$= \frac{10i - (-10i)}{10} = 2i$$

13 (1) $\sqrt{-2} - \sqrt{-18} + \sqrt{8}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2}i - \sqrt{18}i + \sqrt{8} \\
 &= \sqrt{2}i - 3\sqrt{2}i + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \\
 (2) \quad &\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-27}} + \frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{18}} \\
 &= \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}i} + \frac{\sqrt{50}i}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}i} + \frac{5\sqrt{2}i}{3\sqrt{2}} \\
 &= \frac{2i}{3i^2} + \frac{5i}{3} = \frac{2i}{-3} + \frac{5i}{3} = \frac{-2+5}{3}i = i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad (1) \quad &\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}i = 6i \\
 &\sqrt{ab} = \sqrt{-36} = 6i \\
 &\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}i} = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2i^2} = -\frac{i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{i}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{5}i = \sqrt{10}i^2 = -\sqrt{10} \\
 &\sqrt{ab} = \sqrt{10} \\
 &\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \\
 &\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad (1) \quad &\text{解の公式を用いて} \\
 &x = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{50-52}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &20x^2 + 12x + 5 = 0 \\
 &\text{解の公式を用いて}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-6 \pm \sqrt{36-100}}{20} \\
 &= \frac{-6 \pm 8i}{20} = \frac{-3 \pm 4i}{10}
 \end{aligned}$$

16 判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
 D &= (a-3)^2 - 4(-a^2+2) \\
 &= 5a^2 - 6a + 1 \\
 &= (5a-1)(a-1)
 \end{aligned}$$

虚数解をもつのは、 $D < 0$ のときであるから

$$(5a-1)(a-1) < 0$$

$$\text{よって } \frac{1}{5} < a < 1$$

17 解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$(1) \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\alpha^3 + \beta^3 \\
 &= (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) - 3(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) \\
 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

$$= 2^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 5$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad &\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\
 &= \left(2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{2} = 6
 \end{aligned}$$

18 (1) $x^2 + x + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 &x^2 + x + 1 \\
 &= \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(2) $4x^2 + 9 = 0$ を解くと

$$x = \pm \frac{3}{2}i$$

したがって

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 9 &= 4\left(x - \frac{3}{2}i\right) \left(x + \frac{3}{2}i\right) \\
 &= (2x - 3i)(2x + 3i)
 \end{aligned}$$

19 $x^2 = A$ とおくと

$$\begin{aligned}
 x^4 - 4x^2 - 5 &= A^2 - 4A - 5 \\
 &= (A-5)(A+1)
 \end{aligned}$$

$$(1) \quad x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2 - 5)(x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2 - 5)(x^2 + 1) \\
 &= (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad &x^4 - 4x^2 - 5 \\
 &= (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x^2 + 1) \\
 &= (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x + i)(x - i)
 \end{aligned}$$

20 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = 1$$

$$(1) \quad 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$2\alpha \cdot 2\beta = 4\alpha\beta = 4 \cdot 1 = 4$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\
 &= 1^2 - 2 \cdot 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1^2 = 1$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad &\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\
 &= 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -2
 \end{aligned}$$

$$\alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = 1^3 = 1$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

3 節 高次方程式

1 因数定理

教科書 P.37

問1 (1) $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 7$

(2) $P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 5 = 7$

(3) $P(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 5 = 5$

問2 第1式を $P(x)$ とおく。

(1) $x+1$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 1 \\ &= -10 \end{aligned}$$

(2) $x-3$ で割ったときの余りは

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 15 = 0$$

教科書 P.38

問3 $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - ax - 1$ とおけば、 $P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りが -5 となるのは、 $P(-2) = -5$ のときである。

$$\begin{aligned} P(-2) &= 3 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 \\ &\quad - a \cdot (-2) - 1 \\ &= -9 + 2a \end{aligned}$$

であるから $-9 + 2a = -5$

すなわち $a = 2$

問4 $P(x)$ を $x^2 - 2x - 8$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。余りは1次以下の整式であるから、それを $ax + b$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2x - 8)Q(x) + ax + b \\ &= (x-4)(x+2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

ここで $P(4) = 4a + b$

$$P(-2) = -2a + b$$

一方、剰余の定理により

$$P(4) = 2, \quad P(-2) = 14$$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} 4a + b = 2 \\ -2a + b = 14 \end{cases}$$

これを解くと $a = -2, b = 10$

よって、求める余りは $-2x + 10$

教科書 P.39

問5 $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$ とおく。

(1) $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 9 = 0$

よって、 $x-1$ を因数にもつ。

(2) $P(-1)$
 $= 2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 9$
 $= 8 \neq 0$

よって、 $x+1$ を因数にもたない。

(3) $P(-2)$
 $= 2 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 9$
 $= -15 \neq 0$

よって、 $x+2$ を因数にもたない。

(4) $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$
 よって、 $x-3$ を因数にもつ。

問6 (1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ とおくと

$$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 = 0$$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x-1)(x+2)^2 \end{aligned}$$

(2) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$ とおくと

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 2 = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(2x^2 + 3x - 2) \\ &= (x+1)(x+2)(2x-1) \end{aligned}$$

(3) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ とおくと

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 0$$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x^2 - x - 6) \\ &= (x-2)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

(4) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$ とおくと

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 17 \cdot 2 - 6 = 0$$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(3x^2 + 10x + 3) \\ &= (x-2)(x+3)(3x+1) \end{aligned}$$

2 簡単な高次方程式

教科書 P.40

問7 (1) $x^3 - 8 = 0$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

よって

$$x-2 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + 2x + 4 = 0$$

ゆえに $x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$

(2) $x^3 + 1 = 0$

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

よって

$$x+1=0 \text{ または } x^2-x+1=0$$

ゆえに $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

問8 (1) $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

いずれにしても、例題4(教科書 p.40)より1の3乗根は1, ω , ω^2 の3つである。

【別解】 1, ω は1の3乗根であり

$$(\omega^2)^3 = \omega^6 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1$$

であるから ω^2 も1の3乗根である。

$$\omega^2 - 1 = (\omega - 1)(\omega + 1) \neq 0$$

$$\omega^2 - \omega = \omega(\omega - 1) \neq 0$$

より、 ω^2 は1と ω 以外の1の3乗根である。

(2) (1)より

$$\begin{aligned} & \omega^2 + \omega + 1 \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 \mp \sqrt{3}i}{2} + 1 = 0 \end{aligned}$$

(複号同順)

【別解】 ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

教科書 P.41

問9 (1) $x^2 = A$ とおくと $A^2 - 13A + 36 = 0$
左辺を因数分解して

$$(A-4)(A-9) = 0$$

よって $A-4=0$ または $A-9=0$

すなわち $x^2-4=0$ または $x^2-9=0$

ゆえに $x = \pm 2, \pm 3$

(2) $x^2 = A$ とおくと $A^2 - 2A - 15 = 0$

$$(A+3)(A-5) = 0$$

よって $A+3=0$ または $A-5=0$

すなわち $x^2+3=0$ または $x^2-5=0$

ゆえに $x = \pm\sqrt{3}i, \pm\sqrt{5}$

(3) $x^2 = A$ とおくと $A^2 = 1$

よって $A = \pm 1$

すなわち $x^2 = 1$ または $x^2 = -1$

ゆえに $x = \pm 1, \pm i$

問10 (1) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ とおくと

$$P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2 - 3x - 10) \\ &= (x-1)(x-5)(x+2) \end{aligned}$$

より、 $P(x) = 0$ の解は

$$x = 1, 5, -2$$

(2) $P(x) = 2x^3 - 5x - 6$ とおくと

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 - 6 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 4x + 3)$$

より、 $P(x) = 0$ の解は

$$x = 2, \frac{-2 \pm \sqrt{2}i}{2}$$

教科書 P.42

問11 (1) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ とおくと

$$P(2) = 2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x^2 + x - 6) \\ &= (x-2)^2(x+3) \end{aligned}$$

より、 $P(x) = 0$ の解は $x = 2, -3$

(2) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ とおくと

$$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(x^2 + 2x + 1) \\ &= (x+1)^3 \end{aligned}$$

より、 $P(x) = 0$ の解は $x = -1$

教科書 P.43

問12 $x = 1-i$ が方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ の解であるから

$$(1-i)^3 + a(1-i)^2 + b(1-i) - 2 = 0$$

$$(-2-2i) + a(-2i) + b(1-i) - 2 = 0$$

$$(b-4) + (-2a-b-2)i = 0$$

$b-4, -2a-b-2$ は実数であるから

$$\begin{cases} b-4=0 \\ -2a-b-2=0 \end{cases}$$

これを解いて $a = -3, b = 4$

このとき、方程式は $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ となる。

左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2-2x+2)=0$$

$$x=1, 1\pm i$$

よって、他の解は $x=1, 1+i$

Training トレーニング

- 21 (1) $P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とおくと

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

$x = -\frac{b}{a}$ のとき, $ax+b=0$ であるから

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right) \text{ が成り立つ.}$$

- (2) $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 7$ とおくと, (1) の結果から, $P(x)$ を $2x-3$ で割ったときの余りは

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7 = 2$$

- 22 (1) $P(x) = x^3 - ax^2 - 5x - 4$ とおけば, $P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りが 2 となるのは, $P(-2) = 2$ のときである。

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - a \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 4 \\ &= -4a - 2 \end{aligned}$$

であるから $-4a - 2 = 2$

よって $a = -1$

- (2) $P(x) = ax^3 - 2x^2 - 12x + 10$ とおけば, $P(x)$ を $3x-2$ で割ったときの余りが 2 となるのは, $P\left(\frac{2}{3}\right) = 2$ のときである。

$$\begin{aligned} P\left(\frac{2}{3}\right) &= a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 12 \cdot \frac{2}{3} + 10 \\ &= \frac{8}{27}a + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

であるから $\frac{8}{27}a + \frac{10}{9} = 2$

よって $a = 3$

- 23 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。余りは 1 次以下の整式であるから, それを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

ここで $P(-1) = -a + b$

$$P(2) = 2a + b$$

一方, 因数定理と剰余の定理により

$$P(-1) = 0, P(2) = 6$$

$$\text{よって } \begin{cases} -a + b = 0 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

これを解くと $a = 2, b = 2$

よって, 求める余りは $2x+2$

- 24 (1) $P(x) = 4x^3 + 7x^2 - 5x - 6$ とおくと
 $P(1) = 4 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 = 0$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(4x^2 + 11x + 6) \\ &= (x-1)(x+2)(4x+3) \end{aligned}$$

- (2) $P(x) = 9x^3 - 30x^2 + 7x + 6$ とおくと
 $P(3) = 9 \cdot 3^3 - 30 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 6 = 0$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(9x^2 - 3x - 2) \\ &= (x-3)(3x+1)(3x-2) \end{aligned}$$

- 25 1 の 3 乗根の性質 (教科書 p.40 問 8) より
 $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\begin{aligned} (1) \quad \omega + \frac{1}{\omega} &= \omega + \frac{\omega^3}{\omega} \\ &= \omega + \omega^2 = (\omega^2 + \omega + 1) - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} &= \omega^2 + \frac{\omega^3}{\omega^2} \\ &= \omega^2 + \omega = (\omega^2 + \omega + 1) - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \omega^3 + \frac{1}{\omega^3} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

- 26 (1) $x^2 = A$ とおくと $2A^2 - 5A - 3 = 0$
左辺を因数分解して

$$(A-3)(2A+1) = 0$$

よって $A-3=0$ または $2A+1=0$
すなわち

$$x^2 - 3 = 0 \text{ または } 2x^2 + 1 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

- (2) $x^2 = A$ とおくと $3A^2 + 10A + 8 = 0$
左辺を因数分解して

$$(A+2)(3A+4) = 0$$

よって $A+2=0$ または $3A+4=0$
すなわち

$$x^2 + 2 = 0 \text{ または } 3x^2 + 4 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = \pm\sqrt{2}i, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

- 27 (1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 20x - 25$ とおくと
 $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2$

$$-20 \cdot (-1) - 25 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)(2x^2+5x-25) \\ &= (x+1)(x+5)(2x-5) \end{aligned}$$

より、 $P(x) = 0$ の解は

$$x = -1, -5, \frac{5}{2}$$

(2) $P(x) = 3x^3 - 8x + 8$ とおくと

$$P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) + 8 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$$P(x) = (x+2)(3x^2 - 6x + 4)$$

より、 $P(x) = 0$ の解は

$$x = -2, \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}$$

28 $x = 1 + 2i$ が方程式 $x^3 + ax + b = 0$ の解であるから

$$(1+2i)^3 + a(1+2i) + b = 0$$

$$(-11-2i) + a(1+2i) + b = 0$$

$$(a+b-11) + (2a-2)i = 0$$

$a+b-11$, $2a-2$ は実数であるから

$$\begin{cases} a+b-11=0 \\ 2a-2=0 \end{cases}$$

これを解いて $a = 1$, $b = 10$

このとき、方程式は $x^3 + x + 10 = 0$ となる。

左辺を因数分解すると

$$(x+2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$x = -2, 1 \pm 2i$$

したがって、他の解は $x = -2, 1 - 2i$

4 節 式と証明

1 恒等式

教科書 P.45

問1 (1) 両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = 1, b = 0, c = 1$$

(2) $a-1 = 0$, $2b = 0$, $c+3 = 0$

であるから

$$a = 1, b = 0, c = -3$$

問2 (1) 左辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned} ax^2 + (2a+b)x + (a+b+c) \\ = 2x^2 + 3x + 4 \end{aligned}$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

これを解いて $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$

(2) 左辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned} (a+b+c)x^2 + (-3a-5b-4c)x \\ + (2a+6b+3c) = 3x+5 \end{aligned}$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ -3a-5b-4c = 3 \\ 2a+6b+3c = 5 \end{cases}$$

これを解いて $a = 7$, $b = 4$, $c = -11$

教科書 P.46

問3 両辺に $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ を掛ける

$$4x - 13 = a(x-2) + b(x+3)$$

この式が恒等式となればよい。

右辺を整理すると、この等式は

$$4x - 13 = (a+b)x + (-2a+3b)$$

よって $a+b = 4$, $-2a+3b = -13$

これを解いて $a = 5$, $b = -1$

教科書 P.47

問4 (1) (左辺) $= (2a+b)^2 - (a+2b)^2$

$$= (4a^2 + 4ab + b^2) - (a^2 + 4ab + 4b^2)$$

$$= 3a^2 - 3b^2$$

$$(右辺) = 3(a^2 - b^2) = 3a^2 - 3b^2$$

ゆえに

$$(2a+b)^2 - (a+2b)^2 = 3(a^2 - b^2)$$

(2) (左辺) $= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$(右辺) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

$$= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2)$$

$$+ (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$$

$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

ゆえに

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$= (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

教科書 P.48

問5 (1) $x+y = 1$ より $x = 1-y$

したがって

$$(左辺) = (1-y)^2 - (1-y)$$

$$= 1 - 2y + y^2 - 1 + y$$

$$= y^2 - y = (右辺)$$

ゆえに $x^2 - x = y^2 - y$

(2) $a + b + c = 0$ より $c = -a - b$

したがって

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= a^2 + b^2 + (-a - b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2a^2 + 2ab + 2b^2 \\ (\text{右辺}) &= -2\{ab + b(-a - b)\} \\ &\quad + (-a - b)a \\ &= -2(ab - ab - b^2 - a^2 - ab) \\ &= -2(-a^2 - ab - b^2) \\ &= 2a^2 + 2ab + 2b^2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

問6 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a = bk, c = dk$

であるから

$$(\text{左辺}) = \frac{2bk + 3dk}{2b + 3d} = \frac{k(2b + 3d)}{2b + 3d} = k$$

$$(\text{右辺}) = \frac{2bk - 3dk}{2b - 3d} = \frac{k(2b - 3d)}{2b - 3d} = k$$

ゆえに $\frac{2a + 3c}{2b + 3d} = \frac{2a - 3c}{2b - 3d}$

2 不等式の証明

教科書 P.49

問7 (1) $b > 0$ であるから、不等式の性質 [3] を用いて

$a > 0$ の両辺に b を掛けると

$ab > 0$ が成り立つ。

(2) $b < 0$ であるから、不等式の性質 [4] を用いて

$a < 0$ の両辺に b を掛けると

$ab > 0$ が成り立つ。

教科書 P.50

問8 (左辺) - (右辺) $= (3a + b) - (a + 3b)$
 $= 2a - 2b = 2(a - b)$

ここで、 $a > b$ より $a - b > 0$ であるから

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = 2(a - b) > 0$$

ゆえに $3a + b > a + 3b$

教科書 P.51

問9 (1) (左辺) - (右辺)

$$= 2(x^2 + y^2) - (x - y)^2$$

$$= (2x^2 + 2y^2) - (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$(x + y)^2 \geq 0$ であるから

$$2(x^2 + y^2) \geq (x - y)^2$$

等号が成り立つのは、 $x + y = 0$ 、すなわち

$x = -y$ のときである。

(2) (左辺) - (右辺)

$$= 5(x^2 + y^2) - (2x - y)^2$$

$$= (5x^2 + 5y^2) - (4x^2 - 4xy + y^2)$$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$= (x + 2y)^2$$

$(x + 2y)^2 \geq 0$ であるから

$$5(x^2 + y^2) \geq (2x - y)^2$$

等号が成り立つのは、 $x + 2y = 0$ 、すなわち

$x = -2y$ のときである。

問10 (1) (左辺) - (右辺) $= x^2 + y^2 - xy$

$$= \left(x^2 - xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3}{4}y^2$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

ここで、 $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$ 、 $\frac{3}{4}y^2 \geq 0$ である

から

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

よって $x^2 + y^2 \geq xy$

等号が成り立つのは、 $x - \frac{y}{2} = 0$ かつ

$y = 0$ 、すなわち $x = y = 0$ のときである。

(2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$

$$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9)$$

$$= (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

ここで、 $(x - 2)^2 \geq 0$ 、 $(y - 3)^2 \geq 0$ である

から

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 \geq 0$$

等号が成り立つのは、 $x - 2 = 0$ かつ

$y - 3 = 0$ 、すなわち $x = 2$ 、 $y = 3$ のとき

である。

教科書 P.52

問11 $(a + 1)^2 - (\sqrt{2a + 1})^2$

$$= (a^2 + 2a + 1) - (2a + 1)$$

$$= a^2 \geq 0$$

したがって $(a + 1)^2 \geq (\sqrt{2a + 1})^2$

$a + 1 \geq 0$ 、 $\sqrt{2a + 1} \geq 0$ であるから

$$a+1 \geq \sqrt{2a+1}$$

等号が成り立つのは、 $a=0$ のときである。

教科書 P.53

問12 (1) 相加平均 $\frac{1+100}{2} = 50.5$

相乗平均 $\sqrt{1 \cdot 100} = 10$

$$50.5 > 10$$

(2) 相加平均 $\frac{40+40}{2} = 40$

相乗平均 $\sqrt{40 \cdot 40} = 40$

$$40 = 40$$

(3) 相加平均 $\frac{36+64}{2} = 50$

相乗平均 $\sqrt{36 \cdot 64} = 48$

$$50 > 48$$

教科書 P.54

問13 (1) $a > 0$, $\frac{4}{a} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$$

等号が成り立つのは、 $a = \frac{4}{a}$ のときである。

このとき $a^2 = 4$

よって $a = \pm 2$

$a > 0$ であるから $a = 2$

したがって、等号が成り立つのは $a=2$ のときである。

(2) $\frac{b}{a} > 0$, $\frac{a}{b} > 0$ であるから、相加平均と

相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

等号が成り立つのは、 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ のときである。

このとき $a^2 = b^2$

$a > 0$, $b > 0$ であるから $a = b$

したがって、等号が成り立つのは $a=b$ のときである。

Challenge チャレンジ 例題 絶対値を含む不等式の証明

教科書 P.55

問1 $(|a| + |b|)^2 - |a-b|^2$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a-b)^2$$

$$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2(|ab| + ab)$$

ここで、 $|ab| \geq -ab$ であるから

$$2(|ab| + ab) \geq 0$$

したがって $(|a| + |b|)^2 \geq |a-b|^2$

$|a| + |b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$ であるから

$$|a| + |b| \geq |a-b|$$

等号が成り立つのは $|ab| = -ab$, すなわち $ab \leq 0$ のときである。

Training トレーニング

教科書 P.56

29 (1) (左辺) $= x^2 - 3$

(右辺) $= a(x^2 - 1) + b(x - 1) + c$

$$= ax^2 + bx + (-a - b + c)$$

であるから、同じ次数の項の係数を比較すると

$$a = 1, b = 0, -a - b + c = -3$$

これを解いて $a = 1, b = 0, c = -2$

(2) (左辺) $= x^3 - x^2 - 4x$

(右辺) $= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

$$+ a(x^2 - 2x + 1) + b(x - 1) + c$$

$$= x^3 + (a-3)x^2 + (-2a+b+3)x$$

$$+ (a-b+c-1)$$

であるから、同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases} a-3 = -1 \\ -2a+b+3 = -4 \\ a-b+c-1 = 0 \end{cases}$$

これを解いて $a = 2, b = -3, c = -4$

(3) 両辺に $3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1)$ を掛けると

$$3x+8 = a(3x+1) + b(x-2)$$

この式が恒等式となればよい。

右辺を整理するとこの等式は

$$3x+8 = (3a+b)x + (a-2b)$$

よって $3a+b=3, a-2b=8$

これを解いて $a=2, b=-3$

30 (1) (左辺) $= (a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2)$

$$- (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2)$$

$$= a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2$$

$$(右辺) = a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2$$

ゆえに

$$(ax - by)^2 - (ay - bx)^2 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2)$$

$$(2) (右辺) = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (左辺)$$

ゆえに

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$(3) (左辺) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 1 = x^3 + 3x$$

$$(右辺) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 + 1 = x^3 + 3x$$

ゆえに

$$(x+1)^3 - (3x^2+1) = (x-1)^3 + (3x^2+1)$$

31 $x - y = 1$ より $x = y + 1$

$$(1) (左辺) = (y+1)^2 + y^2 = 2y^2 + 2y + 1$$

$$(右辺) = 2(y+1)y + (y+1) - y = 2y^2 + 2y + 1$$

ゆえに $x^2 + y^2 = 2xy + x - y$

$$(2) (右辺) = (y+1)^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 3y = y^3 + 1 = (左辺)$$

ゆえに $y^3 + 1 = x^3 - 3xy$

32 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a = bk, c = dk$ よって

$$(左辺) = \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$(右辺) = \frac{a^2d}{b^2c} = \frac{(bk)^2d}{b^2dk} = k$$

ゆえに $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a^2d}{b^2c}$

33 (左辺) - (右辺) = $(a^2+4)(x^2+1) - (ax+2)^2 = (a^2x^2+4x^2+a^2+4) - (a^2x^2+4ax+4) = 4x^2-4ax+a^2 = (2x-a)^2 \geq 0$

ゆえに $(a^2+4)(x^2+1) \geq (ax+2)^2$

等号が成り立つのは、 $2x - a = 0$ 、すなわち

$a = 2x$ のときである。

34 (左辺) - (右辺) = $(a^2+b^2) - 2(a+b-1) = (a^2-2a+1) + (b^2-2b+1) = (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$

ゆえに $a^2 + b^2 \geq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは、 $a-1 = b-1 = 0$ 、すな

わち $a = b = 1$ のときである。

35 $(\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (a-b) - (a-2\sqrt{ab}+b) = 2\sqrt{ab} - 2b = 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
 $a \geq b \geq 0$ より $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq 0$ であるから $2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \geq 0$

したがって $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a-b})^2$
 $\sqrt{a}-\sqrt{b} \geq 0, \sqrt{a-b} \geq 0$ であるから $\sqrt{a}-\sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$

等号が成り立つのは、 $b = 0$ または

$a = b$ のときである。

36 $9a > 0, \frac{4}{a} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$9a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{9a \cdot \frac{4}{a}} = 12$$

等号が成り立つのは、 $9a = \frac{4}{a}$ のときである。

このとき $a^2 = \frac{4}{9}$

よって $a = \pm \frac{2}{3}$

$a > 0$ であるから $a = \frac{2}{3}$

したがって、等号が成り立つのは、 $a = \frac{2}{3}$ のときである。

◆ 参考 組立除法

教科書 P.57

問 1 (1)

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1 \ -5 \ 8 \ -3} \\ + \quad \quad 3 \ -6 \ 6 \\ \hline 1 \ -2 \ 2 \ \overline{) 3} \end{array}$$

商 $x^2 - 2x + 2$, 余り 3

$$(2) \begin{array}{r} -2 \mid 1 \quad 0 \quad -1 \quad 3 \quad -6 \\ + \quad \quad -2 \quad 4 \quad -6 \quad 6 \\ \hline 1 \quad -2 \quad 3 \quad -3 \quad 0 \end{array}$$

商 $x^3 - 2x^2 + 3x - 3$, 余り 0

[Level Up]

教科書 P.58

1 (1) (右辺)

$$\begin{aligned} &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 = (\text{左辺}) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

(2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned} &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \\ &= \{(a+b)^3 + c^3\} - 3ab\{(a+b) + c\} \\ &= \{(a+b) + c\}\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\} \\ &\quad - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)\{(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) \\ &\quad - 3ab\} \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

2 $(ax+b)^{12}$ の展開式の一般項は

${}_{12}C_r(ax)^{12-r}b^r$ ($r=0, 1, 2, \dots, 12$)
と表される。 x^2 の項は $r=10$ の場合であるから

$$\begin{aligned} {}_{12}C_{10}(ax)^2b^{10} &= 66 \cdot a^2x^2 \cdot b^{10} \\ &= 66a^2b^{10}x^2 \end{aligned}$$

よって、 x^2 の係数は $66a^2b^{10}$

x^{11} の項は $r=1$ の場合であるから

$$\begin{aligned} {}_{12}C_1(ax)^{11}b &= 12 \cdot a^{11}x^{11} \cdot b \\ &= 12a^{11}bx^{11} \end{aligned}$$

よって、 x^{11} の係数は $12a^{11}b$

3 $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$ とおく。

(a, b, c, d は実数)

$$(1) \begin{aligned} \overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a+bi) + (c+di)} \\ &= \overline{(a+c) + (b+d)i} \\ &= (a+c) - (b+d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} + \overline{\beta} &= \overline{(a-bi) + (c-di)} \\ &= (a+c) - (b+d)i \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$(2) \begin{aligned} \overline{\alpha\beta} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\ &= \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (ac-bd) - (ad+bc)i \\ \overline{\alpha\beta} &= (a-bi)(c-di) \end{aligned}$$

$$= (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\text{ゆえに } \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$$

4 (1) $x = 1 - \sqrt{3}i$ より $x-1 = -\sqrt{3}i$

両辺を 2 乗して

$$x^2 - 2x + 1 = -3$$

$$\text{よって } x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$(2) \begin{array}{r} x-2 \\ x^2-2x+4 \overline{) x^3-4x^2+9x+3} \\ \underline{x^3-2x^2+4x} \\ -2x^2+5x+3 \\ \underline{-2x^2+4x-8} \\ x+11 \end{array}$$

上の割り算により

$$\begin{aligned} &x^3 - 4x^2 + 9x + 3 \\ &= (x^2 - 2x + 4)(x - 2) + (x + 11) \end{aligned}$$

(1) の結果から、 $x = 1 - \sqrt{3}i$ のとき、 $x^2 - 2x + 4 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 9x + 3 &= 0 + 1 - \sqrt{3}i + 11 \\ &= 12 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

5 2次方程式 $x^2 - 2x + a = 0$ の判別式を D_1 , 2次方程式 $x^2 + 4x - 2a = 0$ の判別式を D_2 とする。

$$\frac{D_1}{4} = 1 - a, \quad \frac{D_2}{4} = 4 + 2a$$

一方が異なる 2 つの実数解をもち、他方が虚数解をもつのは、 D_1, D_2 のうち一方が正、他方が負、すなわち $D_1 \cdot D_2 < 0$ のときであるから

$$(1-a)(4+2a) < 0$$

$$(a-1)(a+2) > 0$$

よって、求める a の値の範囲は

$$a < -2, 1 < a$$

6 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -k, \quad \alpha\beta = -k - 1$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-k)^2 - 2(-k - 1) \\ &= k^2 + 2k + 2 \end{aligned}$$

したがって $k^2 + 2k + 2 = 10$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

ゆえに $k = -4, 2$

- 7 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) + 3x - 5$$

$$x = 2 \text{ を代入して } P(2) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q_2(x) - 5x + 3$$

$$x = -2 \text{ を代入して}$$

$$P(-2) = 13 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

- $P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。余りは1次以下の整式であるから、それを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x-2)(x+2)Q(x) + ax + b$$

$$x = 2, x = -2 \text{ をそれぞれ代入して}$$

$$P(2) = 2a + b, P(-2) = -2a + b$$

$$\dots\dots \textcircled{3}$$

- ①, ②, ③ より

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ -2a + b = 13 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて } a = -3, b = 7$$

$$\text{よって、求める余りは } -3x + 7$$

教科書 P.59

- 8 $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ で割り切れるから、 $x+2, x-1$ の両方を因数にもつ。

$$\text{よって、} P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 6 \text{ とおくと}$$

$$P(-2) = 0, P(1) = 0$$

$$\text{よって } \begin{cases} 4a - 2b - 30 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて } a = 6, b = -3$$

- 9 1 の3乗根の性質より

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

が成り立つ。

$$(1) \quad \omega^6 + \omega^3 + 1 = (\omega^3)^2 + \omega^3 + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$(2) \quad \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega^3 \cdot \omega + \omega^2 + 1 = 1 \cdot \omega + \omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

- 10 もとの立方体の1辺の長さを x cm とおくと

$$(x+2)(x+3)(x-1) = 60$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 66 = 0$$

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 66 \text{ とおくと}$$

$P(3) = 0$ であるから、 $x-3$ で割り算をして

$$(x-3)(x^2 + 7x + 22) = 0$$

$$\text{よって } x = 3, \frac{-7 \pm \sqrt{39}i}{2}$$

x は1より大きい実数であるから $x = 3$

よって、もとの立方体の1辺の長さは

$$3 \text{ cm}$$

- 11 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ とおくと

$$x = ak, y = bk, z = ck$$

よって

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a^2k^2 + b^2k^2 + c^2k^2) \end{aligned}$$

$$= k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$(\text{右辺}) = (ax + by + cz)^2$$

$$= (a^2k + b^2k + c^2k)^2$$

$$= k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

ゆえに

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ = (ax + by + cz)^2 \end{aligned}$$

- 12 (右辺) - (左辺)

$$= 2(ac + bd) - (a+b)(c+d)$$

$$= 2ac + 2bd - (ac + ad + bc + bd)$$

$$= ac - ad - bc + bd$$

$$= (a-b)(c-d)$$

ここで、 $a \geq b, c \geq d$ より

$$a - b \geq 0, c - d \geq 0$$

であるから

$$(a-b)(c-d) \geq 0$$

$$\text{よって } (a+b)(c+d) \leq 2(ac+bd)$$

等号が成り立つのは、 $a-b=0$ または

$c-d=0$, すなわち、 $a=b$ または $c=d$ の

ときである。

- 13 (1) (左辺) - (右辺)

$$= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$$

$$= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$$

$$- (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$$

$$= b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2$$

$$= (bx - ay)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

等号が成り立つのは、 $bx - ay = 0$ のとき

である。

$$\begin{aligned}
(2) \quad & (\text{左辺}) - (\text{右辺}) \\
&= (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \\
&= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\
&= \frac{1}{2}\{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \\
&\qquad\qquad\qquad + (c^2 - 2ca + a^2)\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}
\end{aligned}$$

$(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(c-a)^2 \geq 0$
であるから

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0$$

よって $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

等号が成り立つのは, $a-b=0$ かつ

$b-c=0$ かつ $c-a=0$, すなわち

$a=b=c$ のときである。

14 (1) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$

$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ はともに正であるから, 相加平均
と相乗平均の関係より

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

ゆえに $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2+2=4$

等号が成り立つのは, $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, すなわち,

$a^2 = b^2$ のときであるが, $a > 0$, $b > 0$ より,
 $a=b$ のときである。

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) = \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + 5$

$\frac{4a}{b}$, $\frac{b}{a}$ はともに正であるから, 相加平均
と相乗平均の関係より

$$\frac{4a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 4$$

ゆえに $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geq 4+5=9$

等号が成り立つのは, $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$, すなわち,

$4a^2 = b^2$ のときであるが, $a > 0$, $b > 0$ より,
 $b=2a$ のときである。