1 章　方程式・式と証明

Readiness check　レディネス チェック

教科書 P.6

問 1　(1)　$(2x-5y)^2$

$=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2$

$=\boldsymbol{4x^2-20xy+25y^2}$

(2)　$(4x+3y)(4x-3y)$

$=(4x)^2-(3y)^2=\boldsymbol{16x^2-9y^2}$

(3)　$(x-4)(x-6)$

$=x^2+(-4-6)x+(-4)\cdot(-6)$

$=\boldsymbol{x^2-10x+24}$

(4)　$(2x+3)(3x-7)$

$=2\cdot 3x^2+\{2\cdot(-7)+3\cdot 3\}x+3\cdot(-7)$

$=\boldsymbol{6x^2-5x-21}$

問 2　(1)　$4x^2+12x+9$

$=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2=\boldsymbol{(2x+3)^2}$

(2)　$25x^2-y^2$

$=(5x)^2-y^2=\boldsymbol{(5x+y)(5x-y)}$

(3)　$x^2+8x+12$

$=x^2+(2+6)x+2\cdot 6$

$=\boldsymbol{(x+2)(x+6)}$

(4)　$6x^2-23xy-18y^2$

$=\boldsymbol{(2x-9y)(3x+2y)}$

$$\begin{array}{ccccr} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -9 & \longrightarrow & -27 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 4 \\ \hline & & & & -23 \end{array}$$

教科書 P.7

問 3　(1)　$\sqrt{8}\times\sqrt{6}\times\sqrt{48}$

$=\sqrt{8\times 6\times 48}=\sqrt{8\times 6\times 6\times 8}$

$=\sqrt{8^2\times 6^2}=8\times 6=48$

(2)　$\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{48}{6}}=\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(3)　$\sqrt{45}-\sqrt{20}+\sqrt{125}$

$=\sqrt{3^2\times 5}-\sqrt{2^2\times 5}+\sqrt{5^2\times 5}$

$=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5\sqrt{5}=\boldsymbol{6\sqrt{5}}$

(4)　$(\sqrt{15}+\sqrt{6})^2$

$=(\sqrt{15})^2+2\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2$

$=15+2\sqrt{3\times 5\times 2\times 3}+6$

$=\boldsymbol{21+6\sqrt{10}}$

(5)　$(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})$

$=2(\sqrt{3})^2+(2\cdot 3-1\cdot 1)\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$

$-3(\sqrt{5})^2$

$=6+5\sqrt{15}-15=\boldsymbol{-9+5\sqrt{15}}$

問 4　(1)　$\dfrac{7}{\sqrt{28}}=\dfrac{7}{\sqrt{2^2\times 7}}=\dfrac{7}{2\sqrt{7}}$

$=\dfrac{7\times\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{7\sqrt{7}}{14}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=\boldsymbol{5-2\sqrt{6}}$

1 節　整式・分数式の計算

1 整式の乗法と因数分解

教科書 P.8

問 1　$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

教科書 P.9

問 2　(1)　$(x+1)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$

$=\boldsymbol{x^3+3x^2+3x+1}$

(2)　$(2x-1)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1$

$+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3$

$=\boldsymbol{8x^3-12x^2+6x-1}$

(3)　$(x+3y)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 3y$

$+3\cdot x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$=\boldsymbol{x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3}$

(4)　$(3x-2y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y$

$+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=\boldsymbol{27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3}$

問 3　$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$

問4 (1) $(x+1)(x^2-x+1)$
$=(x+1)(x^2-x\cdot1+1^2)$
$=x^3+1^3=\boldsymbol{x^3+1}$

(2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
$=(2x-1)\{(2x)^2+2x\cdot1+1^2\}$
$=(2x)^3-1^3=\boldsymbol{8x^3-1}$

(3) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$
$=(3x+y)\{(3x)^2-3x\cdot y+y^2\}$
$=(3x)^3+y^3=\boldsymbol{27x^3+y^3}$

(4) $(x-10y)(x^2+10xy+100y^2)$
$=(x-10y)\{x^2+x\cdot10y+(10y)^2\}$
$=x^3-(10y)^3=\boldsymbol{x^3-1000y^3}$

教科書 P.10

問5 (1) $x^3-1=x^3-1^3$
$=(x-1)(x^2+x\cdot1+1^2)$
$=\boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)}$

(2) $x^3+125=x^3+5^3$
$=(x+5)(x^2-x\cdot5+5^2)$
$=\boldsymbol{(x+5)(x^2-5x+25)}$

(3) $x^3-27y^3=x^3-(3y)^3$
$=(x-3y)\{x^2+x\cdot3y+(3y)^2\}$
$=\boldsymbol{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}$

(4) $8x^3+y^3=(2x)^3+y^3$
$=(2x+y)\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}$
$=\boldsymbol{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}$

問6 (1) $a^3=A$, $b^3=B$ とおくと
a^6-b^6
$=A^2-B^2=(A+B)(A-B)$
$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=\boldsymbol{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

(2) $x^3=A$ とおくと
x^6+2x^3+1
$=A^2+2A+1=(A+1)^2=(x^3+1)^2$
$=\{(x+1)(x^2-x+1)\}^2$
$=\boldsymbol{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}$

2 二項定理

教科書 P.11

問7 $(a+b)^5$
$=(a+b)(a+b)^4$
$=(a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$
$=1a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+1ab^4$
$\quad+1a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+1b^5$
$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
上の展開式において，両端の 1 以外の係数は
$5=1+4$, $10=4+6$, $10=6+4$, $5=4+1$
より，$(a+b)^4$ の展開式における隣り合った係数の和となっている。

問8 $n=5$ の行は左から順に
1, 5, 10, 10, 5, 1
$n=6$ の行は左から順に
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
これより
$(a+b)^6=\boldsymbol{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3}$
$\quad\boldsymbol{+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$

教科書 P.13

問9 $(a+b)^6$
$={}_6C_0a^6+{}_6C_1a^5b+{}_6C_2a^4b^2+{}_6C_3a^3b^3$
$\quad+{}_6C_4a^2b^4+{}_6C_5ab^5+{}_6C_6b^6$
$=\boldsymbol{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3}$
$\quad\boldsymbol{+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$

問10 $(3a-2b)^4$ の展開式の一般項は
${}_4C_r(3a)^{4-r}(-2b)^r$ $(r=0,1,\cdots,4)$
と表される。a^3b の項は，$r=1$ の場合であるから
${}_4C_1(3a)^3(-2b)=4\cdot3^3\cdot(-2)a^3b$
$=-216a^3b$
よって，a^3b の係数は **−216**

問11 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$
に $x=2$ を代入すると
$3^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot2+{}_nC_2\cdot2^2+\cdots+{}_nC_n\cdot2^n$
$={}_nC_0+2\cdot{}_nC_1+2^2\cdot{}_nC_2+\cdots+2^n\cdot{}_nC_n$
が成り立つ。

Challenge（チャレンジ） 例題 $(a+b+c)^n$ の展開

教科書 P.14

問1 (1) $\{(a+b)+c\}^6$ の展開式において $(a+b)^4c^2$ が現れるのは
${}_6C_2(a+b)^4c^2$
であり，$(a+b)^4$ を展開したときの a^2b^2 の係数は ${}_4C_2$ である。したがって，$a^2b^2c^2$ の係数は
${}_6C_2\times{}_4C_2=\boldsymbol{90}$

〔別解〕 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ に $n=6$, $p=q=r=2$

を代入して　　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

(2) $\{(a+2b)+3c\}^6$ の展開式において

$(a+2b)^5\cdot 3c$ が現れるのは

$_6C_1(a+2b)^5\cdot 3c$

であり，$(a+2b)^5$ の展開式において

$a^2\cdot(2b)^3$ が現れるのは

$_5C_3a^2(2b)^3$

であるから，文字の部分が a^2b^3c の項は

$_6C_1\cdot{}_5C_3\cdot a^2(2b)^3\cdot 3c$

よって，a^2b^3c の係数は

$_6C_1\times{}_5C_3\times 2^3\times 3=\mathbf{1440}$

〔別解〕$(a+2b+3c)^6$ の展開式の一般項は

$\dfrac{6!}{p!q!r!}a^p\cdot(2b)^q\cdot(3c)^r$

ただし，$p+q+r=6$

であるから，文字の部分が a^2b^3c の項は

$p=2$, $q=3$, $r=1$ のときである。

$\dfrac{6!}{2!3!1!}a^2(2b)^3\cdot 3c$

$=60\cdot a^2\cdot 8b^3\cdot 3c$

$=1440a^2b^3c$

より，a^2b^3c の係数は　1440

3 整式の除法

教科書 P.15

問12

$$
\begin{array}{r}
2x+1 \\
3x-4\,\big)\,6x^2-5x+1 \\
\underline{6x^2-8x} \\
3x+1 \\
\underline{3x-4} \\
5
\end{array}
$$

$\boldsymbol{A=B(2x+1)+5}$

教科書 P.16

問13 (1)

$$
\begin{array}{r}
2x-3 \\
x^2+3x-2\,\big)\,2x^3+3x^2-8x+1 \\
\underline{2x^3+6x^2-4x} \\
-3x^2-4x+1 \\
\underline{-3x^2-9x+6} \\
5x-5
\end{array}
$$

商 $\boldsymbol{2x-3}$，余り $\boldsymbol{5x-5}$

(2)

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
x^2\boxed{}+2\,\big)\,x^3-x^2\boxed{}-1 \\
\underline{x^3\boxed{}+2x} \\
-x^2-2x-1 \\
\underline{-x^2\boxed{}-2} \\
-2x+1
\end{array}
$$

商 $\boldsymbol{x-1}$，余り $\boldsymbol{-2x+1}$

教科書 P.17

問14　$3x^3+14x^2-4x+5=B(3x-1)+(7x+3)$

が成り立つから

$B(3x-1)$

$=(3x^3+14x^2-4x+5)-(7x+3)$

$=3x^3+14x^2-11x+2$

$3x^3+14x^2-11x+2$ を $3x-1$ で割って

$$
\begin{array}{r}
x^2+5x-2 \\
3x-1\,\big)\,3x^3+14x^2-11x+2 \\
\underline{3x^3-x^2} \\
15x^2-11x \\
\underline{15x^2-5x} \\
-6x+2 \\
\underline{-6x+2} \\
0
\end{array}
$$

よって　　$\boldsymbol{B=x^2+5x-2}$

Challenge（チャレンジ） 例題 2種類の文字を含む整式の除法

問1

$$
\begin{array}{r}
x^2-ax-2a^2 \\
x-a\,\big)\,x^3-2ax^2-a^2x+2a^3 \\
\underline{x^3-ax^2} \\
-ax^2-a^2x \\
\underline{-ax^2+a^2x} \\
-2a^2x+2a^3 \\
\underline{-2a^2x+2a^3} \\
0
\end{array}
$$

商 $\boldsymbol{x^2-ax-2a^2}$，余り 0

4 分数式とその計算

教科書 P.18

問15 (1) $\dfrac{3x^2y}{9xyz}=\boldsymbol{\dfrac{x}{3z}}$

(2) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}=\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+1}{x-2}}$

(3) $\dfrac{x^3+3x^2+2x}{8x^2-8}=\dfrac{x(x+1)(x+2)}{8(x+1)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x(x+2)}{8(x-1)}}$

教科書 P.19

問16 (1) $\dfrac{x^2-49}{x^2+2x}\times\dfrac{x+2}{x-7}$

$=\dfrac{(x+7)(x-7)}{x(x+2)}\times\dfrac{x+2}{x-7}=\boldsymbol{\dfrac{x+7}{x}}$

(2) $\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{4x^2-1}{x^2-5x+4}$

$=\dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x^2-5x+4}{4x^2-1}$

$=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}\times\dfrac{(x-1)(x-4)}{(2x+1)(2x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x-4}{(x-1)(2x+1)}}$

問17 (1) $\dfrac{x+1}{x^2-x}+\dfrac{x^2-x-1}{x^2-x}$

$=\dfrac{(x+1)+(x^2-x-1)}{x^2-x}=\dfrac{x^2}{x^2-x}$

$=\dfrac{x^2}{x(x-1)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-1}}$

(2) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{(x^2+3x+1)-(x^2+x-3)}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{x+3}}$

問18 (1) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{x-1}{(x+3)(x-1)}-\dfrac{x+3}{(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{x-1-(x+3)}{(x+3)(x-1)}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{4}{(x+3)(x-1)}}$

(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2x-3}$

$=\dfrac{2x-3}{(x+1)(2x-3)}+\dfrac{3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$

$=\dfrac{2x-3+3(x+1)}{(x+1)(2x-3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{5x}{(x+1)(2x-3)}}$

教科書 P.20

問19 (1) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$

$=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x-1-2x}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{-x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{x-1}}$

(2) $\dfrac{x-6}{x^2-9}+\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

$=\dfrac{x-6}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x+3)(x-3)}+\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{(x-6)(x+1)+(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{2x^2-3x-9}{(x+1)(x+3)(x-3)}$

$=\dfrac{(x-3)(2x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{2x+3}{(x+1)(x+3)}}$

(3) $\dfrac{x^3+8x}{x^2-x-2}-\dfrac{8}{x-2}$

$=\dfrac{x^3+8x}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{8}{x-2}$

$=\dfrac{x^3+8x}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{8(x+1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x^3+8x-8(x+1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{x^3-8}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x^2+2x+4}{x+1}}$

問20 (1) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{3-\dfrac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\div\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\dfrac{x+2}{x}\div\dfrac{3x-1}{x}$

$=\dfrac{x+2}{x}\times\dfrac{x}{3x-1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{3x-1}}$

〔別解〕 $\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\times x}{\left(3-\dfrac{1}{x}\right)\times x}=\dfrac{x+2}{3x-1}$

(2) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$=\dfrac{x^2-1}{x}\div\dfrac{x+1}{x}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}\times\dfrac{x}{x+1}$

$= \boldsymbol{x-1}$

〔別解〕 $\dfrac{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\times x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times x} = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$= \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$

Training トレーニング

教科書 P.21

1 (1) $(2x+3y)^3$

$= (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x\cdot(3y)^2 + (3y)^3$

$= \boldsymbol{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}$

(2) $(4a-b)^3$

$= (4a)^3 - 3\cdot(4a)^2\cdot b + 3\cdot 4a\cdot b^2 - b^3$

$= \boldsymbol{64a^3-48a^2b+12ab^2-b^3}$

(3) $(5x+2)(25x^2-10x+4)$

$= (5x+2)\{(5x)^2 - 5x\cdot 2 + 2^2\}$

$= (5x)^3 + 2^3 = \boldsymbol{125x^3+8}$

(4) $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

$= (3a-4b)\{(3a)^2 + 3a\cdot 4b + (4b)^2\}$

$= (3a)^3 - (4b)^3 = \boldsymbol{27a^3-64b^3}$

2 (1) $27x^3+8y^3$

$= (3x)^3 + (2y)^3$

$= (3x+2y)\{(3x)^2 - 3x\cdot 2y + (2y)^2\}$

$= \boldsymbol{(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)}$

(2) a^3-64b^3

$= a^3 - (4b)^3$

$= (a-4b)\{a^2 + a\cdot 4b + (4b)^2\}$

$= \boldsymbol{(a-4b)(a^2+4ab+16b^2)}$

(3) $ax^3+125ay^3$

$= a(x^3+125y^3)$

$= a\{x^3 + (5y)^3\}$

$= a(x+5y)\{x^2 - x\cdot 5y + (5y)^2\}$

$= \boldsymbol{a(x+5y)(x^2-5xy+25y^2)}$

(4) $8a^3b-27bc^3$

$= b(8a^3-27c^3)$

$= b\{(2a)^3 - (3c)^3\}$

$= b(2a-3c)\{(2a)^2 + 2a\cdot 3c + (3c)^2\}$

$= \boldsymbol{b(2a-3c)(4a^2+6ac+9c^2)}$

3 (1) $a+b=A$ とおくと

$(a+b)^3+1 = A^3+1$

$= (A+1)(A^2-A+1)$

$= (a+b+1)\{(a+b)^2-(a+b)+1\}$

$= \boldsymbol{(a+b+1)(a^2+2ab+b^2-a-b+1)}$

(2) $2x+y=A$，$2x-y=B$ とおくと

$(2x+y)^3-(2x-y)^3$

$= A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

$= \{(2x+y)-(2x-y)\}\times\{(2x+y)^2$

$+(2x+y)(2x-y)+(2x-y)^2\}$

$= 2y\times\{(4x^2+4xy+y^2)+(4x^2-y^2)$

$+(4x^2-4xy+y^2)\}$

$= \boldsymbol{2y(12x^2+y^2)}$

(3) $x^3=A$ とおくと

x^6+16x^3+64

$= A^2+16A+64$

$= (A+8)^2 = (x^3+8)^2 = (x^3+2^3)^2$

$= \{(x+2)(x^2-2x+4)\}^2$

$= \boldsymbol{(x+2)^2(x^2-2x+4)^2}$

(4) $a^3=A$，$b^3=B$ とおくと

$a^6-7a^3b^3-8b^6$

$= A^2-7AB-8B^2$

$= (A+B)(A-8B)$

$= (a^3+b^3)(a^3-8b^3)$

$= (a^3+b^3)\{a^3-(2b)^3\}$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\times(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

$= \boldsymbol{(a+b)(a-2b)}$

$\boldsymbol{(a^2-ab+b^2)(a^2+2ab+4b^2)}$

4 (1) $(x-3y)^7$ の展開式の一般項は

${}_7\mathrm{C}_r x^{7-r}(-3y)^r \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

と表される。x^5y^2 の項は $r=2$ の場合であるから　${}_7\mathrm{C}_2 x^5(-3y)^2 = 21\cdot 9x^5y^2$

$= 189x^5y^2$

よって，x^5y^2 の係数は　**189**

(2) $(3x^2+2)^6$ の展開式の一般項は

${}_6\mathrm{C}_r(3x^2)^{6-r}\cdot 2^r \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

と表される。x^2 の項は $r=5$ の場合であるから　${}_6\mathrm{C}_5(3x^2)\cdot 2^5 = 6\cdot 3\cdot 32x^2$

$= 576x^2$

よって，x^2 の係数は　**576**

5 $(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$

に $x=-1$ を代入すると

$0^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1(-1) + {}_n\mathrm{C}_2\cdot 1$

$+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$

$$= {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}_n\mathrm{C}_n$$

よって

$${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = 0$$

が成り立つ。

6 (1)

$$
\begin{array}{r}
3x^2 + 5x - 2 \\
2x-1 \,\big)\, \overline{6x^3 + 7x^2 - 9x + 2} \\
\underline{6x^3 - 3x^2 } \\
10x^2 - 9x \\
\underline{10x^2 - 5x } \\
-4x + 2 \\
\underline{-4x + 2} \\
0
\end{array}
$$

商 $3x^2+5x-2$，余り 0

(2)

$$
\begin{array}{r}
x + 2 \\
x^2 + 4 \,\big)\, \overline{x^3 + 2x^2 + 3} \\
\underline{x^3 + 4x } \\
2x^2 - 4x + 3 \\
\underline{2x^2 + 8} \\
-4x - 5
\end{array}
$$

商 $x+2$，余り $-4x-5$

7 $2x^3 - 8x + 7 = B(x-2) + (3x+1)$

が成り立つから

$$B(x-2) = (2x^3 - 8x + 7) - (3x+1)$$
$$= 2x^3 - 11x + 6$$

$2x^3 - 11x + 6$ を $x-2$ で割って

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 4x - 3 \\
x-2 \,\big)\, \overline{2x^3 - 11x + 6} \\
\underline{2x^3 - 4x^2 } \\
4x^2 - 11x \\
\underline{4x^2 - 8x } \\
-3x + 6 \\
\underline{-3x + 6} \\
0
\end{array}
$$

よって　**$B = 2x^2 + 4x - 3$**

8 (1) $\dfrac{6x+6}{x^2-4} \times \dfrac{x^3-8}{2x^2+2x}$

$$= \frac{6(x+1)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2x(x+1)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3(x^2+2x+4)}{x(x+2)}}$$

(2) $\dfrac{x^2-x}{x^2-2x-3} \div \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-8x+15} \times \dfrac{x^2-1}{x}$

$$= \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-3)} \times \frac{(x-3)(x-5)}{(x-1)^2} \times \frac{(x+1)(x-1)}{x}$$

$$= \boldsymbol{x-5}$$

9 (1) $\dfrac{2x-1}{x^2-3x} - \dfrac{2x+1}{x^2+3x}$

$$= \frac{2x-1}{x(x-3)} - \frac{2x+1}{x(x+3)}$$

$$= \frac{(2x-1)(x+3)-(2x+1)(x-3)}{x(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{(2x^2+5x-3)-(2x^2-5x-3)}{x(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{10x}{x(x+3)(x-3)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{10}{(x+3)(x-3)}}$$

(2) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2x+1}{x^3-1}$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)-(x+1)(x^2+x+1)+(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{(x^3-1)-(x^3+2x^2+2x+1)+(2x^2+3x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}}$$

10 (1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \left(1+\dfrac{1}{x}\right) \div \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$= \frac{x+1}{x} \times \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{x}{x-1}}$$

〔別解〕 $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \times x^2}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) \times x^2} = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

$$= \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

(2) $\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}} = (a+2) \div \left(a - \dfrac{2}{a+1}\right)$

$$= (a+2) \div \frac{a(a+1)-2}{a+1}$$

$$= (a+2) \times \frac{a+1}{a^2+a-2}$$

$$= (a+2) \times \frac{a+1}{(a+2)(a-1)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{a+1}{a-1}}$$

〔別解〕 $\dfrac{(a+2) \times (a+1)}{\left(a-\dfrac{2}{a+1}\right) \times (a+1)}$

$$= \frac{(a+2)(a+1)}{a(a+1)-2} = \frac{(a+2)(a+1)}{a^2+a-2}$$

$$= \frac{(a+2)(a+1)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$$

2節　2次方程式

❶ 複素数とその演算

教科書 P.23

問1 (1)　実部　-1,　虚部　$\sqrt{3}$

(2)　実部　2,　虚部　1

(3)　実部　0,　虚部　$\sqrt{7}$

(4)　実部　-5,　虚部　0

問2 (1)　$-x+4y$，$2x+3y$ は実数であるから

$$\begin{cases} -x+4y=6 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=-2,\ y=1}$

(2)　$x+5$，$y-3$ は実数であるから

$$\begin{cases} x+5=0 \\ y-3=0 \end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=-5,\ y=3}$

教科書 P.24

問3 (1)　$(4+5i)+(3-2i)=(4+3)+(5i-2i)$

$$= \boldsymbol{7+3i}$$

(2)　$(2-4i)-(1-i)=(2-1)+(-4i+i)$

$$= \boldsymbol{1-3i}$$

(3)　$(5+3i)(2-7i)$

$= 10-35i+6i-21i^2$

$= 10-35i+6i+21 = \boldsymbol{31-29i}$

(4)　$(3+4i)(3-4i)$

$= 9-16i^2 = 9+16 = \boldsymbol{25}$

(5)　$(-\sqrt{2}\,i)^4 = (-\sqrt{2})^4 i^4 = 4(i^2)^2$

$= 4\cdot(-1)^2 = \boldsymbol{4}$

問4 (1)　$\boldsymbol{3-2i}$　　(2)　$\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}\,i}$

(3)　$\boldsymbol{-3i}$　　(4)　$\boldsymbol{-4}$

教科書 P.25

問5 (1)　$\dfrac{1}{3-i} = \dfrac{3+i}{(3-i)(3+i)} = \dfrac{3+i}{9-i^2}$

$$= \frac{3+i}{9+1} = \boldsymbol{\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i}$$

(2)　$\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$$= \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = \boldsymbol{-i}$$

(3)　$\dfrac{2-i}{1-2i} = \dfrac{(2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$$= \frac{2+4i-i-2i^2}{1-4i^2}$$

$$= \frac{2+3i+2}{1+4} = \boldsymbol{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i}$$

(4)　$\dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = \boldsymbol{-i}$

教科書 P.26

問6 (1)　$\boldsymbol{2\sqrt{2}\,i}$　　(2)　$\boldsymbol{-5\sqrt{2}\,i}$

(3)　$\sqrt{-\dfrac{7}{16}} = \sqrt{\dfrac{7}{16}}\,i = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{4}i}$

問7　$\sqrt{-18} = \sqrt{18}\,i = 3\sqrt{2}\,i$

$-\sqrt{-18} = -\sqrt{18}\,i = -3\sqrt{2}\,i$

より，-18 の平方根は

$\boldsymbol{3\sqrt{2}\,i,\ -3\sqrt{2}\,i}$

問8 (1)　$\sqrt{-28}\times\sqrt{-35} = \sqrt{28}\,i\times\sqrt{35}\,i$

$$= 14\sqrt{5}\,i^2 = \boldsymbol{-14\sqrt{5}}$$

(2)　$\dfrac{6}{\sqrt{-4}} = \dfrac{6}{\sqrt{4}\,i} = \dfrac{6}{2i} = \dfrac{3}{i} = \dfrac{3i}{i^2}$

$$= \frac{3i}{-1} = \boldsymbol{-3i}$$

❷ 解の公式

教科書 P.28

問9 (1)　$x = \dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$$= \boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}}$$

(2)　$x = \dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}$

$$= \frac{4\pm0}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3)　$x = \dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5}$

$$= \frac{6\pm\sqrt{-44}}{10} = \frac{6\pm2\sqrt{11}\,i}{10}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{11}\,i}{5}}$$

(4)　$x = \dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot4\cdot13}}{2\cdot4}$

$$= \frac{-12\pm\sqrt{-64}}{8}$$

$$= \frac{-12\pm8i}{8} = \boldsymbol{\frac{-3\pm2i}{2}}$$

問10　$ax^2+2b'x+c=0$ より

$$x = \frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a}$$
$$= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$
$$= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

よって，$ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

である。

問11 (1) $\boldsymbol{x} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1\cdot(-4)} = \boldsymbol{-1 \pm \sqrt{5}}$

(2) $\boldsymbol{x} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3\cdot 2}}{3}$

$$= \boldsymbol{\frac{2 \pm \sqrt{2}\,i}{3}}$$

教科書 P.30

問12 判別式を D とおく。

(1) $D = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = -15 < 0$

であるから，**異なる 2 つの虚数解** をもつ。

(2) $\dfrac{D}{4} = (-6)^2 - 4\cdot 9 = 0$

であるから，**重解** をもつ。

(3) $\dfrac{D}{4} = (-3)^2 - 1\cdot(-3) = 12 > 0$

であるから，**異なる 2 つの実数解** をもつ。

(4) $D = 0^2 - 4\cdot 3\cdot 1 = -12 < 0$

であるから，**異なる 2 つの虚数解** をもつ。

問13 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2k = 9 - 8k$$

虚数解をもつのは，$D < 0$ のときであるから

$$9 - 8k < 0$$

すなわち　$\boldsymbol{k > \dfrac{9}{8}}$

問14 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 2\cdot(k^2 - 8)$$
$$= -k^2 + 16 = -(k+4)(k-4)$$

2 つの実数解をもつのは，$\dfrac{D}{4} > 0$ のときであるから　$(k+4)(k-4) < 0$

すなわち　$\boldsymbol{-4 < k < 4}$

3 解と係数の関係

教科書 P.31

問15 (1) 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2},\ \alpha\beta = \frac{-4}{2} = -2$$

よって，**和 $-\dfrac{3}{2}$，積 -2**

(2) 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{-1}{1} = 1,\ \alpha\beta = \frac{-2}{1} = -2$$

よって，**和 1，積 -2**

教科書 P.32

問16 解と係数の関係より　$\alpha + \beta = 4$，$\alpha\beta = 5$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2\cdot 5$
$= \boldsymbol{6}$

(2) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 4^2 - 4\cdot 5$
$= \boldsymbol{-4}$

(3) $\alpha^3 + \beta^3$
$= (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) - 3(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)$
$= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$= 4^3 - 3\cdot 5\cdot 4 = \boldsymbol{4}$

問17 2 つの解を α，$\alpha + 1$ とおくと，解と係数の関係より

$\alpha + (\alpha + 1) = -m$　…… ①
$\alpha(\alpha + 1) = 2$　…… ②

② より　$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$
$(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$
$\alpha = -2,\ 1$

① より，$m = -2\alpha - 1$ であるから

$\alpha = -2$ のとき　$m = 3$
$\alpha = 1$ のとき　$m = -3$

よって　$\boldsymbol{m = \pm 3}$

教科書 P.33

問18 (1) $x^2 - 2x - 2 = 0$ を解くと

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

したがって

$x^2 - 2x - 2$
$= \{x - (1 + \sqrt{3})\}\{x - (1 - \sqrt{3})\}$
$= \boldsymbol{(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})}$

(2) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解くと

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}\,i}{3}$$

したがって

$3x^2 - 2x + 1$
$$= \boldsymbol{3\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}\,i}{3}\right)}$$

(3)　$x^2+1=0$ を解くと

$$x=\pm i$$

したがって

$$x^2+1=\boldsymbol{(x-i)(x+i)}$$

教科書 P.34

問19　$x^2=A$ とおくと

$$x^4-x^2-6=A^2-A-6$$
$$=(A+2)(A-3)$$

(1)　$x^4-x^2-6=\boldsymbol{(x^2+2)(x^2-3)}$

(2)　$x^4-x^2-6=(x^2+2)(x^2-3)$

$$=\boldsymbol{(x^2+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$$

(3)　x^4-x^2-6

$$=(x^2+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$
$$=\boldsymbol{(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$$

問20　(1)　$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$

よって　　$\boldsymbol{x^2-4x-1=0}$

(2)　$(-5+i)+(-5-i)=-10$

$(-5+i)(-5-i)=26$

よって　　$\boldsymbol{x^2+10x+26=0}$

教科書 P.35

問21　2 数を α，β とおく。

(1)　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=-1$ より，

2 数は 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$

の 2 つの解であるから，これを解くと

$$\boldsymbol{1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}}$$

(2)　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$ より，

2 数は 2 次方程式 $x^2-x+1=0$

の 2 つの解であるから，これを解くと

$$\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2}}$$

問22　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{5}{2}$$

(1)　$(2\alpha+1)+(2\beta+1)=2(\alpha+\beta)+2$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+2$$
$$=3$$

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$$
$$=4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{2}+1$$
$$=-8$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2-3x-8=0}$$

(2)　$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2$

$$=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$
$$=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+1=-2$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+\frac{3}{2}x-2=0$$

すなわち　　$\boldsymbol{2x^2+3x-4=0}$

Training トレーニング

教科書 P.36

11　(1)　$(2-i)x+(3-2i)y$

$$=(2x+3y)+(-x-2y)i$$

$2x+3y$，$-x-2y$ は実数であるから

$$\begin{cases}2x+3y=-1\\-x-2y=2\end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=4,\ y=-3}$

(2)　$(3+2i)x+(3i-2)y$

$$=(3x-2y)+(2x+3y)i$$

$3x-2y$，$2x+3y$ は実数であるから

$$\begin{cases}3x-2y=16\\2x+3y=-11\end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=2,\ y=-5}$

12　(1)　$-5i\cdot(-4i)=20i^2=\boldsymbol{-20}$

(2)　$(5-\sqrt{3}i)^2=25-10\sqrt{3}i+3i^2$

$$=25-10\sqrt{3}i-3$$
$$=\boldsymbol{22-10\sqrt{3}i}$$

(3)　$\dfrac{4+i}{4-i}=\dfrac{(4+i)^2}{(4-i)(4+i)}=\dfrac{16+8i+i^2}{16-i^2}$

$$=\frac{16+8i-1}{16+1}=\boldsymbol{\frac{15}{17}+\frac{8}{17}i}$$

(4)　$\dfrac{1+3i}{3-i}-\dfrac{3-i}{1+3i}$

$$=\frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}-\frac{(3-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$
$$=\frac{3+i+9i+3i^2}{9-i^2}-\frac{3-9i-i+3i^2}{1-9i^2}$$
$$=\frac{3+i+9i-3}{9+1}-\frac{3-9i-i-3}{1+9}$$
$$=\frac{10i-(-10i)}{10}=\boldsymbol{2i}$$

13　(1)　$\sqrt{-2}-\sqrt{-18}+\sqrt{8}$

$= \sqrt{2}\,i - \sqrt{18}\,i + \sqrt{8}$

$= \sqrt{2}\,i - 3\sqrt{2}\,i + 2\sqrt{2} = \mathbf{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i}$

(2) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-27}} + \dfrac{\sqrt{-50}}{\sqrt{18}}$

$= \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}\,i} + \dfrac{\sqrt{50}\,i}{\sqrt{18}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\,i} + \dfrac{5\sqrt{2}\,i}{3\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2i}{3i^2} + \dfrac{5i}{3} = \dfrac{2i}{-3} + \dfrac{5i}{3} = \dfrac{-2+5}{3}i = \boldsymbol{i}$

14 (1) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\,i = \mathbf{6}\boldsymbol{i}$

$\sqrt{ab} = \sqrt{-36} = \mathbf{6}\boldsymbol{i}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,i} = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{i}{2i^2} = -\dfrac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \sqrt{-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}$

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{5}\,i = \sqrt{10}\,i^2 = \mathbf{-\sqrt{10}}$

$\sqrt{ab} = \mathbf{\sqrt{10}}$

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{5}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$

15 (1) 解の公式を用いて

$x = \dfrac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{50-52}}{2} = \mathbf{\dfrac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,\boldsymbol{i}}{2}}$

(2) $20x^2 + 12x + 5 = 0$

解の公式を用いて

$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-100}}{20}$

$= \dfrac{-6 \pm 8i}{20} = \mathbf{\dfrac{-3 \pm 4\boldsymbol{i}}{10}}$

16 判別式を D とすると

$D = (a-3)^2 - 4(-a^2+2)$

$= 5a^2 - 6a + 1$

$= (5a-1)(a-1)$

虚数解をもつのは，$D<0$ のときであるから

$(5a-1)(a-1) < 0$

よって　$\mathbf{\dfrac{1}{5} < \boldsymbol{a} < 1}$

17 解と係数の関係より　$\alpha+\beta = 2,\ \alpha\beta = \dfrac{1}{2}$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = \mathbf{1}$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

$= (\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3) - 3(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)$

$= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= 2^3 - 3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2 = \mathbf{5}$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$= \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$= \left(2^2 - 2\cdot\dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{1}{2} = \mathbf{6}$

18 (1) $x^2 + x + 1 = 0$ を解くと

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

したがって

$x^2 + x + 1$

$= \mathbf{\left(\boldsymbol{x} - \dfrac{-1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}\right)\left(\boldsymbol{x} - \dfrac{-1-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}\right)}$

(2) $4x^2 + 9 = 0$ を解くと

$x = \pm\dfrac{3}{2}i$

したがって

$4x^2 + 9 = 4\left(x - \dfrac{3}{2}i\right)\left(x + \dfrac{3}{2}i\right)$

$= \mathbf{(2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{i})(2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{i})}$

19 $x^2 = A$ とおくと

$x^4 - 4x^2 - 5 = A^2 - 4A - 5$

$= (A-5)(A+1)$

(1) $x^4 - 4x^2 - 5 = \mathbf{(\boldsymbol{x}^2 - 5)(\boldsymbol{x}^2 + 1)}$

(2) $x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2-5)(x^2+1)$

$= \mathbf{(\boldsymbol{x} + \sqrt{5})(\boldsymbol{x} - \sqrt{5})(\boldsymbol{x}^2 + 1)}$

(3) $x^4 - 4x^2 - 5$

$= (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+1)$

$= \mathbf{(\boldsymbol{x} + \sqrt{5})(\boldsymbol{x} - \sqrt{5})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{i})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i})}$

20 解と係数の関係より

$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = 1$

(1) $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha+\beta) = 2\cdot 1 = 2$

$2\alpha\cdot 2\beta = 4\alpha\beta = 4\cdot 1 = 4$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$\mathbf{\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x} + 4 = 0}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= 1^2 - 2\cdot 1 = -1$

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1^2 = 1$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$\mathbf{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + 1 = 0}$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$= 1^3 - 3\cdot 1\cdot 1 = -2$

$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=1^3=1$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$\boldsymbol{x^2+2x+1=0}$

3 節　高次方程式

❶ 因数定理

教科書 P.37

問 1　(1)　$P(2)=2^3-3\cdot2+5=\mathbf{7}$

(2)　$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+5=\mathbf{7}$

(3)　$P(0)=0^3-3\cdot0+5=\mathbf{5}$

問 2　第 1 式を $P(x)$ とおく。

(1)　$x+1$ で割ったときの余りは

$P(-1)$

$=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+1$

$=\mathbf{-10}$

(2)　$x-3$ で割ったときの余りは

$P(3)=2\cdot3^3-6\cdot3^2+5\cdot3-15=\mathbf{0}$

教科書 P.38

問 3　$P(x)=3x^3+4x^2-ax-1$ とおけば，$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りが -5 となるのは，$P(-2)=-5$ のときである。

$P(-2)=3\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)-1$

$=-9+2a$

であるから　　$-9+2a=-5$

すなわち　　$\boldsymbol{a=2}$

問 4　$P(x)$ を x^2-2x-8 で割ったときの商を $Q(x)$ とする。余りは 1 次以下の整式であるから，それを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x^2-2x-8)Q(x)+ax+b$

$=(x-4)(x+2)Q(x)+ax+b$

ここで　　$P(4)=4a+b$

$P(-2)=-2a+b$

一方，剰余の定理により

$P(4)=2,\ P(-2)=14$

よって　$\begin{cases}4a+b=2\\-2a+b=14\end{cases}$

これを解くと　　$a=-2,\ b=10$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{-2x+10}$

教科書 P.39

問 5　$P(x)=2x^3-5x^2-6x+9$ とおく。

(1)　$P(1)=2\cdot1^3-5\cdot1^2-6\cdot1+9=0$

よって，$x-1$ を **因数にもつ。**

(2)　$P(-1)$

$=2\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)+9$

$=8\neq0$

よって，$x+1$ を **因数にもたない。**

(3)　$P(-2)$

$=2\cdot(-2)^3-5\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)+9$

$=-15\neq0$

よって，$x+2$ を **因数にもたない。**

(4)　$P(3)=2\cdot3^3-5\cdot3^2-6\cdot3+9=0$

よって，$x-3$ を **因数にもつ。**

問 6　(1)　$P(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと

$P(1)=1^3+3\cdot1^2-4=0$

よって

$P(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2}$

(2)　$P(x)=2x^3+5x^2+x-2$ とおくと

$P(-1)$

$=2\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2+(-1)-2=0$

よって

$P(x)=(x+1)(2x^2+3x-2)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x+2)(2x-1)}$

(3)　$P(x)=x^3-3x^2-4x+12$ とおくと

$P(2)=2^3-3\cdot2^2-4\cdot2+12=0$

よって

$P(x)=(x-2)(x^2-x-6)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(x-3)}$

(4)　$P(x)=3x^3+4x^2-17x-6$ とおくと

$P(2)=3\cdot2^3+4\cdot2^2-17\cdot2-6=0$

よって

$P(x)=(x-2)(3x^2+10x+3)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(3x+1)}$

❷ 簡単な高次方程式

教科書 P.40

問 7　(1)　$x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

よって

$x-2=0$　または　$x^2+2x+4=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i}$

(2)　$x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

よって

$x+1=0$　または　$x^2-x+1=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

問8　(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

いずれにしても，例題 4（教科書 p.40）より 1 の 3 乗根は 1，ω，ω^2 の 3 つである。

〔別解〕1，ω は 1 の 3 乗根であり

$$(\omega^2)^3=\omega^6=(\omega^3)^2=1^2=1$$

であるから ω^2 も 1 の 3 乗根である。

$$\omega^2-1=(\omega-1)(\omega+1)\neq 0$$

$$\omega^2-\omega=\omega(\omega-1)\neq 0$$

より，ω^2 は 1 と ω 以外の 1 の 3 乗根である。

(2)　(1) より

$$\omega^2+\omega+1$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}+1=0$$

（複号同順）

〔別解〕ω は $x^2+x+1=0$ の解であるから

$$\omega^2+\omega+1=0$$

教科書 P.41

問9　(1)　$x^2=A$ とおくと　$A^2-13A+36=0$

左辺を因数分解して

$(A-4)(A-9)=0$

よって　$A-4=0$　または　$A-9=0$

すなわち　$x^2-4=0$　または　$x^2-9=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \pm 3}$

(2)　$x^2=A$ とおくと　$A^2-2A-15=0$

$(A+3)(A-5)=0$

よって　$A+3=0$　または　$A-5=0$

すなわち　$x^2+3=0$　または　$x^2-5=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{3}i,\ \pm\sqrt{5}}$

(3)　$x^2=A$ とおくと　$A^2=1$

よって　$A=\pm 1$

すなわち　$x^2=1$　または　$x^2=-1$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm 1,\ \pm i}$

問10　(1)　$P(x)=x^3-4x^2-7x+10$ とおくと

$P(1)=1^3-4\cdot1^2-7\cdot1+10=0$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x-10)$$
$$=(x-1)(x-5)(x+2)$$

より，$P(x)=0$ の解は

$\boldsymbol{x=1,\ 5,\ -2}$

(2)　$P(x)=2x^3-5x-6$ とおくと

$P(2)=2\cdot2^3-5\cdot2-6=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(2x^2+4x+3)$

より，$P(x)=0$ の解は

$\boldsymbol{x=2,\ \dfrac{-2\pm\sqrt{2}i}{2}}$

教科書 P.42

問11　(1)　$P(x)=x^3-x^2-8x+12$ とおくと

$P(2)=2^3-2^2-8\cdot2+12=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x-2)(x^2+x-6)$$
$$=(x-2)^2(x+3)$$

より，$P(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=2,\ -3}$

(2)　$P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ とおくと

$P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1=0$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x+1)(x^2+2x+1)$$
$$=(x+1)^3$$

より，$P(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-1}$

教科書 P.43

問12　$x=1-i$ が方程式 $x^3+ax^2+bx-2=0$ の解であるから

$$(1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)-2=0$$
$$(-2-2i)+a(-2i)+b(1-i)-2=0$$
$$(b-4)+(-2a-b-2)i=0$$

$b-4$，$-2a-b-2$ は実数であるから

$$\begin{cases}b-4=0\\-2a-b-2=0\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-3,\ b=4}$

このとき，方程式は $x^3-3x^2+4x-2=0$ となる。

左辺を因数分解すると

$(x-1)(x^2-2x+2)=0$

$x=1,\ 1\pm i$

よって，他の解は　　$\boldsymbol{x=1,\ 1+i}$

Training トレーニング

21 (1)　$P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とおくと

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$x=-\dfrac{b}{a}$ のとき，$ax+b=0$ であるから

$R=P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ が成り立つ。

(2)　$P(x)=4x^3-2x^2-7$ とおくと，(1) の結果から，$P(x)$ を $2x-3$ で割ったときの余りは

$P\left(\dfrac{3}{2}\right)=4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^3-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-7=\boldsymbol{2}$

22 (1)　$P(x)=x^3-ax^2-5x-4$ とおけば，$P(x)$ を $x+2$ で割ったときの余りが 2 となるのは，$P(-2)=2$ のときである。

$P(-2)$

$=(-2)^3-a\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-4$

$=-4a-2$

であるから　　$-4a-2=2$

よって　　$\boldsymbol{a=-1}$

(2)　$P(x)=ax^3-2x^2-12x+10$ とおけば，$P(x)$ を $3x-2$ で割ったときの余りが 2 となるのは，$P\left(\dfrac{2}{3}\right)=2$ のときである。

$P\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$=a\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-12\cdot\dfrac{2}{3}+10$

$=\dfrac{8}{27}a+\dfrac{10}{9}$

であるから　　$\dfrac{8}{27}a+\dfrac{10}{9}=2$

よって　　$\boldsymbol{a=3}$

23　$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。余りは 1 次以下の整式であるから，それを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

ここで　　$P(-1)=-a+b$

$P(2)=2a+b$

一方，因数定理と剰余の定理により

$P(-1)=0,\ P(2)=6$

よって　$\begin{cases}-a+b=0\\2a+b=6\end{cases}$

これを解くと　　$a=2,\ b=2$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{2x+2}$

24 (1)　$P(x)=4x^3+7x^2-5x-6$ とおくと

$P(1)=4\cdot1^3+7\cdot1^2-5\cdot1-6=0$

よって

$P(x)=(x-1)(4x^2+11x+6)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)(4x+3)}$

(2)　$P(x)=9x^3-30x^2+7x+6$ とおくと

$P(3)=9\cdot3^3-30\cdot3^2+7\cdot3+6=0$

よって

$P(x)=(x-3)(9x^2-3x-2)$

$=\boldsymbol{(x-3)(3x+1)(3x-2)}$

25　1 の 3 乗根の性質（教科書 p.40 問 8）より

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

(1)　$\omega+\dfrac{1}{\omega}=\omega+\dfrac{\omega^3}{\omega}$

$=\omega+\omega^2=(\omega^2+\omega+1)-1=\boldsymbol{-1}$

(2)　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\dfrac{\omega^3}{\omega^2}$

$=\omega^2+\omega=(\omega^2+\omega+1)-1=\boldsymbol{-1}$

(3)　$\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=1+\dfrac{1}{1}=\boldsymbol{2}$

26 (1)　$x^2=A$ とおくと　　$2A^2-5A-3=0$

左辺を因数分解して

$(A-3)(2A+1)=0$

よって　　$A-3=0$　または　$2A+1=0$

すなわち

$x^2-3=0$　または　$2x^2+1=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{3},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$

(2)　$x^2=A$ とおくと　　$3A^2+10A+8=0$

左辺を因数分解して

$(A+2)(3A+4)=0$

よって　　$A+2=0$　または　$3A+4=0$

すなわち

$x^2+2=0$　または　$3x^2+4=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}i,\ \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i}$

27 (1)　$P(x)=2x^3+7x^2-20x-25$ とおくと

$P(-1)=2\cdot(-1)^3+7\cdot(-1)^2$

$$-20\cdot(-1)-25=0$$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x+1)(2x^2+5x-25)$$
$$=(x+1)(x+5)(2x-5)$$

より，$P(x)=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=-1,\ -5,\ \frac{5}{2}}$$

(2) $P(x)=3x^3-8x+8$ とおくと

$$P(-2)=3\cdot(-2)^3-8\cdot(-2)+8=0$$

であるから，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x+2)(3x^2-6x+4)$$

より，$P(x)=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=-2,\ \frac{3\pm\sqrt{3}i}{3}}$$

28 $x=1+2i$ が方程式 $x^3+ax+b=0$ の解であるから

$$(1+2i)^3+a(1+2i)+b=0$$
$$(-11-2i)+a(1+2i)+b=0$$
$$(a+b-11)+(2a-2)i=0$$

$a+b-11$，$2a-2$ は実数であるから

$$\begin{cases}a+b-11=0\\2a-2=0\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=10}$

このとき，方程式は $x^3+x+10=0$ となる。

左辺を因数分解すると

$$(x+2)(x^2-2x+5)=0$$
$$x=-2,\ 1\pm2i$$

したがって，他の解は　$\boldsymbol{x=-2,\ 1-2i}$

4節 式と証明

❶ 恒等式

教科書 P.45

問1 (1) 両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\boldsymbol{a=1,\ b=0,\ c=1}$$

(2) $a-1=0,\ 2b=0,\ c+3=0$

であるから

$$\boldsymbol{a=1,\ b=0,\ c=-3}$$

問2 (1) 左辺を展開して整理すると

$$ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)$$
$$=2x^2+3x+4$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases}a=2\\2a+b=3\\a+b+c=4\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-1,\ c=3}$

(2) 左辺を展開して整理すると

$$(a+b+c)x^2+(-3a-5b-4c)x$$
$$+(2a+6b+3c)=3x+5$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases}a+b+c=0\\-3a-5b-4c=3\\2a+6b+3c=5\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=7,\ b=4,\ c=-11}$

教科書 P.46

問3 両辺に $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ を掛けると　$4x-13=a(x-2)+b(x+3)$

この式が恒等式となればよい。

右辺を整理すると，この等式は

$$4x-13=(a+b)x+(-2a+3b)$$

よって　$a+b=4,\ -2a+3b=-13$

これを解いて　$\boldsymbol{a=5,\ b=-1}$

教科書 P.47

問4 (1) $(\text{左辺})=(2a+b)^2-(a+2b)^2$

$$=(4a^2+4ab+b^2)-(a^2+4ab+4b^2)$$
$$=3a^2-3b^2$$

$$(\text{右辺})=3(a^2-b^2)=3a^2-3b^2$$

ゆえに

$$(2a+b)^2-(a+2b)^2=3(a^2-b^2)$$

(2) $(\text{左辺})=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

$$(\text{右辺})=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)$$
$$+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)$$
$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

ゆえに

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

教科書 P.48

問5 (1) $x+y=1$ より　$x=1-y$

したがって

$$(\text{左辺})=(1-y)^2-(1-y)$$
$$=1-2y+y^2-1+y$$
$$=y^2-y=(\text{右辺})$$

ゆえに　$x^2-x=y^2-y$

(2) $a+b+c=0$ より　$c=-a-b$

したがって

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= a^2+b^2+(-a-b)^2\\ &= a^2+b^2+(a^2+2ab+b^2)\\ &= 2a^2+2ab+2b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= -2\{ab+b(-a-b)\\ &\qquad +(-a-b)a\}\\ &= -2(ab-ab-b^2-a^2-ab)\\ &= -2(-a^2-ab-b^2)\\ &= 2a^2+2ab+2b^2\end{aligned}$$

ゆえに

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$$

問 6　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$, $c=dk$

であるから

$$(\text{左辺})=\frac{2bk+3dk}{2b+3d}=\frac{k(2b+3d)}{2b+3d}=k$$

$$(\text{右辺})=\frac{2bk-3dk}{2b-3d}=\frac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$$

ゆえに　$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

2 不等式の証明

教科書 P.49

問 7　(1) $b>0$ であるから，不等式の性質 [3] を用いて

$a>0$ の両辺に b を掛けると

$ab>0$　が成り立つ。

(2) $b<0$ であるから，不等式の性質 [4] を用いて

$a<0$ の両辺に b を掛けると

$ab>0$　が成り立つ。

教科書 P.50

問 8　$(\text{左辺})-(\text{右辺})=(3a+b)-(a+3b)$

$=2a-2b=2(a-b)$

ここで，$a>b$ より $a-b>0$ であるから

$(\text{左辺})-(\text{右辺})=2(a-b)>0$

ゆえに　$3a+b>a+3b$

教科書 P.51

問 9　(1) $(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$=2(x^2+y^2)-(x-y)^2$

$=(2x^2+2y^2)-(x^2-2xy+y^2)$

$=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

$(x+y)^2\geqq 0$ であるから

$2(x^2+y^2)\geqq(x-y)^2$

等号が成り立つのは，$x+y=0$，すなわち **$x=-y$ のとき** である。

(2) $(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$=5(x^2+y^2)-(2x-y)^2$

$=(5x^2+5y^2)-(4x^2-4xy+y^2)$

$=x^2+4xy+4y^2$

$=(x+2y)^2$

$(x+2y)^2\geqq 0$ であるから

$5(x^2+y^2)\geqq(2x-y)^2$

等号が成り立つのは，$x+2y=0$，すなわち **$x=-2y$ のとき** である。

問10　(1) $(\text{左辺})-(\text{右辺})=x^2+y^2-xy$

$=\left(x^2-xy+\dfrac{y^2}{4}\right)+\dfrac{3}{4}y^2$

$=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2$

ここで，$\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2\geqq 0$, $\dfrac{3}{4}y^2\geqq 0$ であるから

$$\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geqq 0$$

よって　$x^2+y^2\geqq xy$

等号が成り立つのは，$x-\dfrac{y}{2}=0$ かつ $y=0$，すなわち **$x=y=0$ のとき** である。

(2) $x^2+y^2-4x-6y+13$

$=(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)$

$=(x-2)^2+(y-3)^2$

ここで，$(x-2)^2\geqq 0$，$(y-3)^2\geqq 0$ であるから

$$x^2+y^2-4x-6y+13\geqq 0$$

等号が成り立つのは，$x-2=0$ かつ $y-3=0$，すなわち **$x=2$, $y=3$ のとき** である。

教科書 P.52

問11　$(a+1)^2-\left(\sqrt{2a+1}\right)^2$

$=(a^2+2a+1)-(2a+1)$

$=a^2\geqq 0$

したがって　$(a+1)^2\geqq\left(\sqrt{2a+1}\right)^2$

$a+1\geqq 0$, $\sqrt{2a+1}\geqq 0$ であるから

$a+1 \geqq \sqrt{2a+1}$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a=0}$ **のとき** である。

教科書 P.53

問12 (1) **相加平均** $\dfrac{1+100}{2}=\mathbf{50.5}$

相乗平均 $\sqrt{1\cdot 100}=\mathbf{10}$

$\mathbf{50.5>10}$

(2) **相加平均** $\dfrac{40+40}{2}=\mathbf{40}$

相乗平均 $\sqrt{40\cdot 40}=\mathbf{40}$

$\mathbf{40=40}$

(3) **相加平均** $\dfrac{36+64}{2}=\mathbf{50}$

相乗平均 $\sqrt{36\cdot 64}=\mathbf{48}$

$\mathbf{50>48}$

教科書 P.54

問13 (1) $a>0$，$\dfrac{4}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$a+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{4}{a}$ のときである。

このとき　$a^2=4$

よって　$a=\pm 2$

$a>0$ であるから　$a=2$

したがって，等号が成り立つのは $\boldsymbol{a=2}$ **のとき** である。

(2) $\dfrac{b}{a}>0$，$\dfrac{a}{b}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

等号が成り立つのは，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$ のときである。

このとき　$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$

したがって，等号が成り立つのは $\boldsymbol{a=b}$ **のとき** である。

Challenge（チャレンジ） 例題 絶対値を含む不等式の証明

教科書 P.55

問1　$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(|ab|+ab)$

ここで，$|ab| \geqq -ab$ であるから

$2(|ab|+ab) \geqq 0$

したがって　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a-b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a-b| \geqq 0$ であるから

$|a|+|b| \geqq |a-b|$

等号が成り立つのは $|ab|=-ab$，すなわち $\boldsymbol{ab \leqq 0}$ **のとき** である。

Training トレーニング

教科書 P.56

29 (1) (左辺) $=x^2-3$

(右辺) $=a(x^2-1)+b(x-1)+c$

$=ax^2+bx+(-a-b+c)$

であるから，同じ次数の項の係数を比較すると

$a=1$，$b=0$，$-a-b+c=-3$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=0,\ c=-2}$

(2) (左辺) $=x^3-x^2-4x$

(右辺) $=(x^3-3x^2+3x-1)$
$\quad +a(x^2-2x+1)+b(x-1)+c$
$=x^3+(a-3)x^2+(-2a+b+3)x$
$\quad +(a-b+c-1)$

であるから，同じ次数の項の係数を比較すると

$$\begin{cases} a-3=-1 \\ -2a+b+3=-4 \\ a-b+c-1=0 \end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3,\ c=-4}$

(3) 両辺に $3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$ を掛けると

$3x+8=a(3x+1)+b(x-2)$

この式が恒等式となればよい。

右辺を整理するとこの等式は

$3x+8=(3a+b)x+(a-2b)$

よって　$3a+b=3$，$a-2b=8$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

30 (1) (左辺) $=(a^2x^2-2abxy+b^2y^2)$
$\quad -(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$
$=a^2x^2-b^2x^2-a^2y^2+b^2y^2$

$(\text{右辺}) = a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2$

ゆえに

$$(ax-by)^2-(ay-bx)^2 = (a^2-b^2)(x^2-y^2)$$

(2) $(\text{右辺}) = \dfrac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$= (\text{左辺})$

ゆえに

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

(3) $(\text{左辺}) = x^3+3x^2+3x+1-3x^2-1$

$= x^3+3x$

$(\text{右辺}) = x^3-3x^2+3x-1+3x^2+1$

$= x^3+3x$

ゆえに

$$(x+1)^3-(3x^2+1) = (x-1)^3+(3x^2+1)$$

31 $x-y=1$ より　$x=y+1$

(1) $(\text{左辺}) = (y+1)^2+y^2 = 2y^2+2y+1$

$(\text{右辺}) = 2(y+1)y+(y+1)-y$

$= 2y^2+2y+1$

ゆえに　$x^2+y^2 = 2xy+x-y$

(2) $(\text{右辺}) = (y+1)^3-3(y+1)y$

$= y^3+3y^2+3y+1-3y^2-3y$

$= y^3+1 = (\text{左辺})$

ゆえに　$y^3+1 = x^3-3xy$

32 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ とおくと　$a=bk$, $c=dk$

よって

$(\text{左辺}) = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{bk+dk}{b+d} = \dfrac{k(b+d)}{b+d}$

$= k$

$(\text{右辺}) = \dfrac{a^2d}{b^2c} = \dfrac{(bk)^2d}{b^2dk} = k$

ゆえに　$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a^2d}{b^2c}$

33 $(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$= (a^2+4)(x^2+1)-(ax+2)^2$

$= (a^2x^2+4x^2+a^2+4)-(a^2x^2+4ax+4)$

$= 4x^2-4ax+a^2$

$= (2x-a)^2 \geqq 0$

ゆえに　$(a^2+4)(x^2+1) \geqq (ax+2)^2$

等号が成り立つのは，$2x-a=0$，すなわち

$a=2x$ のとき である。

34 $(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$= (a^2+b^2)-2(a+b-1)$

$= (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$

$= (a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0$

ゆえに　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$a-1=b-1=0$，すなわち **$a=b=1$ のとき** である。

35 $\left(\sqrt{a-b}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$

$= (a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$= 2\sqrt{ab}-2b = 2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

$a \geqq b \geqq 0$ より $\sqrt{a} \geqq \sqrt{b} \geqq 0$ であるから

$2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \geqq 0$

したがって　$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \leqq \left(\sqrt{a-b}\right)^2$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} \geqq 0$, $\sqrt{a-b} \geqq 0$ であるから

$\sqrt{a}-\sqrt{b} \leqq \sqrt{a-b}$

等号が成り立つのは，**$b=0$ または**

$a=b$ のとき である。

36 $9a>0$, $\dfrac{4}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$9a+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{9a\cdot\frac{4}{a}} = 12$$

等号が成り立つのは，$9a=\dfrac{4}{a}$ のときである。

このとき　$a^2=\dfrac{4}{9}$

よって　$a=\pm\dfrac{2}{3}$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{2}{3}$

したがって，等号が成り立つのは，**$a=\dfrac{2}{3}$ のとき** である。

参考 組立除法

教科書 P.57

問1 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -5 & 8 & -3 \\ +) & & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{3} \end{array}$$

商 x^2-2x+2，余り 3

(2)
$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ +) & & -2 & 4 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

商 x^3-2x^2+3x-3，余り 0

[Level Up]
レベルアップ

教科書 P.58

1 (1) (右辺)

$=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$

$=a^3+b^3=$ (左辺)

ゆえに　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab\{(a+b)+c\}$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}$
$\qquad -3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)$
$\qquad -3ab\}$

$=\boldsymbol{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

2 $(ax+b)^{12}$ の展開式の一般項は

$\quad {}_{12}\mathrm{C}_r(ax)^{12-r}b^r \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$

と表される。x^2 の項は $r=10$ の場合であるから

$${}_{12}\mathrm{C}_{10}(ax)^2b^{10}=66\cdot a^2x^2\cdot b^{10}$$
$$=66a^2b^{10}x^2$$

よって，**x^2 の係数は　$66a^2b^{10}$**

x^{11} の項は $r=1$ の場合であるから

$${}_{12}\mathrm{C}_1(ax)^{11}b=12\cdot a^{11}x^{11}\cdot b$$
$$=12a^{11}bx^{11}$$

よって，**x^{11} の係数は　$12a^{11}b$**

3 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とおく。

$(a,\ b,\ c,\ d$ は実数$)$

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$

$=\overline{(a+c)+(b+d)i}$

$=(a+c)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)$

$=(a+c)-(b+d)i$

ゆえに　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{(a+bi)(c+di)}$

$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

ゆえに　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

4 (1) $x=1-\sqrt{3}\,i$ より　$x-1=-\sqrt{3}\,i$

両辺を 2 乗して

$x^2-2x+1=-3$

よって　$x^2-2x+4=0$

(2)
$$\begin{array}{r} x\ -2 \\ x^2-2x+4\,\overline{)\,x^3-4x^2+9x+\ 3} \\ \underline{x^3-2x^2+4x} \\ -2x^2+5x+\ 3 \\ \underline{-2x^2+4x-\ 8} \\ x+11 \end{array}$$

上の割り算により

x^3-4x^2+9x+3

$=(x^2-2x+4)(x-2)+(x+11)$

(1) の結果から，$x=1-\sqrt{3}\,i$ のとき，

$x^2-2x+4=0$ であるから

$x^3-4x^2+9x+3=0+1-\sqrt{3}\,i+11$

$=\boldsymbol{12-\sqrt{3}\,i}$

5 2 次方程式 $x^2-2x+a=0$ の判別式を D_1，2 次方程式 $x^2+4x-2a=0$ の判別式を D_2 とする。

$$\frac{D_1}{4}=1-a,\quad \frac{D_2}{4}=4+2a$$

一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつのは，D_1，D_2 のうち一方が正，他方が負，すなわち $D_1\cdot D_2<0$ のときであるから

$(1-a)(4+2a)<0$

$(a-1)(a+2)>0$

よって，求める a の値の範囲は

$\boldsymbol{a<-2,\ 1<a}$

6 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-k$，$\alpha\beta=-k-1$

よって

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-k)^2-2(-k-1)$

$=k^2+2k+2$

したがって　$k^2+2k+2=10$

$k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{k=-4,\ 2}$

7　$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+3x-5$$

$x=2$ を代入して　　$P(2)=1$　　……①

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_2(x)-5x+3$$

$x=-2$ を代入して

$P(-2)=13$　　……②

$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。余りは1次以下の整式であるから，それを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x-2)(x+2)Q(x)+ax+b$$

$x=2$，$x=-2$ をそれぞれ代入して

$P(2)=2a+b$，$P(-2)=-2a+b$　　……③

①，②，③ より

$$\begin{cases}2a+b=1\\-2a+b=13\end{cases}$$

これを解いて　　$a=-3$，$b=7$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{-3x+7}$

教科書 P.59

8　$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ で割り切れるから，$x+2$，$x-1$ の両方を因数にもつ。

よって，$P(x)=3x^3+ax^2+bx-6$ とおくと

$P(-2)=0$，$P(1)=0$

よって　　$\begin{cases}4a-2b-30=0\\a+b-3=0\end{cases}$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=6,\ b=-3}$

9　1の3乗根の性質より

$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

が成り立つ。

(1)　$\omega^6+\omega^3+1=(\omega^3)^2+\omega^3+1$
$=1^2+1+1=\boldsymbol{3}$

(2)　$\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1$
$=1\cdot\omega+\omega^2+1$
$=\omega^2+\omega+1=\boldsymbol{0}$

10　もとの立方体の1辺の長さを x cm とおくと

$$(x+2)(x+3)(x-1)=60$$
$$x^3+4x^2+x-66=0$$

$P(x)=x^3+4x^2+x-66$ とおくと

$P(3)=0$ であるから，$x-3$ で割り算をして

$$(x-3)(x^2+7x+22)=0$$

よって　　$x=3,\ \dfrac{-7\pm\sqrt{39}i}{2}$

x は1より大きい実数であるから　　$x=3$

よって，もとの立方体の1辺の長さは

3 cm

11　$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと

$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

よって

(左辺) $=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(a^2+b^2+c^2)(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)$
$=k^2(a^2+b^2+c^2)^2$

(右辺) $=(ax+by+cz)^2$
$=(a^2k+b^2k+c^2k)^2$
$=k^2(a^2+b^2+c^2)^2$

ゆえに

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

12　(右辺)$-$(左辺)

$=2(ac+bd)-(a+b)(c+d)$
$=2ac+2bd-(ac+ad+bc+bd)$
$=ac-ad-bc+bd$
$=(a-b)(c-d)$

ここで，$a\geqq b$，$c\geqq d$ より

$a-b\geqq 0$，$c-d\geqq 0$

であるから

$(a-b)(c-d)\geqq 0$

よって　　$(a+b)(c+d)\leqq 2(ac+bd)$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ または $c-d=0$，すなわち，**$a=b$ または $c=d$ のとき** である。

13　(1)　(左辺)$-$(右辺)

$=(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=(a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$
$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$
$=(bx-ay)^2\geqq 0$

よって　　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

等号が成り立つのは，**$bx-ay=0$ のとき** である。

(2)　(左辺) − (右辺)

$= (a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

$= \dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$= \dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(c^2-2ca+a^2)\}$

$= \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$(a-b)^2 \geqq 0$，$(b-c)^2 \geqq 0$，$(c-a)^2 \geqq 0$

であるから

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

よって　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$，すなわち **$a=b=c$ のとき** である。

14　(1)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$

$\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{b}{a}$ はともに正であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$

ゆえに　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 2+2=4$

等号が成り立つのは，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$，すなわち，$a^2=b^2$ のときであるが，$a>0$，$b>0$ より，**$a=b$ のとき** である。

(2)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}+5$

$\dfrac{4a}{b}$，$\dfrac{b}{a}$ はともに正であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{4a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4$$

ゆえに　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right) \geqq 4+5=9$

等号が成り立つのは，$\dfrac{4a}{b}=\dfrac{b}{a}$，すなわち，$4a^2=b^2$ のときであるが，$a>0$，$b>0$ より，**$b=2a$ のとき** である。