5章・1節　微分係数と導関数

組	番号	名　　前

①　平均変化率　　**④　導関数の計算**
②　微分係数
③　導関数

1　次の[　　　]をうめよ。知

(1)　関数 $y=f(x)$ において，x が a から b まで変わるとき，x の変化量に対する y の変化量の割合を，x が a から b まで変わるときの関数 $f(x)$ の $\boxed{\text{平均変化率}}$ という。

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるときの関数 $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

(3)　一般に，関数 $f(x)$ の x が a から $a+h$ まで変わるときの平均変化率において，h を限りなく0に近づけるときの $\boxed{\text{極限値}}$ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が定まるならば，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における $\boxed{\text{微分係数}}$ といい，記号 $\boxed{f'(a)}$ で表す。

(4)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の $\boxed{\text{傾き}}$ は，微分係数 $f'(a)$ に等しい。

(5)　関数 $y=f(x)$ について，x のおのおのの値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させれば，1つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。この関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の $\boxed{\text{導関数}}$ という。

$$f'(x)=\boxed{\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

x の変化量 h を Δx，y の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を Δy で表す。Δx，Δy をそれぞれ x の $\boxed{\text{増分}}$，y の $\boxed{\text{増分}}$ という。

(6)　x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を x で $\boxed{\text{微分}}$ する，という。

(7)　関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに

$$\boxed{y'},\qquad \boxed{\frac{dy}{dx}},\qquad \boxed{\frac{d}{dx}f(x)}$$

などの記号も用いられる。

(8)　$(x^n)'=\boxed{nx^{n-1}}$　　また，c が定数のとき　　$(c)'=\boxed{0}$

(9)　値が一定の関数を $\boxed{\text{定数関数}}$ という。

(10)　定数倍，和，差の導関数

[1]　k が定数のとき　　$\{kf(x)\}'=\boxed{k}f'(x)$

[2]　$\{f(x)+g(x)\}'=\boxed{f'(x)+g'(x)}$

[3]　$\{f(x)-g(x)\}'=\boxed{f'(x)-g'(x)}$

2　関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，次の問に答えよ。技

(1)　x が -1 から2まで変わるときの平均変化率を求めよ。

［解］　$\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{(2\cdot2^2-3\cdot2+1)-\{2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1\}}{2-(-1)}$

$=\dfrac{3-6}{3}=\mathbf{-1}$

(2)　x が2から $2+h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ。

［解］　$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\dfrac{\{2\cdot(2+h)^2-3\cdot(2+h)+1\}-(2\cdot2^2-3\cdot2+1)}{h}$

$=\dfrac{2h^2+5h}{h}=\dfrac{h(2h+5)}{h}=\mathbf{2h+5}$

(3)　(2)の結果を利用して，微分係数 $f'(2)$ を求めよ。

［解］　$f'(2)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}(2h+5)=\mathbf{5}$

3　導関数の定義にしたがって，$f(x)=2x^3$ を微分せよ。技

［解］　$f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{2(x+h)^3-2x^3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-2x^3}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{h(6x^2+6xh+2h^2)}{h}=\lim_{h\to0}(6x^2+6xh+2h^2)=\mathbf{6x^2}$

4　放物線 $y=3x^2$ 上の点 $(2,\ 12)$ における接線の傾きを求めよ。技

［解］　放物線 $y=3x^2$ 上の点 $(2,\ 12)$ における接線の傾きは，

$f(x)=3x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$f'(3)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{3(2+h)^2-3\cdot2^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3\cdot2\cdot2h+3h^2}{h}=\lim_{h\to0}(12+3h)=\mathbf{12}$

5　導関数の公式を用いて，次の関数を微分せよ。技

(1)　$y=5x^2-2x+3$

［解］　$y'=(5x^2)'-(2x)'+(3)'=5\cdot2x-2\cdot1+0=\mathbf{10x-2}$

(2)　$y=3x-x^3$

［解］　$y'=(3x)'-(x^3)'=3\cdot1-3x^2=\mathbf{3-3x^2}$

(3)　$y=(x+2)(2x^2-x-1)$

［解］　$y=2x^3+3x^2-3x-2$ であるから

$y'=(2x^3)'+(3x^2)'-(3x)'-(2)'=2\cdot3x^2+3\cdot2x-3\cdot1-0=\mathbf{6x^2+6x-3}$

6　次の関数の導関数を求め，〔　　〕内に示した x の値における微分係数を求めよ。技

(1)　$f(x)=3x^2-4x+9$　　〔$x=2$〕

［解］　$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=6x-4$

よって　　$f'(2)=6\cdot2-4=\mathbf{8}$

(2)　$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$　　$\left[x=\dfrac{1}{3}\right]$

［解］　$f(x)=x^3+1$ であるから，$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=3x^2$

よって　$f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

(3)　$f(x)=-x^3+2x^2-3$　　〔$x=a$〕

［解］　$f(x)$ を微分すると　　$f'(x)=-3x^2+4x$ であるから

よって　　$f'(a)=\mathbf{-3a^2+4a}$

7　関数 $f(x)=4x^3-ax^2+3$ が，$f'(1)=2$ を満たすとき，定数 a の値を求めよ。技

［解］　$f(x)$ を x で微分すると　　$f'(x)=12x^2-2ax$

であるから　　$f'(1)=12-2a$

$f'(1)=2$ より　　$12-2a=2$

よって　　$\mathbf{a=5}$