1 節 微分係数と導関数

1 微分係数

（教科書 p.178）

平均の速さ

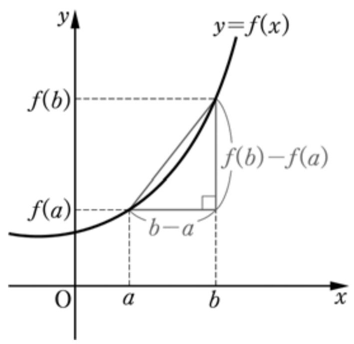
問1 上の球の運動で，3 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めよ。

平均変化率

関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき
x の変化量　$b-a$　と
y の変化量　$f(b)-f(a)$
との比の値

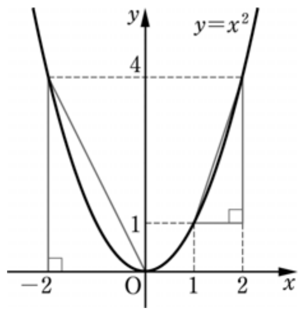
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，x が a から b まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の
（①　　　　　　　　）という。



例 1 2 次関数 $f(x)=x^2$ について，平均変化率を求めてみよう。
(1)　x が 1 から 2 まで変わるときの平均変化率は

(2)　x が -2 から 0 まで変わるときの平均変化率は



問2 次の関数について，x が 3 から 5 まで変わるときの平均変化率を求めよ。
(1)　$f(x)=3x+2$

(2)　$f(x)=2x^2+3x$

例 2 2 次関数 $f(x)=x^2+3x$ について，x が 2 から $2+h$ まで変わるときの平均変化率を求めてみよう。

であるから，求める平均変化率は

問3 関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。
(1)　x が 1 から $1+h$ まで変わるとき

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるとき

極限値と微分係数

（教科書 p.180）

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

（②　　　　　　）　のとき　（③　　　　　　）

または　（④　　　　　　）

と書き，α を x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の（⑤　　　　　　）という。

例3 $\lim_{x\to1}(2x-6)=$

問4 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to4}(2x-3)$

(2) $\lim_{x\to-2}(x^2+3x)$

例4 178 ページの球の運動において，転がりはじめて 2 秒後の“瞬間の速さ”は，次のように表される。

問5 例 4 にならって，球が転がりはじめて 3 秒後の瞬間の速さを求めよ。

x が a から $a+h$ まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において，h を限りなく 0 に近づけたとき，この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における（⑥　　　　　　）または変化率

といい，（⑦　　　　　　）で表す。

微分係数の定義
$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

例5 関数 $f(x)=x^2$ について

（1） $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$f'(1)=$

（2） $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$f'(a)=$

問6 関数 $f(x)=2x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1)　$f'(1)$

(2)　$f'(-2)$

(3)　$f'(a)$

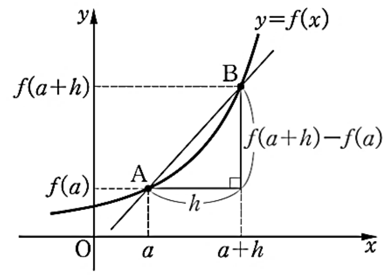
微分係数の図形的意味

（教科書 p.182）

グラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

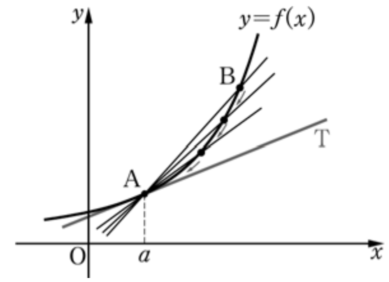
は，直線 AB の傾きを表している。



いま，h を 0 に限りなく近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AB は点 Aを通り，傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線$y=f(x)$ の（⑧　　　　　　）といい，点 A を（⑨　　　　　　）という。



次のようにまとめることができる。

微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\left(a,\ f(a)\right)$ における接線の傾きに等しい。

例6 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは，$f(x)=x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$f'(3)=$

問7 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(-2,\ 4)$ における接線の傾きを求めよ。

2 導関数

（教科書 p.183）

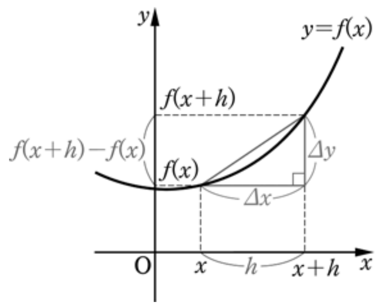
関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の（⑩　　　　　　）という。

すなわち，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される。

導関数の定義
$\displaystyle \boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

上の式において，h は x の変化量，$f(x+h)-f(x)$ はそれにともなう y の変化量を表している。これらをそれぞれ，x の（⑪　　　　　　），y の（⑫　　　　　　）といい，記号 Δx，Δy で表す。すなわち

$\Delta x=h,\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$



Δx，Δy の記号を用いると，導関数は次のように表される。

（⑬

（教科書 p.184）

x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を（⑭　　　　　　　　），または単に（⑮　　　　　　）という。

例題 1　導関数の定義にしたがって，次の関数を微分せよ。

(1)　$f(x)=x$　　　　(2)　$f(x)=x^3$

解

問8　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=x^2+7$ を微分せよ。

導関数の計算

（教科書 p.184）

一般に，関数 x^n の導関数は，次のようになる。

$\boldsymbol{x^n}$ の導関数
n が正の整数のとき　　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$

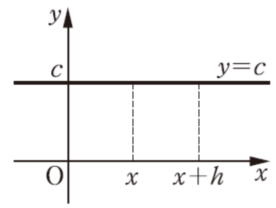
問9　関数 $y=x^4$ を微分せよ。

定数関数の微分

一定の値だけをとる関数を（⑯　　　　　　）という。定数関数$y=c$ を微分してみよう。

$f(x)=c$とおくと，$f(x+h)=c$であるから

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}0=0$$



すなわち，次のことが成り立つ。

（⑰　　　　　　　　　　　　）

問 10　関数 $y=-6$ を微分せよ。

定数倍の微分

一般に，定数 k と関数 $f(x)$ について，次の式が成り立つ。

（⑱　　　　　　　　　　）

問 11 関数 $y=-4x^3$ を微分せよ。

和・差の微分

一般に，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，次の式が成り立つ。

(⑲)

(⑳)

問 12 関数 $y=x^3-x$ を微分せよ。

以上の導関数の性質をまとめると，次のようになる。

導関数の公式
1 c が定数で　$y=c$　ならば　$y'=0$ **2** k が定数で　$y=kf(x)$　ならば　$y'=kf'(x)$ **3** $y=f(x)+g(x)$　ならば　$y'=f'(x)+g'(x)$ **4** $y=f(x)-g(x)$　ならば　$y'=f'(x)-g'(x)$

問 13 上の公式を用いて，次の式が成り立つことを示せ。

関数 $f(x)$，$g(x)$ について，k，l を定数とするとき

$$\{\boldsymbol{kf(x)+lg(x)}\}'=\boldsymbol{kf'(x)+lg'(x)}$$

例題 2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=3x^2-1$　　(2) $y=2x^3+3x^2-5x+2$

解

問 14 次の関数を微分せよ。

(1) $y=-2x+3$

(2) $y=-3x^2+x+4$

(3) $y=5x^3-8x+1$

(4) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+1$

(5) $y=-4x^3+6x^2+7x-9$

例題 3 関数 $y=(2x+1)(x-3)$ を微分せよ。

解

問 15 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x+5)(3x-1)$

(2)　$y=(2x+3)^2$

(3)　$y=x(x+1)^2$

(4)　$y=(x-1)^3$

微分係数の計算

（教科書 p.188）

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がわかっているとき，微分係数 $f'(a)$ は，導関数 $f'(x)$ に（㉑　　　　　　　　）して得られる。

例 7 $f(x)=x^3-4x+3$ のとき

したがって，$f(x)$ の $x=0,\ 1,\ -2$ における微分係数は

である。

問 16 関数 $f(x)=3x^3-x^2$ について，$f'(2)$，$f'(-1)$ を求めよ。

問 17 関数 $f(x)=x^3+x^2-ax+1$ について，$f'(1)=7$ となるような定数 a の値を求めよ。

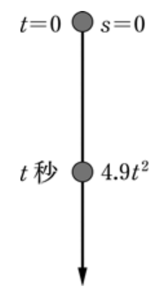
変数が x，y 以外の文字の導関数

（教科書 p.188）

例 8 物体が静止の状態から重力によって落下するとき，落下しはじめてから t 秒間に落ちる距離を s(m) とする。空気抵抗を考えなければ，s は t の関数として

と表されることがわかっている。

この関数を t で微分して得られる導関数は，次の式で与えられる。



問 18 次の関数を［　］内の文字を変数として微分せよ。

(1)　$h=10t-5t^2$　$[t]$

(2)　$S=\pi r^2$　$[r]$

問 題

（教科書 p.189）

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 3}(x^2 - 5x)$

(2) $\lim_{t \to 2}\dfrac{t^2 - 4}{t - 2}$

2 関数 $f(x) = -2x^2 + 5x$ について，定義にしたがって，次の微分係数を求めよ。

(1) $f'(2)$

(2) $f'(-3)$

(3) $f'(a)$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 3$

(2) $y = x(7 - 3x^2)$

(3) $y = (5x - 1)^2$

(4) $y = (4x^2 - 1)(3x + 2)$

4 関数 $y = 2x^2$ の $x = a$ における微分係数が 12 に等しいとき，定数 a の値を求めよ。

5 次の関数を [ ] 内の文字を変数として微分せよ。

(1) $s = h + vt - \frac{1}{2}gt^2$ $[t]$

(2) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $[r]$

6 2 次関数 $f(x) = x^2 + 1$ について，x が a から b まで変わるときの平均変化率と，$x = c$ における微分係数 $f'(c)$ が等しいとき，c を a と b を用いて表せ。ただし，$a \neq b$ とする。

7 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 6$ について，$f'(1) = 7$, $f'(-2) = 4$ となるように，定数a, b の値を定めよ。

8 次のことを証明せよ。ただし，a, b は定数とする。

(1) $y = (ax + b)^2$ ならば　$y' = 2a(ax + b)$

(2) $y = (ax + b)^3$ ならば　$y' = 3a(ax + b)^2$

発 展 **関数の極限値と四則**

（教科書 p.190）

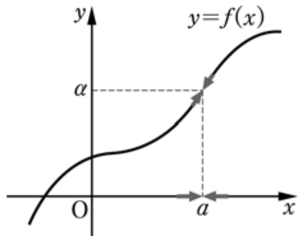
関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

（㉒　　　　　　　　　　　）

または　（㉓　　　　　　）のとき（㉔　　　　　　）

と表し，α を $x\to a$ のときの $f(x)$ の（㉕　　　　　　）という。

また，この場合，“$x\to a$ のとき $f(x)$ は α に（㉖　　　　　）する”という。

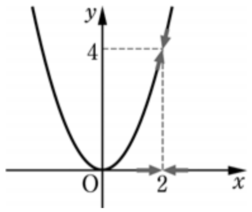


例1 $f(x)=x^2$ では

$x\to 2$ のとき　$f(x)\to$

すなわち

$\lim_{x\to 2} f(x)=$



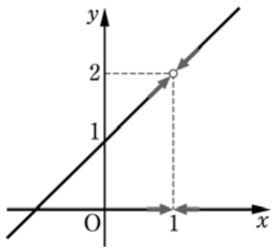
例2 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ は，$x=1$ では定義されていない。

しかし，$x\neq 1$ の範囲では

と変形される。

したがって，x が限りなく 1 に近づくとき，$f(x)$ は限りなく2 に近づく。

すなわち



問1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to -2}(x^3+1)$

(2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$

関数の極限値について，次の性質が成り立つ。

極限値と四則

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，　$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$　ならば

1 $\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　　　　ただし，k は定数

2 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

3 $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

4 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　　　　ただし，$\beta\neq 0$

例3 (1) $\lim_{x\to 2} 2(x^2+x-3)=$

(2) $\lim_{x\to -1}(x+3)(2x^2+x+1)=$

(3) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}=$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)=$

問2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to -2} 3(2x^2 - 3x - 1)$

⑵ $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

⑶ $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

⑷ $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x + 1} - 1\right)$

1節 微分係数と導関数

1 微分係数

（教科書 p.178）

平均の速さ

問1 上の球の運動で，3 秒後から 4 秒後までの平均の速さを求めよ。

$$\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{4^2-3^2}{4-3}=\mathbf{7\ (m/s)}$$

平均変化率

関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき

x の変化量　$b-a$　　と

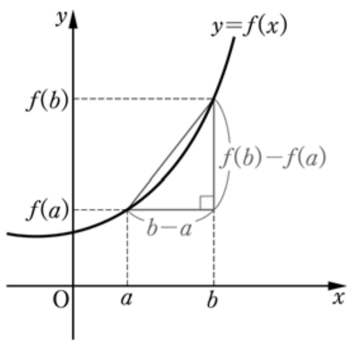
y の変化量　$f(b)-f(a)$

との比の値

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，x が a から b まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の

（① 平均変化率 ）という。



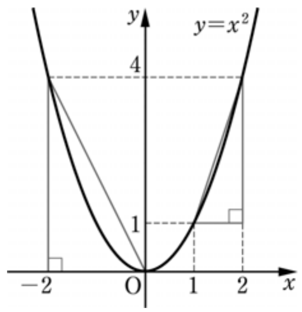
例1 2 次関数 $f(x)=x^2$ について，平均変化率を求めてみよう。

(1) x が 1 から 2 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{2-1}=3$$

(2) x が -2 から 0 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{0^2-(-2)^2}{0-(-2)}=\frac{-4}{2}=-2$$



問2 次の関数について，x が 3 から 5 まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1) $f(x)=3x+2$

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{17-11}{5-3}=\mathbf{3}$$

(2) $f(x)=2x^2+3x$

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{65-27}{5-3}=\mathbf{19}$$

例2 2 次関数 $f(x)=x^2+3x$ について，x が 2 から $2+h$ まで変わるときの平均変化率を求めてみよう。

$$f(2+h)-f(2)=\{(2+h)^2+3(2+h)\}-(2^2+3\cdot 2)$$
$$=7h+h^2=h(7+h)$$

であるから，求める平均変化率は

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{h(7+h)}{h}$$
$$=7+h$$

問3 関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。

(1) x が 1 から $1+h$ まで変わるとき

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{\{(1+h)^2-4(1+h)\}-(1^2-4\cdot 1)}{h}$$
$$=\frac{-2h+h^2}{h}$$
$$=\frac{h(-2+h)}{h}=\mathbf{-2+h}$$

(2) x が a から $a+h$ まで変わるとき

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\frac{\{(a+h)^2-4(a+h)\}-(a^2-4a)}{h}$$
$$=\frac{2ah-4h+h^2}{h}$$
$$=\frac{h(2a-4+h)}{h}=\mathbf{2a-4+h}$$

極限値と微分係数

（教科書 p.180）

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

（② $x \to a$ ）　のとき　（③ $f(x) \to \alpha$ ）

または　（④ $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ ）

と書き，α を x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の（⑤ 極限値 ）という。

例3 $\lim_{x \to 1}(2x-6) = 2 \cdot 1 - 6 = -4$

問4 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 4}(2x-3)$

$\lim_{x \to 4}(2x-3) = 2 \cdot 4 - 3 = \mathbf{5}$

(2) $\lim_{x \to -2}(x^2+3x)$

$\lim_{x \to -2}(x^2+3x) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) = \mathbf{-2}$

例4 178 ページの球の運動において，転がりはじめて 2 秒後の“瞬間の速さ”は，次のように表される。

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0}(4+h) = 4 \quad (\mathrm{m/s})$$

問5 例 4 にならって，球が転がりはじめて 3 秒後の瞬間の速さを求めよ。

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{6h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(6+h)$$

$$= \mathbf{6\ (m\,/\,s)}$$

x が a から $a+h$ まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において，h を限りなく 0 に近づけたとき，この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における（⑥ 微分係数 ）または変化率

といい，（⑦ $f'(a)$ ）で表す。

微分係数の定義
$f'(a) = \lim_{h \to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

例5 関数 $f(x)=x^2$ について

（1） $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1) = \lim_{h \to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$$

（2） $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2a+h) = 2a$$

問6 関数 $f(x)=2x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1) $f'(1)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-2\cdot 1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4+2h)=\mathbf{4}$$

(2) $f'(-2)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(-2+h)^2-2\cdot(-2)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-8h+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-8+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-8+2h)=\mathbf{-8}$$

(3) $f'(a)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^2-2a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4ah+2h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(4a+2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4a+2h)=\mathbf{4a}$$

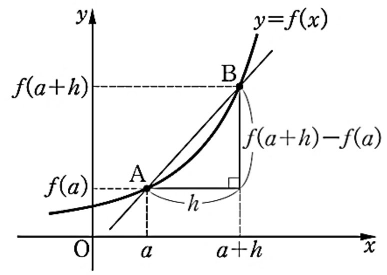
微分係数の図形的意味

（教科書 p.182）

グラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である 2 点 A，B をとると

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

は，直線 AB の傾きを表している。

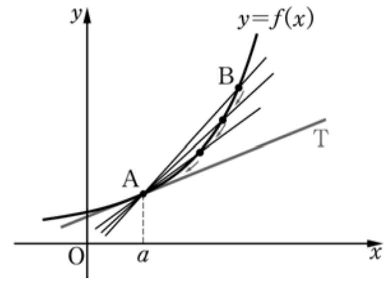


いま，h を 0 に限りなく近づけると，点 B はグラフ上を動いて限りなく点 A に近づく。このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線 AB は点 Aを通り，傾き $f'(a)$ の直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線$y=f(x)$ の（⑧ 接線 ）といい，点 A を（⑨ 接点 ）という。

次のようにまとめることができる。



微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。

例6 放物線 $y=x^2$ 上の点 (3, 9) における接線の傾きは，$f(x)=x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

問7 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(-2,\ 4)$ における接線の傾きを求めよ。

$f(x)=x^2$ とおくと，求める接線の傾きは$f'(-2)$ に等しいから

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2-(-2)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-4h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-4+h)=\mathbf{-4}$$

2 導関数

（教科書 p.183）

関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の（⑩ 導関数 ）という。

すなわち，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される。

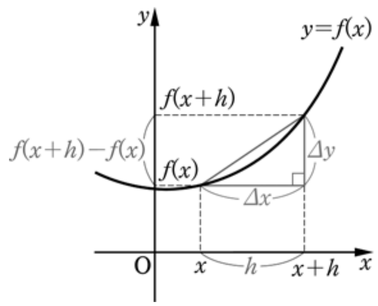
導関数の定義
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

上の式において，h は x の変化量，$f(x+h)-f(x)$ はそれにともなう y の変化量を表している。これらをそれぞれ，x の（⑪ 増分 ），y の（⑫ 増分 ）といい，記号 Δx，Δy で表す。すなわち

$\Delta x=h,\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

Δx，Δy の記号を用いると，導関数は次のように表される。

（⑬ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ）



（教科書 p.184）

x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を（⑭ x で微分する ），または単に（⑮ 微分する ）という。

例題 1 導関数の定義にしたがって，次の関数を微分せよ。

(1) $f(x)=x$　　(2) $f(x)=x^3$

解

(1) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

問8 導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=x^2+7$ を微分せよ。

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2+7\}-(x^2+7)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2x+h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=\mathbf{2x}$

導関数の計算

（教科書 p.184）

一般に，関数 x^n の導関数は，次のようになる。

x^n の導関数
n が正の整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

問9 関数 $y=x^4$ を微分せよ。

$y'=(x^4)'=4x^{4-1}=\mathbf{4x^3}$

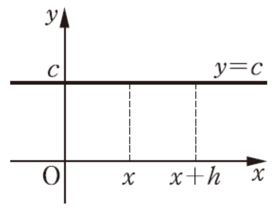
定数関数の微分

一定の値だけをとる関数を（⑯ 定数関数 ）という。定数関数$y=c$ を微分してみよう。

$f(x)=c$とおくと，$f(x+h)=c$であるから

$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}0=0$



すなわち，次のことが成り立つ。

（⑰ c が定数のとき　$(c)'=0$ ）

問 10 関数 $y=-6$ を微分せよ。

$\mathbf{y'=0}$

定数倍の微分

一般に，定数 k と関数 $f(x)$ について，次の式が成り立つ。

（⑱ $\{kf(x)\}'=kf'(x)$ ）

問 11 関数 $y=-4x^3$ を微分せよ。

$y'=(-4)\cdot(x^3)'=(-4)\cdot 3x^2=\mathbf{-12x^2}$

和・差の微分

一般に，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，次の式が成り立つ。

（⑲ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ ）

（⑳ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$ ）

問 12 関数 $y=x^3-x$ を微分せよ。

$y'=(x^3)'-(x)'=\mathbf{3x^2-1}$

以上の導関数の性質をまとめると，次のようになる。

導関数の公式
1 c が定数で　$y=c$　ならば　$y'=0$
2 k が定数で　$y=kf(x)$　ならば　$y'=kf'(x)$
3 $y=f(x)+g(x)$　ならば　$y'=f'(x)+g'(x)$
4 $y=f(x)-g(x)$　ならば　$y'=f'(x)-g'(x)$

問 13 上の公式を用いて，次の式が成り立つことを示せ。

関数 $f(x)$，$g(x)$ について，k，l を定数とするとき

$\{\boldsymbol{kf(x)+lg(x)}\}'=\boldsymbol{kf'(x)+lg'(x)}$

$\{kf(x)+lg(x)\}'=\{kf(x)\}'+\{lg(x)\}'$

$=kf'(x)+lg'(x)$

例題 2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=3x^2-1$　　　(2) $y=2x^3+3x^2-5x+2$

解 (1) $y'=(3x^2-1)'$

$=3(x^2)'-(1)'$

$=3\cdot 2x-0$

$=6x$

(2) $y'=(2x^3+3x^2-5x+2)'$

$=2(x^3)'+3(x^2)'-5(x)'+(2)'$

$=2\cdot 3x^2+3\cdot 2x-5\cdot 1+0$

$=6x^2+6x-5$

問 14 次の関数を微分せよ。

(1) $y=-2x+3$

$y'=-2(x)'+(3)'=-2\cdot 1+0=\mathbf{-2}$

(2) $y=-3x^2+x+4$

$y'=-3(x^2)'+(x)'+(4)'$

$=-3\cdot 2x+1+0$

$=\mathbf{-6x+1}$

(3) $y=5x^3-8x+1$

$y'=5(x^3)'-8(x)'+(1)'$

$=5\cdot 3x^2-8\cdot 1+0$

$=\mathbf{15x^2-8}$

(4) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+1$

$y'=\frac{1}{3}(x^3)'-\frac{1}{2}(x^2)'-3(x)'+(1)'$

$=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{1}{2}\cdot 2x-3\cdot 1+0$

$=\mathbf{x^2-x-3}$

(5) $y=-4x^3+6x^2+7x-9$

$y'=-4(x^3)'+6(x^2)'+7(x)'-(9)'$

$=-4\cdot 3x^2+6\cdot 2x+7\cdot 1-0$

$=\mathbf{-12x^2+12x+7}$

例題 3 関数 $y=(2x+1)(x-3)$ を微分せよ。

解 $y=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$　　◀まず展開する

よって　$y'=(2x^2-5x-3)'$

$=2(x^2)'-5(x)'-(3)'$

$=2\cdot 2x-5\cdot 1-0$

$=4x-5$

問 15 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+5)(3x-1)$

$y=3x^2+14x-5$ より

$y'=3(x^2)'+14(x)'-(5)'$

$=3\cdot 2x+14\cdot 1-0$

$=\mathbf{6x+14}$

(2) $y=(2x+3)^2$

$y=4x^2+12x+9$ より

$y'=4(x^2)'+12(x)'+(9)'$

$=4\cdot 2x+12\cdot 1+0$

$=\mathbf{8x+12}$

(3) $y=x(x+1)^2$

$y=x^3+2x^2+x$ より

$y'=(x^3)'+2(x^2)'+(x)'$

$=3x^2+2\cdot 2x+1$

$=\mathbf{3x^2+4x+1}$

(4) $y=(x-1)^3$

$y=x^3-3x^2+3x-1$ より

$y'=(x^3)'-3(x^2)'+3(x)'-(1)'$

$=3x^2-3\cdot 2x+3\cdot 1-0$

$=\mathbf{3x^2-6x+3}$

微分係数の計算

（教科書 p.188）

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がわかっているとき，微分係数 $f'(a)$ は，導関数 $f'(x)$ に
(㉑ $x=a$ を代入) して得られる。

例 7 $f(x)=x^3-4x+3$ のとき

$f'(x)=3x^2-4$

したがって，$f(x)$ の $x=0,\ 1,\ -2$ における微分係数は

$f'(0)=-4,\quad f'(1)=-1,\quad f'(-2)=8$

である。

問 16 関数 $f(x)=3x^3-x^2$ について，$f'(2)$，$f'(-1)$ を求めよ。

$f'(x)=9x^2-2x$ より

$\boldsymbol{f'(2)}=9\cdot 2^2-2\cdot 2=\mathbf{32}$

$\boldsymbol{f'(-1)}=9\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)=\mathbf{11}$

問 17 関数 $f(x)=x^3+x^2-ax+1$ について，$f'(1)=7$ となるような定数 a の値を求めよ。

$f'(x)=3x^2+2x-a$

であるから，$f'(1)=7$ より

$3+2-a=7$

よって　$\boldsymbol{a=-2}$

変数が x，y 以外の文字の導関数

（教科書 p.188）

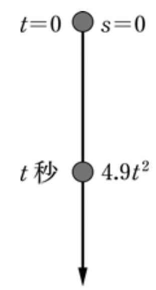
例 8 物体が静止の状態から重力によって落下するとき，落下しはじめてから t 秒間に落ちる距離を s(m) とする。空気抵抗を考えなければ，s は t の関数として

$s=4.9t^2$

と表されることがわかっている。

この関数を t で微分して得られる導関数は，次の式で与えられる。

$$\frac{ds}{dt}=(4.9t^2)'=4.9\cdot 2t=9.8t$$



問 18 次の関数を [ ] 内の文字を変数として微分せよ。

(1) $h=10t-5t^2$ [t]

$$\frac{dh}{dt}=10(t)'-5(t^2)'$$

$=10\cdot 1-5\cdot 2t=\mathbf{10-10t}$

(2) $S=\pi r^2$ [r]

$$\frac{dS}{dr}=\pi(r^2)'=\pi\cdot 2r=\boldsymbol{2\pi r}$$

問 題

（教科書 p.189）

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 3}(x^2 - 5x)$

$= 3^2 - 5 \cdot 3 = \mathbf{-6}$

(2) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 4}{t - 2}$

$= \lim_{t \to 2} \frac{(t+2)(t-2)}{t-2}$

$= \lim_{t \to 2}(t+2) = \mathbf{4}$

2 関数 $f(x) = -2x^2 + 5x$ について，定義にしたがって，次の微分係数を求めよ。

(1) $f'(2)$

$f(2+h) - f(2)$

$= \{-2(2+h)^2 + 5(2+h)\} - (-2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2)$

$= -3h - 2h^2$

よって

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h - 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-3-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(-3 - 2h) = \mathbf{-3}$$

(2) $f'(-3)$

$f(-3+h) - f(-3)$

$= \{-2(-3+h)^2 + 5(-3+h)\} - \{-2 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3)\}$

$= 17h - 2h^2$

よって

$$f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{17h - 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(17-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(17 - 2h) = \mathbf{17}$$

(3) $f'(a)$

$f(a+h) - f(a)$

$= \{-2(a+h)^2 + 5(a+h)\} - (-2a^2 + 5a)$

$= -4ah + 5h - 2h^2$

よって

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4ah + 5h - 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-4a + 5 - 2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(-4a + 5 - 2h) = \mathbf{-4a + 5}$$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 3$

$\boldsymbol{y' = 3x^2 - 12x}$

(2) $y = x(7 - 3x^2)$

$y = 7x - 3x^3$ より

$\boldsymbol{y' = 7 - 9x^2}$

(3) $y = (5x - 1)^2$

$y = 25x^2 - 10x + 1$ より

$\boldsymbol{y' = 50x - 10}$

(4) $y = (4x^2 - 1)(3x + 2)$

$y = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$ より

$\boldsymbol{y' = 36x^2 + 16x - 3}$

4 関数 $y = 2x^2$ の $x = a$ における微分係数が 12 に等しいとき，定数 a の値を求めよ。

$y = 2x^2$ のとき　$y' = 4x$

よって　$4a = 12$

ゆえに　$\boldsymbol{a = 3}$

5 次の関数を [　] 内の文字を変数として微分せよ。

(1) $s = h + vt - \frac{1}{2}gt^2$　$[t]$

$\frac{ds}{dt} = 0 + v \cdot 1 - \frac{1}{2}g \cdot 2t = \boldsymbol{v - gt}$

(2) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$　$[r]$

$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = \boldsymbol{4\pi r^2}$

6 2 次関数 $f(x) = x^2 + 1$ について，x が a から b まで変わるときの平均変化率と，$x = c$ における微分係数 $f'(c)$ が等しいとき，c を a と b を用いて表せ。ただし，$a \neq b$ とする。

平均変化率は

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b^2 + 1) - (a^2 + 1)}{b - a}$$

$$= \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = b + a$$

また，$f'(x) = 2x$ より　$f'(c) = 2c$

よって　$a + b = 2c$

したがって　$\boldsymbol{c = \frac{a+b}{2}}$

7 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 6$ について，$f'(1) = 7$, $f'(-2) = 4$ となるように，定数a, b の値を定めよ。

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ であるから

$f'(1) = 3a + 2b = 7$

$f'(-2) = 12a - 4b = 4$

よって　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 2}$

8 次のことを証明せよ。ただし，a, b は定数とする。

(1) $y = (ax + b)^2$ ならば　$y' = 2a(ax + b)$

$y = a^2x^2 + 2abx + b^2$ より

$y' = 2a^2x + 2ab = 2a(ax + b)$

(2) $y = (ax + b)^3$ ならば　$y' = 3a(ax + b)^2$

$y = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ より

$y' = 3a^3x^2 + 6a^2bx + 3ab^2$

$= 3a(a^2x^2 + 2abx + b^2)$

$= 3a(ax + b)^2$

発 展　関数の極限値と四則

（教科書 p.190）

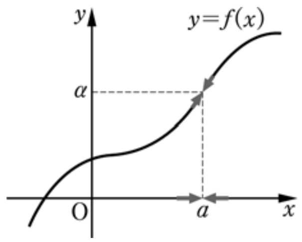
関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば

（㉒ $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ ）

または （㉓ $x \to a$ ）のとき（㉔ $f(x) \to \alpha$ ）

と表し，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の（㉕ 極限値 ）という。

また，この場合，“$x \to a$ のとき $f(x)$ は α に（㉖ 収束 ）する”という。

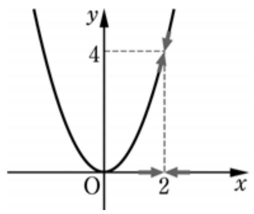


例1 $f(x) = x^2$ では

$x \to 2$ のとき　$f(x) \to f(2)$

すなわち

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



例2 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ は，$x = 1$ では定義されていない。

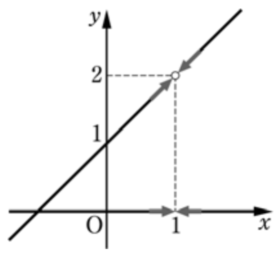
しかし，$x \neq 1$ の範囲では

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

と変形される。

したがって，x が限りなく 1 に近づくとき，$f(x)$ は限りなく 2 に近づく。

すなわち　$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$



問1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to -2} (x^3 + 1)$

$= (-2)^3 + 1 = \mathbf{-7}$

(2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} (x+2) = \mathbf{5}$

関数の極限値について，次の性質が成り立つ。

極限値と四則

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$，$\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ ならば

1. $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$　　ただし，k は定数
2. $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$
$\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$
3. $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$
4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \neq 0$

例3

(1) $\lim_{x \to 2} 2(x^2 + x - 3) = 2 \cdot (2^2 + 2 - 3) = 6$

(2) $\lim_{x \to -1} (x+3)(2x^2 + x + 1) = 2 \cdot 2 = 4$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3x+1)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{3x+1} = \frac{5}{7}$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(2 - \frac{4}{x+2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{x+2}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{x+2} = 1$

問2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to -2} 3(2x^2 - 3x - 1)$

$= 3 \cdot \{2(-2)^2 - 3(-2) - 1\} = \mathbf{39}$

(2) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

$= \lim_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} (x + 2) = \mathbf{1}$

(3) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{2^2 + 2 \cdot 2 + 4}{(2-1)(2+1)} = \mathbf{4}$

(4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right)$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{-x}{x+1}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{-1}{x+1} = \mathbf{-1}$