# 1 節 指数関数

## 1 指数法則

（教科書 p.150）

$m$, $n$ が正の整数のとき，数学Ⅰで学んだ次の（①　　　　　　　）が成り立つ。

**1**（②　　　　　　　）　**2**（③　　　　　　　）　**3**（④　　　　　　　）

### $a^0$ と $a^{-n}$

（教科書 p.150）

指数が 0 または負の整数のときの累乗を次のように定める。

**$a^0$, $a^{-n}$ の定義**

$a \neq 0$ で，$n$ が正の整数のとき

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

例 1

（1）$3^0 =$

（2）$2^{-3} =$

問1 次の値を求めよ。

（1）$5^{-1}$

（2）$6^0$

（3）$10^{-2}$

（4）$(-4)^{-3}$

問2 次の式を $a^n$ の形で表せ。

（1）$\frac{1}{a}$

（2）$1$

（3）$\frac{1}{a^5}$

（4）$\frac{1}{a^{17}}$

### 指数法則

（教科書 p.151）

例 2 $m = 3$, $n = -2$ のとき，前ページの指数法則**1**，**2**，**3**が成り立つことを確かめてみよう。

**1** $a^3 a^{-2} =$

**2** $(a^3)^{-2} =$

**3** $(ab)^{-2} =$

**指数法則 1**

$a \neq 0$, $b \neq 0$ で，$m$, $n$ が整数のとき

**1** $\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$　　**1**′ $\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$

**2** $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$

**3** $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$　　**3**′ $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

例 3

（1）$a^3 \times a^{-9} \div a^{-4} =$

（2）$(a^2)^3 \times (ab^3)^{-2} =$

問3 次の計算をせよ。

(1) $a^{-2}a^{5}$

(2) $x^{-7} \div (x^{-5} \times x^{2})$

(3) $(a^{3}b^{-4})^{-2}$

(4) $\left(\frac{x^{-2}}{y^{3}}\right)^{-5}$

## 2 累乗根

(教科書 p.152)

$a$ を実数とする。正の整数 $n$ に対して，$n$ 乗して $a$ になる数，

すなわち　　(⑤　　　　　)

を満たす数 $x$ を，$a$ の (⑥　　　　　) という。平方根は 2 乗根である。

例4 (1) $(-2)^{3}=$ (　　　　) であるから，$-2$ は (　　　　　　)

(2) $(-2)^{4}=$ (　　　　)，$2^{4}=$ (　　　　) であるから，

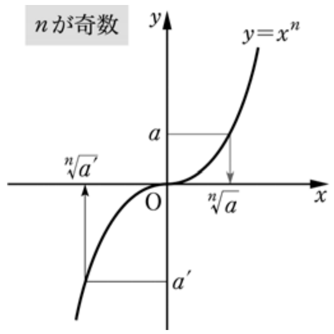
$-2$，$2$ は (　　　　　　)

この章では，$n$ 乗根は実数の範囲で考えるものとする。このとき，実数 $a$ の $n$ 乗根について，次のことがいえる。

(i) **$n$ が奇数のとき**

$a$ の $n$ 乗根は $a$ の正負に関係なく，ただ 1 つ存在する。

それを (⑦　　　　) と表す。$\sqrt[n]{a}$ と $a$ の正負は同じである。

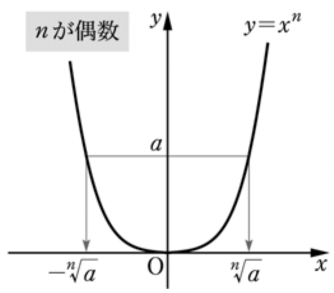



例5 $(-2)^{5}=$ (　　　　) であるから

$\sqrt[5]{-32}=$

(ii) **$n$ が偶数のとき**

$a>0$ のとき，$a$ の $n$ 乗根は正と負の 2 つが存在する。そのうち正の方を (⑧　　　　)，負の方を (⑨　　　　) と表す。




例6 $3^{4}=$ (　　　　)，$(-3)^{4}=$ (　　　　) であるから

$\sqrt[4]{81}=$ (　　　　)，$-\sqrt[4]{81}=$ (　　　　)

注意 $\sqrt[2]{a}$ をこれまで通り $\sqrt{a}$ と書く。また，$n$ が奇数，偶数のいずれであっても (⑩　　　　　) である。

問4 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$

(2) $\sqrt[3]{-125}$

(3) $\sqrt[4]{256}$

(4) $\sqrt[5]{-243}$

## 累乗根の性質

(教科書 p.153)

2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて（⑪　　　　　　　）という。

$a>0$ で，$n$ が正の整数のとき，$\sqrt[n]{a}$ は $a$ のただ 1 つの正の $n$ 乗根である。すなわち

$a>0$ のとき　（⑫　　　　　　　　），（⑬　　　　　　　）

さらに，累乗根について次の性質が成り立つ。

| 累乗根の性質 |
|---|
| $a>0,\ b>0$ で，$m,\ n,\ p$ が正の整数のとき<br>**1** $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　**2** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$<br>**3** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$　　**4** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$<br>**5** $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ |

証明 **1** 左辺を $n$ 乗すると　$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$

ここで，$\sqrt[n]{a}>0,\ \sqrt[n]{b}>0$ であるから　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$

よって，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は $ab$ の正の $n$ 乗根である。

すなわち　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

問5 前のページの証明にならって，**3**，**4**を証明せよ。

例 7

(1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=$

(2) $\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{2}}=$

(3) $\sqrt[3]{40}=$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{49}}=$

問6 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{400}\times\sqrt[4]{25}$

(2) $\sqrt[4]{400}\div\sqrt[4]{25}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt{216}}$

(4) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^5 \div \sqrt[3]{64}$

## 3 指数の拡張

（教科書 p.154）

| 有理数を指数とする累乗 |
| --- |
| $a > 0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき<br>$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}, \qquad \boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$ |

**例 8** (1) $8^{\frac{2}{3}} =$

(2) $16^{-\frac{3}{4}} =$

**問7** 次の値を求めよ。

(1) $16^{\frac{1}{4}}$

(2) $27^{\frac{4}{3}}$

(3) $36^{-\frac{1}{2}}$

(4) $125^{-\frac{2}{3}}$

問8 次の値を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(1) $\sqrt[5]{a}$

(2) $\sqrt[3]{a^5}$

(3) $\sqrt{a^{-3}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^7}}$

問9 次の計算をせよ。

(1) $7^{\frac{1}{2}} \div 7^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{2}{3}}$

(2) $\left(16^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(3) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \times 27^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{3}{2}}$

一般に，有理数を指数とする累乗についても，指数法則が成り立つ。

**指数法則２**

$a>0,\ b>0$ で，$p,\ q$ が有理数のとき

1 $a^p a^q = a^{p+q}$　　1′ $a^p \div a^q = a^{p-q}$

2 $(a^p)^q = a^{pq}$

3 $(ab)^p = a^p b^p$　　3′ $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

例9 (1) $24^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$

(2) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a^3} \div \sqrt[12]{a} =$

問 10 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^3} \div \sqrt{a}$

(2) $\sqrt[3]{ab^2} \div \sqrt[6]{a^5 b} \times \sqrt{a}$

## 4 指数関数とそのグラフ

（教科書 p.156）

$a > 0,\ a \neq 1$ のとき

$$y = a^x$$

で表される関数を，$a$ を（⑭　　　　　）とする（⑮　　　　　　　）という。

### 指数関数のグラフ

問 11 $x$ の値が $-\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}$ のときの $2^x$ の値を求めよ。

問 12 $y = 3^x$ のグラフをかけ。

問 13　$y=3^x$ のグラフをもとにして，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

## 指数関数の性質

（教科書 p.158）

指数関数 $y=a^x$ の性質をまとめると，次のようになる。

**1** 定義域は**実数全体**，値域は**正の実数全体**である。
**2** グラフは点 $(0,\ 1)$ および点 $(1,\ a)$ を通り，$x$ 軸が漸近線になる。
**3** $\boldsymbol{a>1}$ のとき，$x$ の値が増加すると $y$ の値も増加する。
　すなわち　$\boldsymbol{p<q \iff a^p<a^q}$
$\boldsymbol{0<a<1}$ のとき，$x$ の値が増加すると $y$ の値は減少する。
　すなわち　$\boldsymbol{p<q \iff a^p>a^q}$

$a>1$ のときの $y=a^x$ のように，$x$ の値が増加すると $y$ の値も増加する関数を（⑯　　　　　　）といい，$0<a<1$ のときの $y=a^x$ のように，$x$ の値が増加すると $y$ の値が減少する関数を（⑰　　　　　　）という。

**例題 1**　3 つの数 $2\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{32}$，$\sqrt[4]{32}$ の大小を比較せよ。

**解**

問 14　次の 3 つの数の大小を比較せよ。

（1）　$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{81}$，$\sqrt[7]{243}$

(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

## 指数関数を含む方程式・不等式

（教科書 p.159）

$a > 0$, $a \neq 1$ のとき，次のことが成り立つ。

（⑱　　　　　　　　　　　）

**例題 2**　方程式 $4^{2x} = 2^{x-6}$ を解け。

**解**

**問 15** 次の方程式を解け。

(1) $25^{1-x} = 5^x$

(2) $\frac{1}{49^{2x}} = 7^{6-x}$

**応用 例題 3**　方程式 $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ を解け。

**解**

問 16 次の方程式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 = 0$

(2) $2 \cdot 4^x + 4 = 9 \cdot 2^x$

応用例題 4 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}$

(2) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 1 > 0$

解

問 17 次の不等式を解け。

(1) $\left(\sqrt{7}\right)^x < 49^{3-2x}$

(2) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$

## 問 題

（教科書 p.161）

**1** 次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div 2^{-3} \times 3^5$

(2) $\frac{10^7 \times 10^{-3}}{10^{-2} \div 10^{-4}}$

**2** 次の式を簡単にせよ。

(1) $(a^3)^{-2} \div a^{-8}$

(2) $x^8 \div (x^{-2})^{-3} \times \left(\frac{1}{x}\right)^5$

**3** 次の計算をせよ。

(1) $\left(-\sqrt[4]{49}\right)^2$

(2) $\sqrt[5]{64} \div \sqrt[10]{4}$

(3) $\left\{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$

(4) $(2 \times 3^2)^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{4}{3}} \div \sqrt[3]{3}$

**4** 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}}$

(2) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$

(3) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

**5** $\left(\sqrt{2}\right)^6$，$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ の値を計算することにより，2 つの数 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ の大小を比較せよ。

**6** $y=2^x$ のグラフをもとにして，$y=2^{x-1}$ のグラフをかけ。

**7**　次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\sqrt[4]{27}$, $9^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{3^5}$

(2)　$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[9]{16}$

**8** 次の方程式を解け。

（1） $4^x = 2^x \cdot 8^{x+1}$

(2) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$

**9** 次の不等式を解け。

（1） $0.125 < 0.5^x < 1$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 2$

(3) $4^x + 2^{x+2} - 32 \geqq 0$

# 1 節 指数関数

## 1 指数法則

（教科書 p.150）

$m$, $n$ が正の整数のとき，数学Ⅰで学んだ次の（① 指数法則 ）が成り立つ。

**1** （② $a^m a^n = a^{m+n}$ ） **2** （③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ） **3** （④ $(ab)^n = a^n b^n$ ）

### $a^0$ と $a^{-n}$

（教科書 p.150）

指数が 0 または負の整数のときの累乗を次のように定める。

| **$a^0$, $a^{-n}$ の定義** |
|---|
| $a \neq 0$ で，$n$ が正の整数のとき<br>$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ |

**例 1** (1) $3^0 = 1$

(2) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

**問1** 次の値を求めよ。

(1) $5^{-1}$

$= \dfrac{1}{5^1} = \dfrac{1}{5}$

(2) $6^0$

$= 1$

(3) $10^{-2}$

$= \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

(4) $(-4)^{-3}$

$= \dfrac{1}{(-4)^3} = -\dfrac{1}{64}$

**問2** 次の式を $a^n$ の形で表せ。

(1) $\frac{1}{a}$

$= a^{-1}$

(2) 1

$= a^0$

(3) $\frac{1}{a^5}$

$= a^{-5}$

(4) $\frac{1}{a^{17}}$

$= a^{-17}$

### 指数法則

（教科書 p.151）

**例 2** $m = 3$, $n = -2$ のとき，前ページの指数法則**1**，**2**，**3**が成り立つことを確かめてみよう。

**1** $a^3 a^{-2} = a^3 \times \frac{1}{a^2} = a = a^{3+(-2)}$

**2** $(a^3)^{-2} = \frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{3\times(-2)}$

**3** $(ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2} = a^{-2}b^{-2}$

| 指数法則 1 |
|---|
| $a \neq 0$, $b \neq 0$ で，$m$, $n$ が整数のとき<br>**1** $a^m a^n = a^{m+n}$ **1**′ $a^m \div a^n = a^{m-n}$<br>**2** $(a^m)^n = a^{mn}$<br>**3** $(ab)^n = a^n b^n$ **3**′ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ |

**例 3** (1) $a^3 \times a^{-9} \div a^{-4} = a^{3+(-9)-(-4)} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

(2) $(a^2)^3 \times (ab^3)^{-2} = a^6 \times a^{-2} \times b^{-6} = a^4 b^{-6} = \frac{a^4}{b^6}$

問3　次の計算をせよ。

(1)　$a^{-2}a^{5}$

$= a^{-2+5}$

$= \boldsymbol{a^{3}}$

(2)　$x^{-7} \div (x^{-5} \times x^{2})$

$= x^{-7} \div x^{-5+2}$

$= x^{-7} \div x^{-3}$

$= x^{-7-(-3)}$

$= x^{-4} = \boldsymbol{\dfrac{1}{x^{4}}}$

(3)　$(a^{3}b^{-4})^{-2}$

$= (a^{3})^{-2}(b^{-4})^{-2}$

$= a^{3\times(-2)}b^{(-4)\times(-2)} = a^{-6}b^{8}$

$= \boldsymbol{\dfrac{b^{8}}{a^{6}}}$

(4)　$\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{3}}\right)^{-5}$

$= \dfrac{(x^{-2})^{-5}}{(y^{3})^{-5}} = \dfrac{x^{(-2)\times(-5)}}{y^{3\times(-5)}}$

$= \dfrac{x^{10}}{y^{-15}} = \boldsymbol{x^{10}y^{15}}$

## 2　累乗根

（教科書 p.152）

$a$ を実数とする。正の整数 $n$ に対して，$n$ 乗して $a$ になる数，
すなわち　（⑤　$\boldsymbol{x^{n} = a}$　）
を満たす数 $x$ を，$a$ の（⑥　$n$ 乗根　）という。平方根は 2 乗根である。

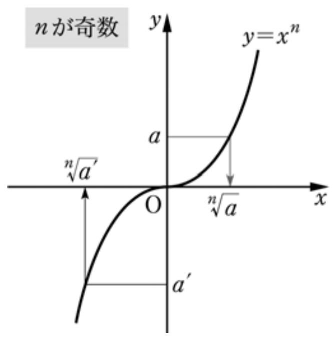
例4 (1)　$(-2)^{3}$ = （　$-8$　）であるから，$-2$ は（　$-8$ の 3 乗根　）

(2)　$(-2)^{4}$ = （　16　），$2^{4}$ = （　16　）であるから，
$-2$，2 は（　16 の 4 乗根　）

この章では，$n$ 乗根は実数の範囲で考えるものとする。このとき，実数 $a$ の $n$ 乗根について，次のことがいえる。

(i)　**$n$ が奇数のとき**

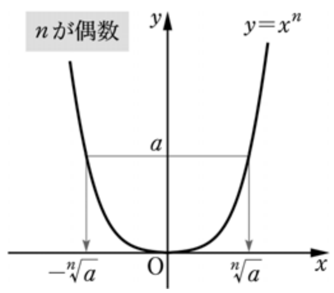
$a$ の $n$ 乗根は $a$ の正負に関係なく，ただ 1 つ存在する。
それを（⑦　$\sqrt[n]{a}$　）と表す。$\sqrt[n]{a}$ と $a$ の正負は同じである。




例5 $(-2)^{5}$ = （　$-32$　）であるから
$\sqrt[5]{-32} = -2$

(ii)　**$n$ が偶数のとき**

$a > 0$ のとき，$a$ の $n$ 乗根は正と負の 2 つが存在する。そのうち正の方を（⑧　$\sqrt[n]{a}$　），負の方を（⑨　$-\sqrt[n]{a}$　）と表す。




例6 $3^{4}$ = （　81　），$(-3)^{4}$ = （　81　）であるから
$\sqrt[4]{81}$ = （　3　），$-\sqrt[4]{81}$ = （　$-3$　）

注意　$\sqrt[2]{a}$ をこれまで通り $\sqrt{a}$ と書く。また，$n$ が奇数，偶数のいずれであっても（⑩　$\sqrt[n]{0} = 0$　）である。

問4　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{125}$

$5^3 = 125$ より　　$\sqrt[3]{125} = \mathbf{5}$

(2)　$\sqrt[3]{-125}$

$(-5)^3 = -125$ より　　$\sqrt[3]{-125} = \mathbf{-5}$

(3)　$\sqrt[4]{256}$

$4^4 = 256$ より　　$\sqrt[4]{256} = \mathbf{4}$

(4)　$\sqrt[5]{-243}$

$(-3)^5 = -243$ より　　$\sqrt[5]{-243} = \mathbf{-3}$

## 累乗根の性質

（教科書 p.153）

2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて（⑪　　累乗根　　）という。

$a>0$ で，$n$ が正の整数のとき，$\sqrt[n]{a}$ は $a$ のただ 1 つの正の $n$ 乗根である。すなわち

$a>0$ のとき　　（⑫　　$(\sqrt[n]{a})^n = a$　　），（⑬　　$\sqrt[n]{a} > 0$　　）

さらに，累乗根について次の性質が成り立つ。

**累乗根の性質**

$a>0$，$b>0$ で，$m$，$n$，$p$ が正の整数のとき

**1**　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　　**2**　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

**3**　$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　　**4**　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

**5**　$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

証明　**1**　左辺を $n$ 乗すると　　$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$

ここで，$\sqrt[n]{a}>0$，$\sqrt[n]{b}>0$ であるから　　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$

よって，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は $ab$ の正の $n$ 乗根である。

すなわち　　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

問5　前のページの証明にならって，**3**，**4**を証明せよ。

**3**:左辺を $n$ 乗すると

$$\left\{(\sqrt[n]{a})^m\right\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \left\{(\sqrt[n]{a})^n\right\}^m = a^m$$

ここで，$(\sqrt[n]{a})^m > 0$ であるから，$(\sqrt[n]{a})^m$ は $a^m$ の正の $n$ 乗根である。

すなわち　　$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

**4**:左辺を $mn$ 乗すると

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right\}^n$$
$$= (\sqrt[n]{a})^n$$
$$= a$$

ここで，$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} > 0$ であるから，$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ は $a$ の正の $mn$ 乗根である。

すなわち　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

例 7　(1)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4\times16} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(2)　$\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{10}{2}} = \sqrt[6]{5}$

(3)　$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8\times5} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{49}} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7}$

問6　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[4]{400}\times\sqrt[4]{25}$

$= \sqrt[4]{400\times25}$

$= \sqrt[4]{10000} = \sqrt[4]{10^4} = \mathbf{10}$

(2)　$\sqrt[4]{400}\div\sqrt[4]{25}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{400}{25}}$

$= \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \mathbf{2}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt{216}}$

$= \sqrt[6]{216} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$

(4) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^5 \div \sqrt[3]{64}$

$= \sqrt[3]{4^5} \div \sqrt[3]{64}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{4^5}{64}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4}$

$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

## 3 指数の拡張

(教科書 p.154)

| 有理数を指数とする累乗 |
|---|
| $a > 0$ で，$m$, $n$ が正の整数のとき $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ |

例 8 (1) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(2) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(2^4)^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(2^3)^4}} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問7 次の値を求めよ。

(1) $16^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(2) $27^{\frac{4}{3}}$

$= \sqrt[3]{27^4} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$

(3) $36^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{6}$

(4) $125^{-\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{125}\right)^2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

問8 次の値を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(1) $\sqrt[5]{a}$

$= a^{\frac{1}{5}}$

(2) $\sqrt[3]{a^5}$

$= a^{\frac{5}{3}}$

(3) $\sqrt{a^{-3}}$

$= a^{-\frac{3}{2}}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^7}}$

$= \dfrac{1}{a^{\frac{7}{3}}} = a^{-\frac{7}{3}}$

一般に，有理数を指数とする累乗についても，指数法則が成り立つ。

**指数法則 2**

$a > 0$，$b > 0$ で，$p$，$q$ が有理数のとき

$\boxed{1}$ $a^p a^q = a^{p+q}$ 　 $\boxed{1}'$ $a^p \div a^q = a^{p-q}$

$\boxed{2}$ $(a^p)^q = a^{pq}$

$\boxed{3}$ $(ab)^p = a^p b^p$ 　 $\boxed{3}'$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

例9 (1) $24^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2 \times 3 = 6$

(2) $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a^3} \div \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} \div a^{\frac{1}{12}}$

$= a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}} = a^1$

$= a$

問9 次の計算をせよ。

(1) $7^{\frac{1}{2}} \div 7^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{2}{3}}$

$= 7^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}} = 7^1 = 7$

(2) $\left(16^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$= 16^{\frac{1}{6}\times\left(-\frac{3}{2}\right)} = 16^{-\frac{1}{4}}$

$= (2^4)^{-\frac{1}{4}} = 2^{4\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \times 27^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{3}{2}}$

$= 5^{\frac{5}{2}} \times 3^{-\frac{5}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} \div 5^{\frac{3}{2}}$

$= 3^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}$

$= 3^{-1} \times 5^1 = \dfrac{5}{3}$

問 10 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a^3}\div\sqrt{a}$

$=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{3}{8}}\div a^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{8}}$

$=\boldsymbol{\sqrt[8]{a}}$

(2) $\sqrt[3]{ab^2}\div\sqrt[6]{a^5b}\times\sqrt{a}$

$=(ab^2)^{\frac{1}{3}}\div(a^5b)^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{1}{2}}$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)\div\left(a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\right)\times a^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}\times b^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$

$=a^0\times b^{\frac{1}{2}}$

$=\boldsymbol{\sqrt{b}}$

## 4 指数関数とそのグラフ

（教科書 p.156）

$a>0,\ a\neq 1$ のとき

$y=a^x$

で表される関数を，$a$ を（⑭　底　）とする（⑮　指数関数　）という。

### 指数関数のグラフ

問 11 $x$ の値が $-\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}$ のときの $2^x$ の値を求めよ。

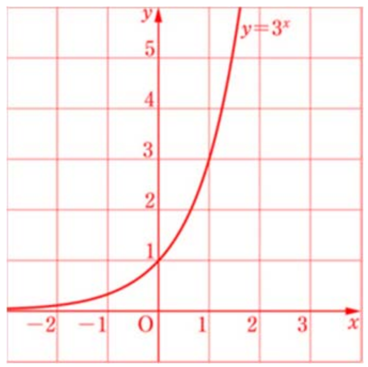
$2^{-\frac{5}{2}}=2^{-3}\times 2^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\fallingdotseq \mathbf{0.18}$

$2^{\frac{5}{2}}=2^2\times 2^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}\fallingdotseq \mathbf{5.66}$

問 12 $y=3^x$ のグラフをかけ。

| $x$ | … | $-2$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=3^x$ | … | 0.11 | 0.19 | 0.33 | 0.58 | 1 | 1.73 | 3 | 5.20 | 9 | … |

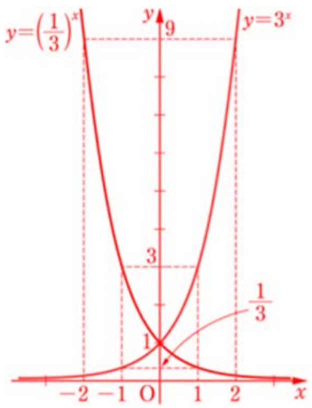
よって，$y=3^x$ のグラフは次の図のようになる。



**問 13** $y=3^x$ のグラフをもとにして，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフは $y=3^x$ のグラフと $y$軸に関して対称である。

よって，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフは次の図のようになる。




## 指数関数の性質

（教科書 p.158）

指数関数 $y=a^x$ の性質をまとめると，次のようになる。

> **1** 定義域は**実数全体**，値域は**正の実数全体**である。
> **2** グラフは点 $(0,\ 1)$ および点 $(1,\ a)$ を通り，$x$ 軸が漸近線になる。
> **3** $\boldsymbol{a>1}$ のとき，$x$ の値が増加すると $y$ の値も増加する。
> すなわち　$\boldsymbol{p<q \iff a^p<a^q}$
> $\boldsymbol{0<a<1}$ のとき，$x$ の値が増加すると $y$ の値は減少する。
> すなわち　$\boldsymbol{p<q \iff a^p>a^q}$

$a>1$ のときの $y=a^x$ のように，$x$ の値が増加すると $y$ の値も増加する関数を（⑯　増加関数　）といい，$0<a<1$ のときの $y=a^x$ のように，$x$ の値が増加すると $y$ の値が減少する関数を（⑰　減少関数　）という。

**例題 1** 3 つの数 $2\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{32}$，$\sqrt[4]{32}$ の大小を比較せよ。

**解** 3 つの数を $2^p$ の形に表すと

$$2\sqrt{2}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$$

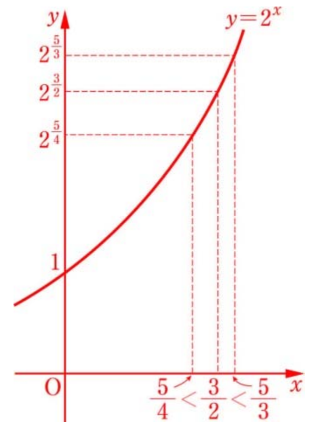
$$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$$

ここで，$y=2^x$ の底 2 は 1 より大きく，$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$ であるから

$$2^{\frac{5}{4}}<2^{\frac{3}{2}}<2^{\frac{5}{3}}$$

すなわち　$\sqrt[4]{32}<2\sqrt{2}<\sqrt[3]{32}$




**問 14** 次の 3 つの数の大小を比較せよ。

(1)　$\sqrt[3]{9}$，$\sqrt[5]{81}$，$\sqrt[7]{243}$

$$\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[5]{81}=3^{\frac{4}{5}}$$

$$\sqrt[7]{243}=3^{\frac{5}{7}}$$

$y=3^x$ の底 3 は 1 より大きく

$$\frac{2}{3}<\frac{5}{7}<\frac{4}{5}$$

であるから

$$3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{5}{7}}<3^{\frac{4}{5}}$$

すなわち　$\boldsymbol{\sqrt[3]{9}<\sqrt[7]{243}<\sqrt[5]{81}}$

(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{\frac{1}{8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ の底 $\frac{1}{2}$ は $0$ より大きく $1$ より小さい。また

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

であるから

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

すなわち　$\sqrt[4]{\frac{1}{8}}<\sqrt[3]{\frac{1}{4}}<\sqrt{\frac{1}{2}}$

## 指数関数を含む方程式・不等式

（教科書 p.159）

$a>0$, $a\neq 1$ のとき，次のことが成り立つ。

（⑱　$a^p=a^q \iff p=q$　）

**例題 2**　方程式 $4^{2x}=2^{x-6}$ を解け。

**解**　$4^{2x}=(2^2)^{2x}=2^{4x}$ であるから

$2^{4x}=2^{x-6}$

◀両辺の底をそろえる

よって　$4x=x-6$

ゆえに　$x=-2$

**問 15**　次の方程式を解け。

(1)　$25^{1-x}=5^x$

$25^{1-x}=5^{2(1-x)}$ であるから

$5^{2(1-x)}=5^x$

よって　$2(1-x)=x$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\frac{2}{3}}$

(2)　$\frac{1}{49^{2x}}=7^{6-x}$

$\frac{1}{49^{2x}}=(7^2)^{-2x}$ であるから

$(7^2)^{-2x}=7^{6-x}$

$7^{-4x}=7^{6-x}$

よって　$-4x=6-x$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-2}$

**応用 例題 3**　方程式 $9^x-3=2\cdot 3^x$ を解け。

**解**　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$ であるから　$(3^x)^2-3=2\cdot 3^x$

ここで，$3^x=t$ とおくと，$t>0$ であって

◀指数関数 $t=3^x$ の値域は正の実数全体

$t^2-3=2t$

$t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t>0$ より　$t=3$

すなわち　$3^x=3$

ゆえに　$x=1$

**問 16** 次の方程式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{9}\right)^x + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 = 0$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$$

ここで，$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$
$$(t+3)(t-1) = 0$$

$t > 0$ より　　$t = 1$

すなわち　　$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$

ゆえに　　$\boldsymbol{x = 0}$

(2) $2\cdot 4^x + 4 = 9\cdot 2^x$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

ここで，$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$$2t^2 + 4 = 9t$$
$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$
$$(t-4)(2t-1) = 0$$

$t > 0$ より　　$t = \frac{1}{2}$，$4$

すなわち　　$2^x = \frac{1}{2}$，$4$

ゆえに　　$\boldsymbol{x = -1，2}$

**応用例題 4** 次の不等式を解け。

(1) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}$　　(2) $4^{x+1} - 5\cdot 2^x + 1 > 0$

**解** (1) $\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ であるから，与えられた不等式は

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{5}\right)^{2(x-1)}$$

底 $\frac{1}{5}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

◀ $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ は減少関数

$$x \geqq 2(x-1)$$

ゆえに　　$x \leqq 2$

(2) $4^{x+1} = 4\cdot 4^x = 4\cdot(2^2)^x = 4\cdot 2^{2x} = 4\cdot(2^x)^2$

であるから，与えられた不等式は

$$4\cdot(2^x)^2 - 5\cdot 2^x + 1 > 0$$

ここで，$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$$4t^2 - 5t + 1 > 0$$
$$(4t-1)(t-1) > 0$$
$$t < \frac{1}{4},\quad 1 < t$$

$t > 0$ であるから　　$0 < t < \frac{1}{4}$，　$1 < t$

すなわち　　$0 < 2^x < 2^{-2}$，　$2^0 < 2^x$

底 2 は 1 より大きいから

◀ $t = 2^x$ は増加関数

$$x < -2,\quad 0 < x$$

問 17 次の不等式を解け。

(1)　$\left(\sqrt{7}\right)^x < 49^{3-2x}$

$\left(\sqrt{7}\right)^x = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^x = 7^{\frac{x}{2}}$,

$49^{3-2x} = 7^{2(3-2x)}$ であるから，与えられた不等式は

$$7^{\frac{x}{2}} < 7^{2(3-2x)}$$

底 7 は 1 より大きいから

$$\frac{x}{2} < 2(3-2x)$$

$$x < 12 - 8x$$

すなわち　　$\boldsymbol{x < \frac{4}{3}}$

(2)　$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ であるから，与えられた不等式は

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$$

ここで，$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$$t^2 - 4t + 3 > 0$$

$$(t-1)(t-3) > 0$$

$$t < 1,\ 3 < t$$

$t > 0$ であるから

$$0 < t < 1,\ 3 < t$$

すなわち

$$0 < 3^x < 3^0,\ 3^1 < 3^x$$

底 3 は 1 より大きいから

$$\boldsymbol{x < 0,\ 1 < x}$$

## 問 題

（教科書 p.161）

**1** 次の計算をせよ。

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div 2^{-3} \times 3^5$

$= 2^4 \times 3^{-4} \div 2^{-3} \times 3^5$

$= 2^{4-(-3)} \times 3^{-4+5}$

$= 2^7 \times 3 = \mathbf{384}$

(2) $\frac{10^7 \times 10^{-3}}{10^{-2} \div 10^{-4}}$

$= \frac{10^{7+(-3)}}{10^{-2-(-4)}} = \frac{10^4}{10^2}$

$= 10^{4-2} = 10^2 = \mathbf{100}$

**2** 次の式を簡単にせよ。

(1) $(a^3)^{-2} \div a^{-8}$

$= a^{3\times(-2)-(-8)} = \boldsymbol{a^2}$

(2) $x^8 \div (x^{-2})^{-3} \times \left(\frac{1}{x}\right)^5$

$= x^8 \div x^6 \times x^{-5}$

$= x^{8-6+(-5)} = x^{-3} = \boldsymbol{\frac{1}{x^3}}$

**3** 次の計算をせよ。

(1) $\left(-\sqrt[4]{49}\right)^2$

$= \left(-7^{\frac{2}{4}}\right)^2 = \mathbf{7}$

(2) $\sqrt[5]{64} \div \sqrt[10]{4}$

$= 64^{\frac{1}{5}} \div 4^{\frac{1}{10}}$

$= (4^3)^{\frac{1}{5}} \div 4^{\frac{1}{10}} = 4^{\frac{3}{5}} \div 4^{\frac{1}{10}}$

$= 4^{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

(3) $\left\{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$

$= \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{16}{9}} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(4) $(2 \times 3^2)^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{4}{3}} \div \sqrt[3]{3}$

$= 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \div 2^{-\frac{4}{3}} \div 3^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)} \times 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^2 \times 3^1 = \mathbf{12}$

**4** 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}}$

$= a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{11}{12}}$

$= a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{11}{12}} = a^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{a}}$

(2) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \boldsymbol{a - b}$

(3) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \boldsymbol{a - b}$

**5** $\left(\sqrt{2}\right)^6$, $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ の値を計算することにより，2 つの数 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ の大小を比較せよ。

$\left(\sqrt{2}\right)^6 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8$

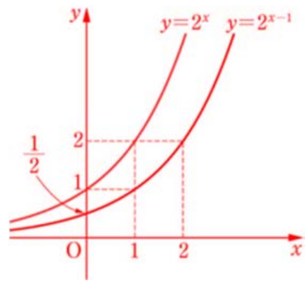
$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9$

$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ はともに正で，$8 < 9$ より

$\boldsymbol{\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}}$

**6** $y = 2^x$ のグラフをもとにして，$y = 2^{x-1}$ のグラフをかけ。

$y = 2^{x-1}$ のグラフは $y = 2^x$ のグラフを $x$ 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，次の図のようになる。



**7** 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1) $\sqrt[4]{27},\ 9^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[6]{3^5}$

$\sqrt[4]{27} = 3^{\frac{3}{4}}$

$9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[6]{3^5} = 3^{\frac{5}{6}}$

$y = 3^x$ の底 3 は 1 より大きく

$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

であるから

$3^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{5}{6}}$

すなわち　$\mathbf{9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27} < \sqrt[6]{3^5}}$

(2) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[5]{4},\ \sqrt[8]{8},\ \sqrt[9]{16}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[5]{4} = 2^{\frac{2}{5}}$

$\sqrt[8]{8} = 2^{\frac{3}{8}}$

$\sqrt[9]{16} = 2^{\frac{4}{9}}$

$y = 2^x$ の底 2 は 1 より大きく

$\frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$

であるから

$2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{3}{8}} < 2^{\frac{2}{5}} < 2^{\frac{4}{9}} < 2^{\frac{1}{2}}$

すなわち

$\mathbf{\sqrt[3]{2} < \sqrt[8]{8} < \sqrt[5]{4} < \sqrt[9]{16} < \sqrt{2}}$

**8** 次の方程式を解け。

(1) $4^x = 2^x \cdot 8^{x+1}$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

$2^x \cdot 8^{x+1} = 2^x \cdot (2^3)^{x+1} = 2^x \cdot 2^{3(x+1)}$

$= 2^{x+3(x+1)} = 2^{4x+3}$

よって　$2^{2x} = 2^{4x+3}$

すなわち　$2x = 4x + 3$

したがって　$\boldsymbol{x = -\frac{3}{2}}$

(2) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$

$3^{2x+1} = 3^{2x} \cdot 3 = 3 \cdot (3^x)^2$

であるから，$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$(t+1)(3t-1) = 0$

$t > 0$ であるから　$t = \frac{1}{3}$

すなわち　$3^x = \frac{1}{3}$

したがって　$\boldsymbol{x = -1}$

**9** 次の不等式を解け。

(1) $0.125 < 0.5^x < 1$

$0.125 = (0.5)^3$，$1 = (0.5)^0$

であるから，与えられた不等式は

$(0.5)^3 < 0.5^x < (0.5)^0$

底 0.5 は 0 より大きく 1 より小さいから

$3 > x > 0$

すなわち　$\boldsymbol{0 < x < 3}$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 2$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2$

であるから，与えられた不等式は

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 2$

ここで，$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$t^2 - t \leqq 2$

$t^2 - t - 2 \leqq 0$

$(t+1)(t-2) \leqq 0$

$t > 0$ であるから

$0 < t \leqq 2$

すなわち　$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 2$

$0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

底 $\frac{1}{2}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$\boldsymbol{x \geqq -1}$

(3) $4^x + 2^{x+2} - 32 \geqq 0$

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

$2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$

であるから，与えられた不等式は

$(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 32 \geqq 0$

ここで，$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$t^2 + 4t - 32 \geqq 0$

$(t+8)(t-4) \geqq 0$

$t > 0$ であるから　$t \geqq 4$

すなわち　$2^x \geqq 2^2$

底 2 は 1 より大きいから

$\boldsymbol{x \geqq 2}$