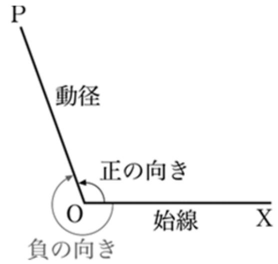
1 節 三角関数

1 一般角　（教科書 p.110）

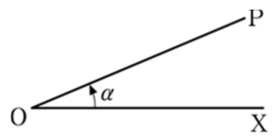
平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させることを考える。このとき，半直線 OP を（①　　　　　）といい，動径の始めの位置を示す半直線 OX を（②　　　　　）という。



動径の回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを（③　　　　　），時計の針の回転と同じ向きを（④　　　　　）という。また，OPを OX から正の向きに回転したときの角を（⑤　　　　　），負の向きに回転したときの角を（⑥　　　　　）という。

負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を（⑦　　　　　）という。

また，α を一般角として，始線 OX の位置から点 O のまわりに α だけ回転した動径を，（⑧　　　　　）という。



問1 OX を始線として，次の角の動径 OP を図示せよ。

（1）　$240°$　　　（2）　$-60°$

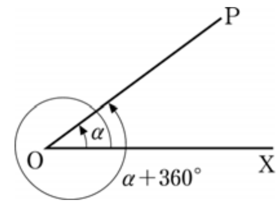
（3）　$765°$　　　（4）　$-570°$

角αの動径をOPとすると，右の図からわかるように

$\alpha+360°$，$\alpha+360°\times 2$，$\alpha+360°\times 3$，$\cdots$

$\alpha-360°$，$\alpha-360°\times 2$，$\alpha-360°\times 3$，$\cdots$

などの角の動径も角αの動径と一致する。



これらの角を（⑨　　　　　）という。

すなわち，動径 OP の表す一般角 θ は，次のように表される。

（⑩　　　　　）　（n は整数）

例 1 $420°$ の動径が表す一般角 θ は　$\theta=$　　　　　（n は整数）

問2 次の角の動径が表す一般角を $\alpha+360°\times n$（n は整数）の形で表せ。ただし，$0°\leqq\alpha<360°$ とする。

（1）　$500°$

（2）　$1000°$

（3）　$-290°$

（4）　$-830°$

弧度法

（教科書 p.111）

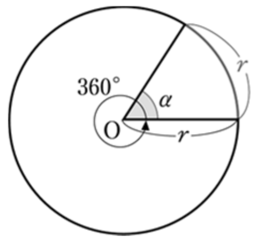
角の大きさを表すのに，これまでは直角の$\frac{1}{90}$を単位とする“度”を用いてきた。これに対して，１つの円において

半径と同じ長さの弧に対する中心角

をとり，これを単位とする角の表し方がある。

この中心角をαとし，その大きさを“度”で表してみよう。

１つの円において，弧の長さは中心角に比例するから，円の半径をrとすると



$r:2\pi r=\alpha:360°$

よって　$\alpha=\frac{180°}{\pi}\fallingdotseq 57.2958°$

このαは円の半径に関係しない一定の角である。

この角を（⑪　　　　　）または（⑫　　　　　）といい，これを単位とする角の表し方を（⑬　　　　　）という。

（⑭　　　　　）

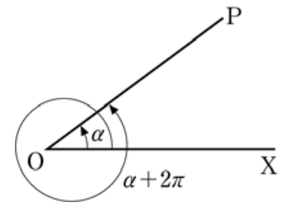
注意　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

問3　120°，150°，−270°，405°，1° を弧度法で表せ。

問4　弧度法による角$\frac{\pi}{5}$，$\frac{3}{4}\pi$，$-\frac{5}{2}\pi$，-3πを度で表せ。

弧度法を用いると，角αの動径が表す一般角θは

（⑮　　　　　）　（nは整数）と表される。



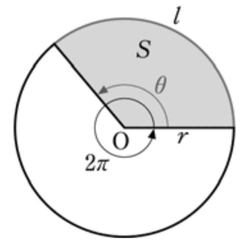
扇形の弧の長さと面積

（教科書 p.112）

半径r，中心角θの扇形の弧の長さをl，面積をSとする。１つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから

$l:2\pi r=\theta:2\pi$，$S:\pi r^2=\theta:2\pi$

ゆえに　（⑯　　　　　）



例２　半径 3，中心角$\frac{\pi}{6}$の扇形の弧の長さlと面積Sを求めてみよう。

$l=$

$S=$

問5　半径 6，中心角$\frac{3}{4}\pi$の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

2 三角関数

（教科書 p.113）

三角関数の定義
$\sin\theta=\dfrac{y}{r},\quad \cos\theta=\dfrac{x}{r},\quad \tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の（⑰　　　　　　）という。

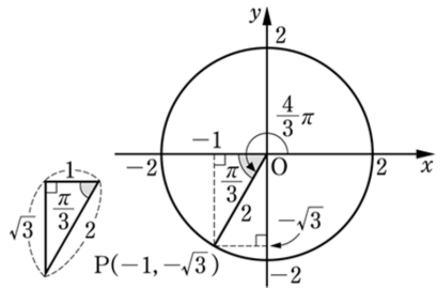
注意　$\tan\theta$ は $x=0$ となるような θ に対しては定義されない。

例 3 右の図で，$\theta=\frac{4}{3}\pi$ のとき，$\mathrm{OP}=2$ とすると，$\mathrm{P}(-1,\ -\sqrt{3})$ であるから

$\sin\frac{4}{3}\pi=$

$\cos\dfrac{4}{3}\pi=$

$\tan\dfrac{4}{3}\pi=$



問6 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\frac{5}{4}\pi$

(2)　$\frac{11}{6}\pi$

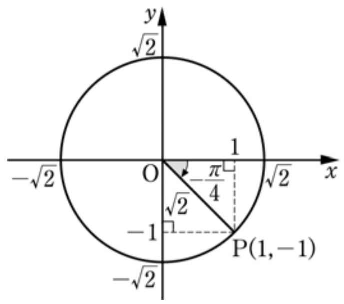
(3)　3π

例 4 右の図で，$\theta = -\frac{\pi}{4}$ のとき，$\mathrm{OP} = \sqrt{2}$ とすると，$\mathrm{P}(1,\ -1)$ であるから

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$



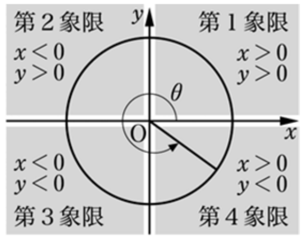
問7 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$-\frac{\pi}{6}$

(2)　$-\frac{2}{3}\pi$

(3)　$-\frac{5}{4}\pi$

例4のように，角 θ の動径が第4象限にあるとき，θ を
（⑱　　　　　　　　　　）という。



問8 次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

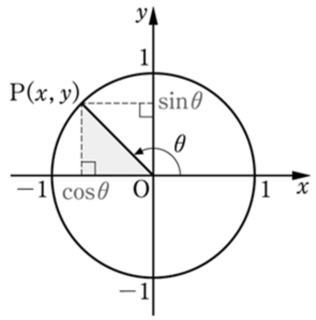
（1） $\sin\theta < 0$，$\cos\theta > 0$

（2） $\tan\theta < 0$，$\cos\theta < 0$

三角関数と単位円

（教科書 p.115）

原点を中心とする半径1の円を（⑲　　　　　　　）という。



右の図のように，単位円と角 θ の動径の交点をP$(x,\ y)$とすると，三角関数の定義で $r=1$ として

$$\cos\theta = x,\quad \sin\theta = y$$

が成り立つ。すなわち，Pの座標は

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

点Pは単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

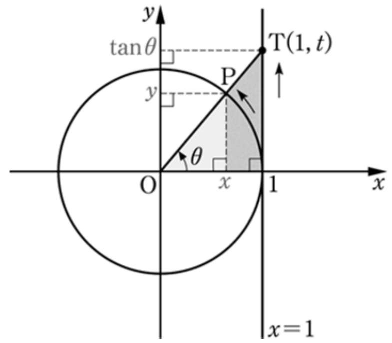
（⑳　　　　　　　　　　　　　　　　）　◀ $-1 \leqq y \leqq 1$，$-1 \leqq x \leqq 1$

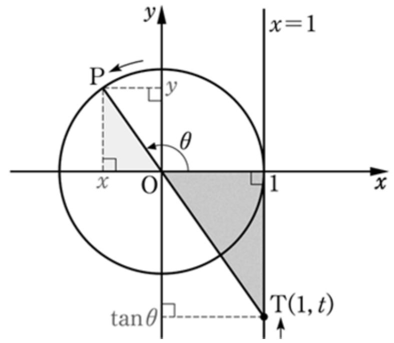
また，下の図の単位円において，直線OPと直線 $x=1$ の交点をT$(1, t)$とすると，2つの直角三角形が相似であることから

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

である。すなわち，Tの座標は　T$(1, \tan\theta)$

点Tは直線 $x=1$ 上をすべて動くことができるから，$\tan\theta$ は（㉑　　　　　　　　　）をとる。





3 三角関数の性質

三角関数の相互関係

（教科書 p.116）

三角関数についても，三角比と同様に次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係

$\boxed{1}$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\boxed{2}$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　$\boxed{3}$ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

問9 上の公式$\boxed{3}$を，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を用いて証明せよ。

例題 1 θ が第3象限の角で，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解

問10 θ が第4象限の角で，$\sin\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

問11 θ が第2象限の角で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

例題 2 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$の値を求めよ。

解

問 12 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$の値を求めよ。

例題 3 等式$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$を証明せよ。

証明

問 13 次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\frac{1}{\cos^2\theta}$

(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

三角関数の性質

（教科書 p.118）

n を整数とするとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径と同じ位置にあるから，次の公式が成り立つ。

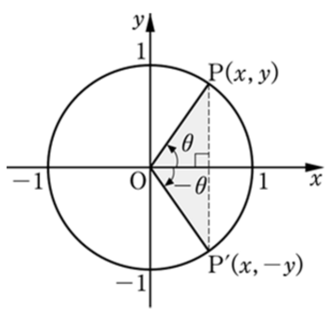
$\theta+2n\pi$ の三角関数

1
$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \qquad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \qquad \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$$

例 5 $\cos\frac{14}{3}\pi=$

問 14 $\sin\frac{27}{4}\pi$，$\cos\frac{27}{4}\pi$，$\tan\frac{27}{4}\pi$ の値を求めよ。

角 $-\theta$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称の位置にあるから，次の公式が成り立つ。



$-\theta$ の三角関数

2
$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta \qquad \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

例 6 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$

問 15 $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$，$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$，$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ の値を求めよ。

$\theta+\frac{\pi}{2}$，$\theta+\pi$ の三角関数

3
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta \qquad \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

4
$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta \qquad \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta \qquad \tan(\theta+\pi)=\tan\theta$$

例 7 $\sin\frac{5}{12}\pi=a$ とおくとき，$\cos\frac{11}{12}\pi$ の値を a を用いて表してみよう。

$$\cos\frac{11}{12}\pi=$$

問 16 $\cos\frac{\pi}{8}=a$ とおくとき，次の値を a を用いて表せ。

(1) $\sin\frac{5}{8}\pi$

(2) $\cos\frac{9}{8}\pi$

(3) $\sin\frac{13}{8}\pi$

さらに，次の公式が成り立つ。

$\boxed{5}$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{6}$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

問 17 公式 $\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の θ を $-\theta$ で置き換えることにより，前の公式を確かめよ。

4 三角関数のグラフ

$y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$ のグラフ
（教科書 p.120）

$y=\sin\theta$ や $y=\cos\theta$ のグラフの形の曲線を（㉒　　　　　　　　）という。

$y=\tan\theta$ のグラフ
（教科書 p.121）

グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの（㉓　　　　　　　）という。

周期関数
（教科書 p.122）

一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

（㉔　　　　　　　　　　　　）

がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする（㉕　　　　　　　）という。

p が $f(x)$ の周期であるとき，$2p$, $3p$, $-p$ なども $f(x)$ の周期となるから，$f(x)$ の周期は無数にある。しかし，ふつうは正の周期のうちで最小のものを $f(x)$ の（㉖　　　　　　）という。

偶関数・奇関数とそのグラフ
（教科書 p.122）

一般に，関数 $f(x)$ において

（㉗　　　　　　　　　　）が成り立つとき，$f(x)$ を（㉘　　　　　　）

（㉙　　　　　　　　　　）が成り立つとき，$f(x)$ を（㉚　　　　　　）

という。$y=\cos\theta$ は偶関数，$y=\sin\theta$ は奇関数である。

例 8 関数 $f(\theta)=\tan\theta$ において

$f(-\theta)=$

関数 $g(x)=x^2$ において

$g(-x)=$

よって，$f(\theta)=\tan\theta$ は（　　　　　　），$g(x)=x^2$ は（　　　　　　）である。

問 18 関数 $f(x)=2x$ は偶関数であるか，奇関数であるか調べよ。

いろいろな三角関数のグラフ
（教科書 p.123）

例 9 関数 $y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを（　　　　）軸方向に（　　　　　　　）したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく（　　　　）である。

問 19 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

（1） $y=2\cos\theta$

(2) $y=\frac{1}{2}\sin\theta$

例10 関数 $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを（　　　　　）軸方向に
（　　　　　　　　　　　　）したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく（　　　　　　）である。

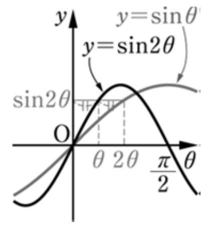
問20 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(2)　$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

例11 関数 $y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			



上の表からもわかるように，$y=\sin 2\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを（　　　　　　）軸方向に（　　　　　　　　　）したものである。
したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $\sin\theta$ の周期の（　　　　　）に等しく，
（　　　　　　　　）である。

問 21 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos 2\theta$

(2)　$y=\tan\frac{\theta}{3}$

例題 4

関数 $y=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

解

問 22 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

（1） $y=\sin\left(2\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

(2) $y=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

5 三角関数の応用

三角関数を含む方程式

（教科書 p.126）

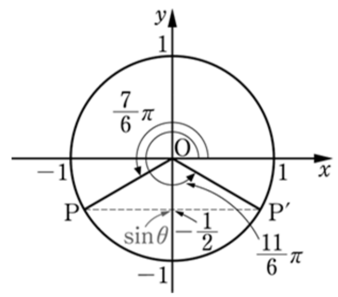
例 12 方程式 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めてみよう。

単位円の周上で，y 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，右の図のP，P′ の 2 点であり，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$\theta=$

$\sin\theta$ の周期は 2π であるから

$\theta=$ （n は整数）



問 23 次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

（1） $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑵　$2\cos\theta = 1$

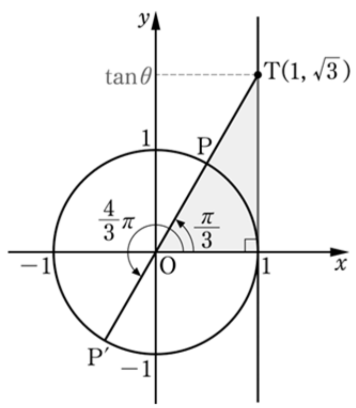
例 13 方程式 $\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ の値を求めてみよう。

$\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を右の図のように P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$\theta =$

$\tan\theta$の周期は π であるから

$\theta =$　　　　　（n は整数)



問 24 次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

⑴　$\tan\theta = 1$

⑵　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

例題 5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たす θ の値を求めよ。

解

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

三角関数を含む不等式

（教科書 p.128）

例題 6　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

解

問 26 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta > \frac{1}{2}$

(2)　$\cos\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

問 27 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta > \frac{1}{2}$

(2)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$2\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$

例題 7　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta > 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。。

解

問 28 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\tan\theta > \sqrt{3}$

(2)　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 \leqq 0$

問 29　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3} < \tan\theta < 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

三角関数を含む関数の最大・最小

（教科書 p.130）

応用 例題 8

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y = \sin^2\theta + \sin\theta$$

考え方

解

問 30 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$$

問 題

（教科書 p.131）

1 θ は第 3 象限の角で，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ であるとき，次の式の値を求めよ。

（1） $\sin\theta+\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

2 $\sin\frac{5}{8}\pi=a$，$\cos\frac{5}{8}\pi=b$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ。

（1） $\sin\frac{9}{8}\pi$

(2) $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$

(3) $\tan\frac{17}{8}\pi$

3 次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

(2) $\cos\theta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=0$

4 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=-\tan\theta$

(2) $y=4\sin\frac{\theta}{2}$

(3) $y=\cos 3\theta+1$

5　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

（1）　$\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

⑵　$2\sin 2\theta = \sqrt{3}$

⑶　$\tan\frac{\theta}{2} + 1 = 0$

6　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta < \frac{1}{2}$

(2)　$4\sin^2\theta - 1 > 0$

⑶　$3\tan^2\theta \leqq 1$

7　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

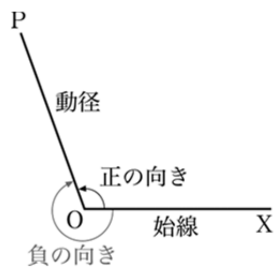
$$y = \cos^2\theta + \sin\theta$$

1 節 三角関数

1 一般角

（教科書 p.110）

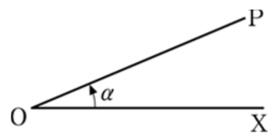
平面上で，点 O を中心として半直線 OP を回転させることを考える。このとき，半直線 OP を（① 動径 ）といい，動径の始めの位置を示す半直線 OX を（② 始線 ）という。



動径の回転には 2 つの向きがある。時計の回転と逆の向きを（③ 正の向き ），時計の針の回転と同じ向きを（④ 負の向き ）という。また，OPを OX から正の向きに回転したときの角を（⑤ 正の角 ），負の向きに回転したときの角を（⑥ 負の角 ）という。

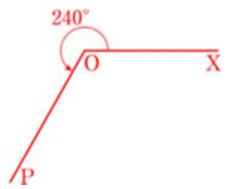
負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を（⑦ 一般角 ）という。

また，α を一般角として，始線 OX の位置から点 O のまわりに α だけ回転した動径を，（⑧ 角 α の動径 ）という。

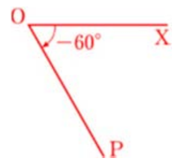


問1 OX を始線として，次の角の動径 OP を図示せよ。

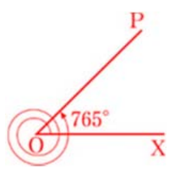
（1） 240°



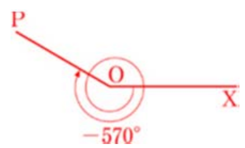
（2） −60°



（3） 765°



（4） −570°

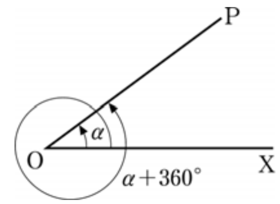


角αの動径をOPとすると，右の図からわかるように

$\alpha + 360°$，$\alpha + 360° \times 2$，$\alpha + 360° \times 3$，…

$\alpha - 360°$，$\alpha - 360° \times 2$，$\alpha - 360° \times 3$，…

などの角の動径も角αの動径と一致する。



これらの角を（⑨ 動径OPの表す角 ）という。

すなわち，動径 OP の表す一般角 θ は，次のように表される。

（⑩ $\theta = \alpha + 360° \times n$ ） （n は整数）

例 1 420° の動径が表す一般角 θ は　$\theta =$ 　$60° + 360° \times n$　（n は整数）

問2 次の角の動径が表す一般角を $\alpha + 360° \times n$（n は整数）の形で表せ。ただし，$0° \leqq \alpha < 360°$ とする。

（1） 500°

$500° = 140° + 360°$ より，500° の動径が表す一般角 θ は

$\boldsymbol{\theta = 140° + 360° \times n}$ **（n は整数）**

（2） 1000°

$1000° = 280° + 360° \times 2$ より，1000°の動径が表す一般角 θ は

$\boldsymbol{\theta = 280° + 360° \times n}$ **（n は整数）**

（3） −290°

$-290° = 70° - 360°$ より，−290° の動径が表す一般角 θ は

$\boldsymbol{\theta = 70° + 360° \times n}$ **（n は整数）**

（4） −830°

$-830° = 250° - 360° \times 3$ より，−830° の動径が表す一般角 θ は

$\boldsymbol{\theta = 250° + 360° \times n}$ **（n は整数）**

弧度法

（教科書 p.111）

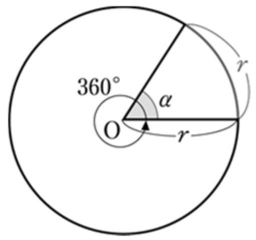
角の大きさを表すのに，これまでは直角の$\frac{1}{90}$を単位とする“度”を用いてきた。これに対して，１つの円において

半径と同じ長さの弧に対する中心角

をとり，これを単位とする角の表し方がある。

この中心角をαとし，その大きさを“度”で表してみよう。

１つの円において，弧の長さは中心角に比例するから，円の半径をrとすると



$$r : 2\pi r = \alpha : 360°$$

よって　$\alpha = \frac{180°}{\pi} \fallingdotseq 57.2958°$

このαは円の半径に関係しない一定の角である。

この角を（⑪　1ラジアン　）または（⑫　1弧度　）といい，これを単位とする角の表し方を（⑬　弧度法　）という。

（⑭　1ラジアン$= \frac{180°}{\pi}$，　$180° = \pi$ラジアン　）

$\boxed{\text{注意}}$　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

問3　120°，150°，−270°，405°，1° を弧度法で表せ。

$$120° = \frac{2}{3}\pi,\quad 150° = \frac{5}{6}\pi,$$

$$-270° = -\frac{3}{2}\pi,\quad 405° = \frac{9}{4}\pi,$$

$$1° = \frac{\pi}{180}$$

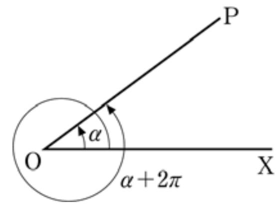
問4　弧度法による角$\frac{\pi}{5}$，$\frac{3}{4}\pi$，$-\frac{5}{2}\pi$，-3π を度で表せ。

$$\frac{\pi}{5} = 36°,\quad \frac{3}{4}\pi = 135°,$$

$$-\frac{5}{2}\pi = -450°,\quad -3\pi = -540°$$

弧度法を用いると，角αの動径が表す一般角θは

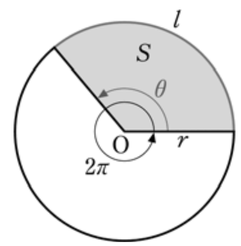
（⑮　$\theta = \alpha + 2n\pi$　）　（nは整数）と表される。



扇形の弧の長さと面積

（教科書 p.112）

半径r，中心角θの扇形の弧の長さをl，面積をSとする。１つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから



$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$，　$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$

ゆえに　（⑯　$l = r\theta$，　$S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$　）

例 2　半径 3，中心角$\frac{\pi}{6}$の扇形の弧の長さlと面積Sを求めてみよう。

$$l = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$$

問5　半径 6，中心角$\frac{3}{4}\pi$の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

弧の長さをl，面積をSとすると

$$l = 6 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{9}{2}\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{27}{2}\pi$$

2 三角関数

（教科書 p.113）

三角関数の定義
$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$,　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$,　$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の（⑰　三角関数　）という。

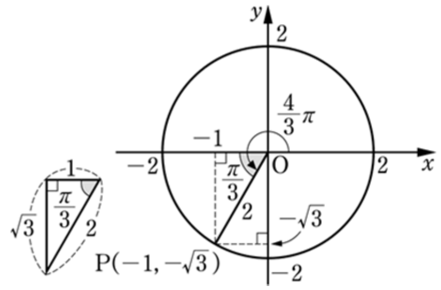
注意　$\tan\theta$ は $x = 0$ となるような θ に対しては定義されない。

例 3 右の図で，$\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき，$\mathrm{OP} = 2$ とすると，$\mathrm{P}(-1, -\sqrt{3})$であるから

$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

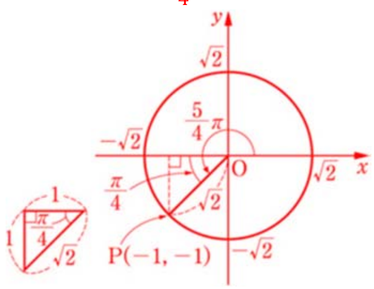
$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$



問6 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\frac{5}{4}\pi$

次の図で $\theta = \frac{5}{4}\pi$，$\mathrm{OP} = \sqrt{2}$ とすると$\mathrm{P}(-1,\ -1)$ であるから



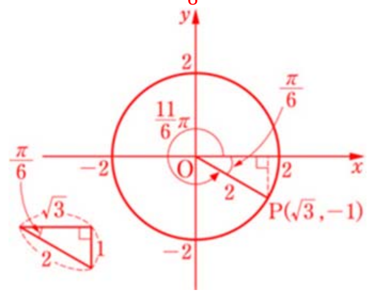
$\sin\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{-1}{-1} = 1$

(2)　$\frac{11}{6}\pi$

次の図で $\theta = \frac{11}{6}\pi$，$\mathrm{OP} = 2$ とすると$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ -1)$ であるから



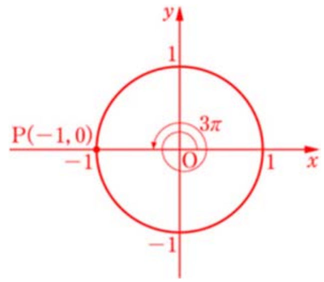
$\sin\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3)　3π

次の図で $\theta = 3\pi$，$\mathrm{OP} = 1$ とすると$\mathrm{P}(-1,\ 0)$ であるから



$\sin 3\pi = \dfrac{0}{1} = 0$

$\cos 3\pi = \dfrac{-1}{1} = -1$

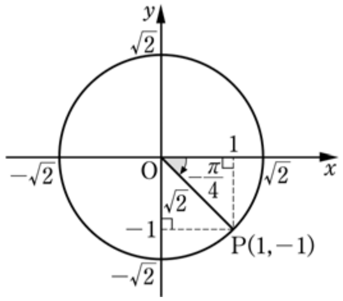
$\tan 3\pi = \dfrac{0}{-1} = 0$

例 4 右の図で，$\theta=-\frac{\pi}{4}$ のとき，$OP=\sqrt{2}$ とすると，$P(1,\ -1)$ であるから

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

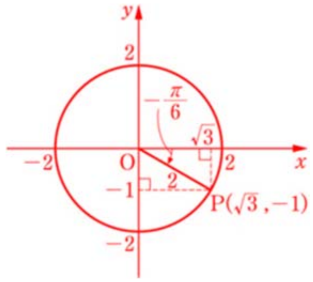
$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{1}=-1$



問7 θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $-\frac{\pi}{6}$

次の図で $\theta=-\frac{\pi}{6}$，$OP=2$ とすると$P(\sqrt{3},\ -1)$ であるから



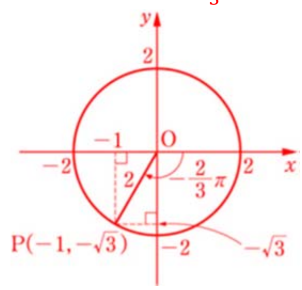
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $-\frac{2}{3}\pi$

次の図で $\theta=-\frac{2}{3}\pi$，$OP=2$ とすると$P(-1,\ -\sqrt{3})$ であるから



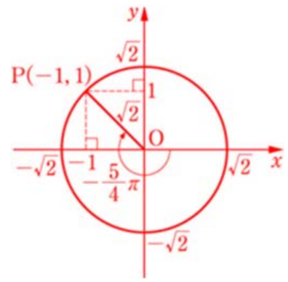
$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$

(3) $-\frac{5}{4}\pi$

次の図で $\theta=-\frac{5}{4}\pi$，$OP=\sqrt{2}$ とすると $P(-1,\ 1)$ であるから

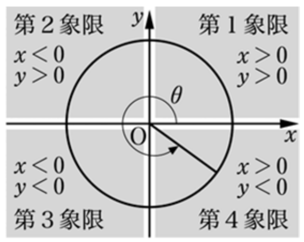


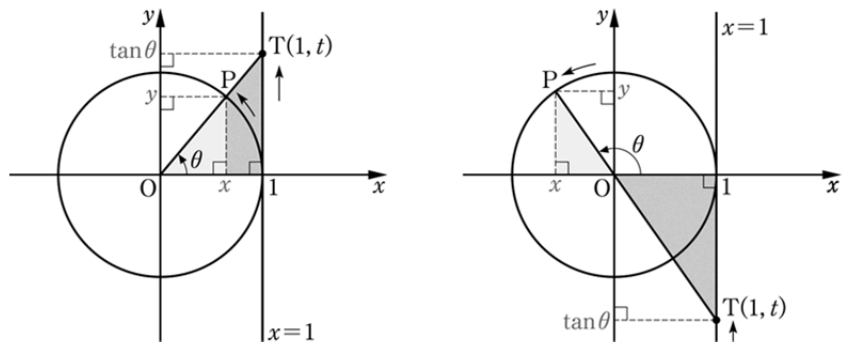
$\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{1}{-1}=-1$

例４のように，角 θ の動径が第４象限にあるとき，θ を（⑱　第４象限の角　）という。





問8　次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

(1)　$\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

$y<0,\ x>0$ より第４象限の角である。

(2)　$\tan\theta<0,\ \cos\theta<0$

$\frac{y}{x}<0,\ x<0$ であるから

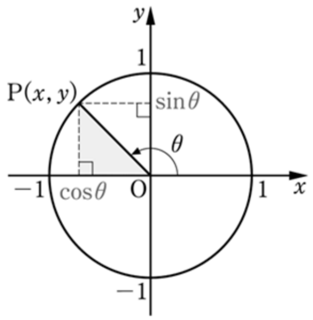
$x<0,\ y>0$

よって，第２象限の角である。

三角関数と単位円

（教科書 p.115）

原点を中心とする半径１の円を（⑲　単位円　）という。



右の図のように，単位円と角 θ の動径の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，三角関数の定義で $r=1$ として

$\cos\theta=x,\ \sin\theta=y$

が成り立つ。すなわち，P の座標は

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

点 P は単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

（⑳　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$　）　◀ $-1\leqq y\leqq1,\ -1\leqq x\leqq1$

また，下の図の単位円において，直線OPと直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{T}(1,t)$ とすると，２つの直角三角形が相似であることから

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{t}{1}=t$$

である。すなわち，T の座標は　$\mathrm{T}(1,\tan\theta)$

点 T は直線 $x=1$ 上をすべて動くことができるから，$\tan\theta$ は（㉑　すべての実数値　）をとる。

3 三角関数の性質

三角関数の相互関係

（教科書 p.116）

三角関数についても，三角比と同様に次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係	
1 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	
2 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	3 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

問9 上の公式3を，1，2を用いて証明せよ。

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

ゆえに　$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

例題 1　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

θ が第 3 象限の角であるから，$\sin\theta<0$ である。

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$　……答

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{3}$　……答

問 10　θ が第 4 象限の角で，$\sin\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

θ が第 4 象限の角であるから　$\cos\theta>0$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$$\boldsymbol{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{1}{3}\right)\div\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

問 11　θ が第 2 象限の角で，$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-2)^2}=\frac{1}{5}$$

θ が第 2 象限の角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\boldsymbol{\cos\theta}=-\sqrt{\frac{1}{5}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{5}}{5}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cdot\cos\theta=(-2)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

例題 2 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

解 与えられた式の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$2\sin\theta\cos\theta+1=\frac{1}{4}$

すなわち　$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{3}{8}$　……答

また　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{11}{16}$　……答

問 12 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

与えられた式の両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$

よって

$$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right)=\boldsymbol{\frac{12}{25}}$$

また

$\boldsymbol{\sin^3\theta-\cos^3\theta}$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

$=\frac{1}{5}\left(1+\frac{12}{25}\right)=\boldsymbol{\frac{37}{125}}$

例題 3 等式 $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$ を証明せよ。

証明

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$=\frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$$

問 13 次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta$$

よって

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\tan^2\theta$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

ゆえに　$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

三角関数の性質

（教科書 p.118）

n を整数とするとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径と同じ位置にあるから，次の公式が成り立つ。

$\theta+2n\pi$ の三角関数

1
$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta \qquad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \qquad \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$$

例 5 $\cos\frac{14}{3}\pi=\cos\left(\frac{2}{3}\pi+4\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

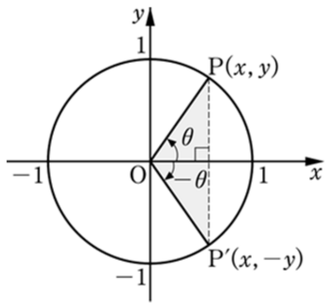
問 14 $\sin\frac{27}{4}\pi$，$\cos\frac{27}{4}\pi$，$\tan\frac{27}{4}\pi$ の値を求めよ。

$$\sin\frac{27}{4}\pi=\sin\left(\frac{3}{4}\pi+6\pi\right)=\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{27}{4}\pi=\cos\left(\frac{3}{4}\pi+6\pi\right)=\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\frac{27}{4}\pi=\tan\left(\frac{3}{4}\pi+6\pi\right)=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$$

角 $-\theta$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称の位置にあるから，次の公式が成り立つ。



$-\theta$ の三角関数

2
$$\sin(-\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(-\theta)=\cos\theta \qquad \tan(-\theta)=-\tan\theta$$

例 6 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 15 $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$，$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$，$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ の値を求めよ。

$$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=\cos\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\tan\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\theta+\frac{\pi}{2}$，$\theta+\pi$ の三角関数

3
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta \qquad \tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

4
$$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta \qquad \cos(\theta+\pi)=-\cos\theta \qquad \tan(\theta+\pi)=\tan\theta$$

例 7 $\sin\frac{5}{12}\pi=a$ とおくとき，$\cos\frac{11}{12}\pi$ の値を a を用いて表してみよう。

$$\cos\frac{11}{12}\pi=\cos\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{5}{12}\pi=-a$$

問 16 $\cos\frac{\pi}{8}=a$ とおくとき，次の値を a を用いて表せ。

(1)　$\sin\frac{5}{8}\pi$

$$\sin\frac{5}{8}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{8}=a$$

(2)　$\cos\frac{9}{8}\pi$

$$\cos\frac{9}{8}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)=-\cos\frac{\pi}{8}=-a$$

(3)　$\sin\frac{13}{8}\pi$

$$\sin\frac{13}{8}\pi=\sin\left(\frac{5}{8}\pi+\pi\right)=-\sin\frac{5}{8}\pi$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{8}$$
$$=-a$$

さらに，次の公式が成り立つ。

$\boxed{5}$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

$\boxed{6}$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

問 17 公式$\boxed{3}$，$\boxed{4}$の θ を $-\theta$ で置き換えることにより，前の公式を確かめよ。

$\boxed{5}$：公式$\boxed{3}$の θ を $-\theta$ で置き換えると

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\sin(-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}$$

$\boxed{6}$：公式$\boxed{4}$の θ を $-\theta$ で置き換えると

$$\sin(\pi-\theta)=\sin(-\theta+\pi)$$
$$=-\sin(-\theta)$$
$$=\sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=\cos(-\theta+\pi)$$
$$=-\cos(-\theta)$$
$$=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta+\pi)$$
$$=\tan(-\theta)$$
$$=-\tan\theta$$

4 三角関数のグラフ

$y=\sin\theta,\ y=\cos\theta$ のグラフ
（教科書 p.120）

$y=\sin\theta$ や $y=\cos\theta$ のグラフの形の曲線を（㉒　正弦曲線　）という。

$y=\tan\theta$ のグラフ
（教科書 p.121）

グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの（㉓　漸近線　）という。

周期関数
（教科書 p.122）

一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

（㉔　$f(x+p)=f(x)$　）

がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする（㉕　周期関数　）という。

p が $f(x)$ の周期であるとき，$2p,\ 3p,\ -p$ なども $f(x)$ の周期となるから，$f(x)$ の周期は無数にある。しかし，ふつうは正の周期のうちで最小のものを $f(x)$ の（㉖　周期　）という。

偶関数・奇関数とそのグラフ
（教科書 p.122）

一般に，関数 $f(x)$ において

（㉗　$f(-x)=f(x)$　）が成り立つとき，$f(x)$ を（㉘　偶関数　）

（㉙　$f(-x)=-f(x)$　）が成り立つとき，$f(x)$ を（㉚　奇関数　）

という。$y=\cos\theta$ は偶関数，$y=\sin\theta$ は奇関数である。

例 8 関数 $f(\theta)=\tan\theta$ において

$f(-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta=-f(\theta)$

関数 $g(x)=x^2$ において

$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x)$

よって，$f(\theta)=\tan\theta$ は（　奇関数　），$g(x)=x^2$ は（　偶関数　）である。

問 18 関数 $f(x)=2x$ は偶関数であるか，奇関数であるか調べよ。

$f(x)=2x$ のとき

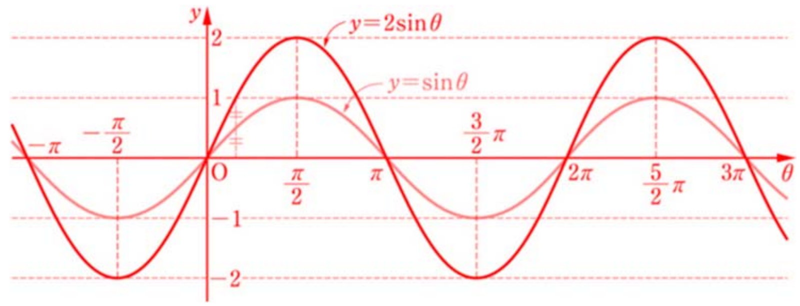
$f(-x)=2\cdot(-x)=-2x=-f(x)$

よって，$f(x)=2x$ は奇関数である。

いろいろな三角関数のグラフ
（教科書 p.123）

例 9 関数 $y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

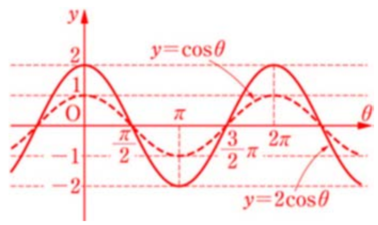
この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを（　y　）軸方向に（　2 倍に拡大　）したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく（　2π　）である。



問 19 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

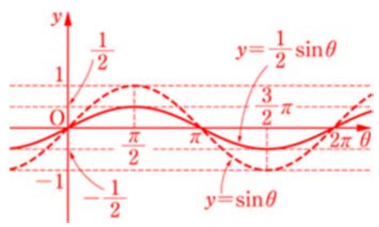
（1）　$y=2\cos\theta$

$y=2\cos\theta$ のグラフは $y=\cos\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。その周期は $\cos\theta$ と同じく 2π である。



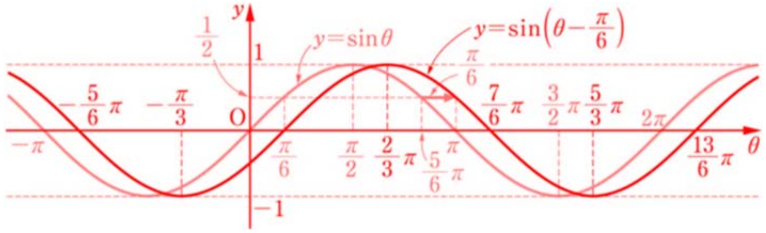
(2)　$y=\frac{1}{2}\sin\theta$

$y=\frac{1}{2}\sin\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく 2π である。



例 10 関数 $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを（　θ　）軸方向に（　$\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動　）したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく（　2π　）である。

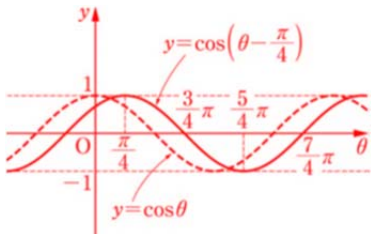


問 20 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

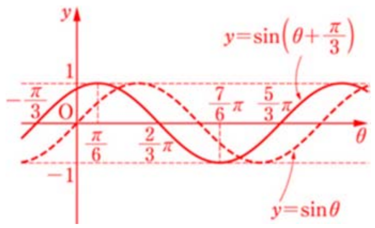
$y=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは $y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。

その周期は $\cos\theta$ と同じく $\boldsymbol{2\pi}$ である。



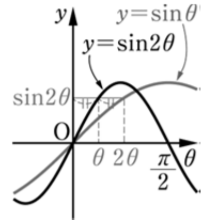
(2)　$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく $\boldsymbol{2\pi}$ である。



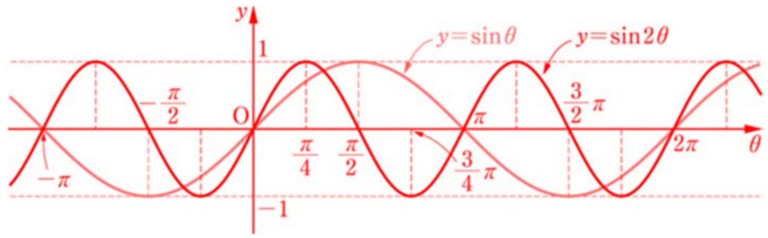
例 11 関数 $y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			



上の表からもわかるように，$y=\sin 2\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを（　θ　）軸方向に（　$\frac{1}{2}$ 倍に縮小　）したものである。

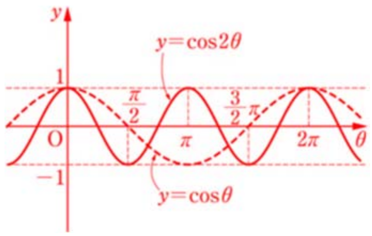
したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $\sin\theta$ の周期の（　$\frac{1}{2}$　）に等しく，（　$\frac{2\pi}{2}=\pi$　）である。



問 21 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

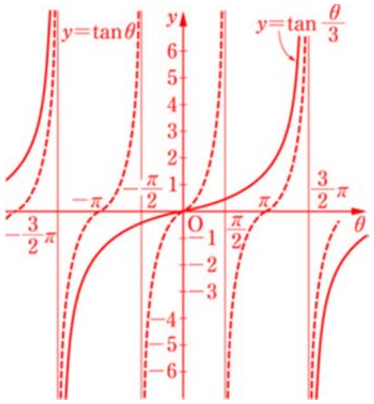
(1)　$y=\cos 2\theta$

$y=\cos 2\theta$ のグラフは $y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。その周期は $\cos\theta$ の周期の $\frac{1}{2}$ で，$\boldsymbol{\pi}$ である。



(2)　$y=\tan\frac{\theta}{3}$

$y=\tan\frac{\theta}{3}$ のグラフは $y=\tan\theta$ のグラフを θ軸方向に 3 倍に拡大したものである。その周期は $\tan\theta$ の周期の 3 倍で，$\boldsymbol{3\pi}$ である。



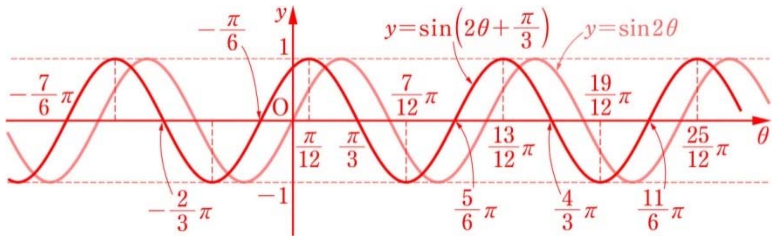
例題 4　関数 $y=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

解

$$y=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

よって，$y=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

また，その周期は $\sin 2\theta$ の周期に等しく，$\frac{2\pi}{2}=\pi$ である。

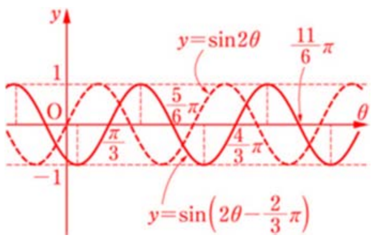


問 22 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

（1） $y=\sin\left(2\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

$$y=\sin\left(2\theta-\frac{2}{3}\pi\right)=\sin 2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

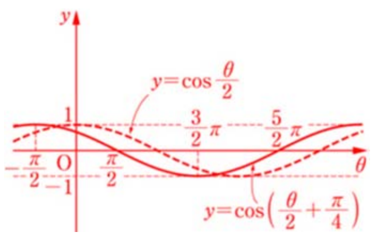
よって，$y=\sin\left(2\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$ のグラフは，$y=\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。その周期は，$\sin 2\theta$ の周期に等しく，$\frac{2\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$ である。



⑵ $y=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$y=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

よって，$y=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y=\cos\frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。その周期は，$\cos\frac{\theta}{2}$ の周期に等しく，$2\pi\div\frac{1}{2}=\boldsymbol{4\pi}$ である。



5 三角関数の応用

三角関数を含む方程式

（教科書 p.126）

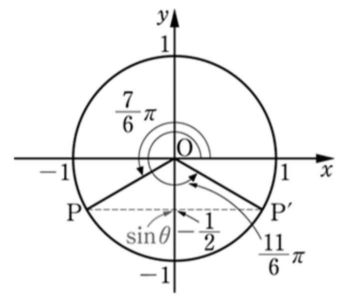
例 12 方程式 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めてみよう。

単位円の周上で，y 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，右の図のP，P′ の 2 点であり，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

$\sin\theta$ の周期は 2π であるから

$$\theta=\frac{7}{6}\pi+2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi+2n\pi \qquad （n \text{ は整数}）$$



問 23 次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

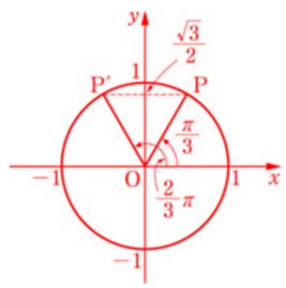
（1） $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

単位円の周上で，y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は，次の図の P，P′ の 2 点であり，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

$\sin\theta$ の周期は 2π であるから

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \frac{2}{3}\pi+2n\pi}\ （\boldsymbol{n} \textbf{ は整数}）$$



(2)　$2\cos\theta = 1$

$2\cos\theta = 1$ より

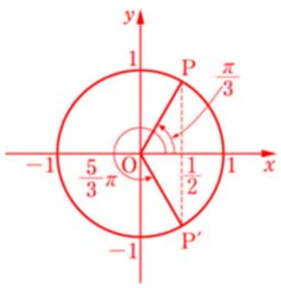
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

単位円の周上で，x 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，次の図の P，P′ の 2 点であり，動径OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

$\cos\theta$ の周期は 2π であるから

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ \frac{5}{3}\pi + 2n\pi}$$ （n は整数）



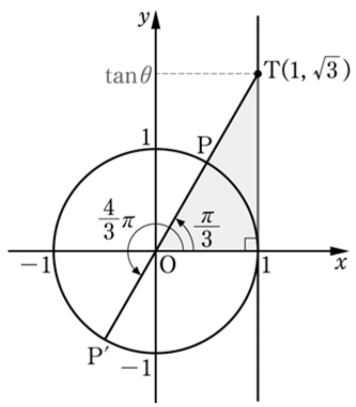
例13 方程式 $\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ の値を求めてみよう。

$\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を右の図のように P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\theta = \frac{\pi}{3},\quad \frac{4}{3}\pi$$

$\tan\theta$の周期は π であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \qquad (n \text{ は整数})$$



問24 次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

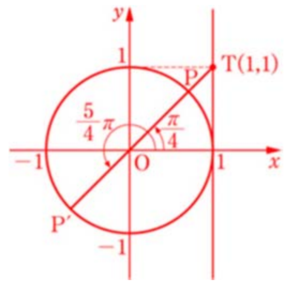
(1)　$\tan\theta = 1$

$\mathrm{T}(1,\ 1)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を次の図のように P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$の範囲で

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$\tan\theta$ の周期は π であるから

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi}$$ （n は整数）



(2)　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

$\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$ より

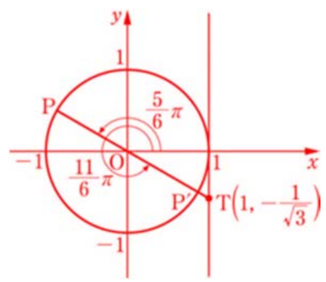
$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\mathrm{T}\left(1,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を次の図のように P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\theta = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

$\tan\theta$ の周期は π であるから

$$\boldsymbol{\theta = \frac{5}{6}\pi + n\pi}$$ （n は整数）



例題 5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たす θ の値を求めよ。

解 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

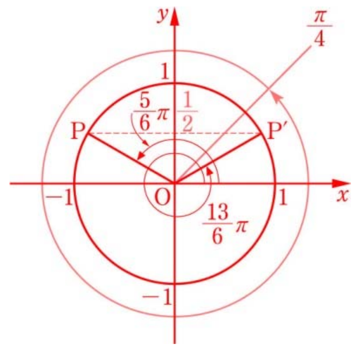
$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ ……①

単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の P，P′ で，動径 OP，OP′ の表す角 $\theta + \frac{\pi}{4}$ は，①の範囲で

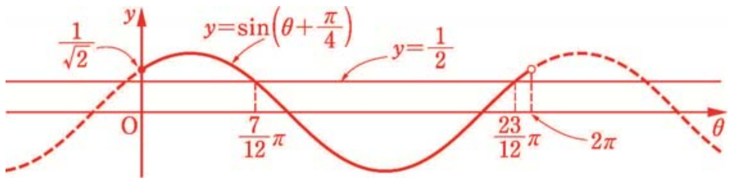
$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに

$$\theta = \frac{7}{12}\pi,\quad \frac{23}{12}\pi$$



注意 例題 5 の解は，関数 $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフが直線 $y = \frac{1}{2}$ と交わる θ の値を求めても得られる。



問 25 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

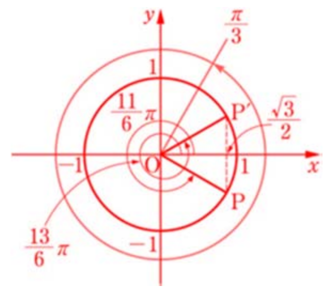
(1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi$ ……①

単位円の周上で，x 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は，次の図の P，P′ で，動径 OP，OP′ の表す角 $\theta + \frac{\pi}{3}$ は，①の範囲で

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi,\quad \frac{13}{6}\pi$$



ゆえに　**$\theta = \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$**

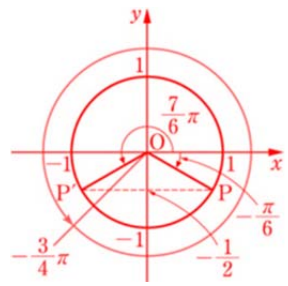
(2) $\sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$-\frac{3}{4}\pi \leqq \theta - \frac{3}{4}\pi < \frac{5}{4}\pi$ ……①

単位円の周上で，y 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は，次の図の P，P′ で，動径 OP，OP′ の表す角 $\theta - \frac{3}{4}\pi$ は，①の範囲で

$$\theta - \frac{3}{4}\pi = -\frac{\pi}{6},\quad \frac{7}{6}\pi$$



ゆえに　**$\theta = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$**

三角関数を含む不等式

（教科書 p.128）

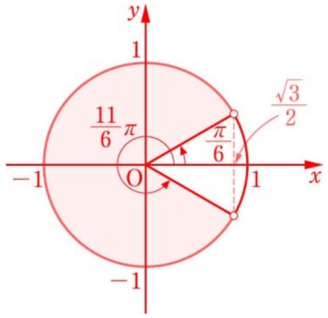
例題 6　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

解　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\quad \frac{11}{6}\pi$$

よって，右の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

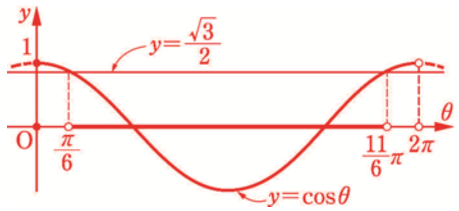
$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$$



注意　例題 6 の解は，関数

$y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ

の値の範囲を求めても得られる。



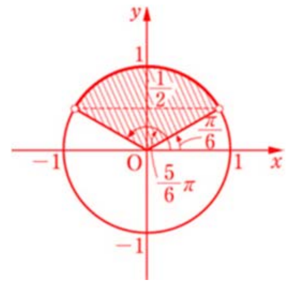
問 26　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta > \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = \frac{1}{2}$ となるθ の値は　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi}$$

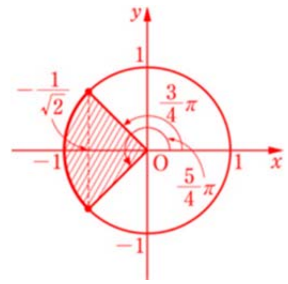


(2)　$\cos\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ の値は　$\theta = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi}$$



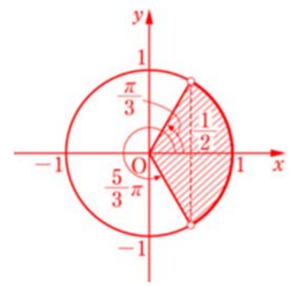
問 27　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\cos\theta > \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となるθ の値は　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\quad \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi}$$

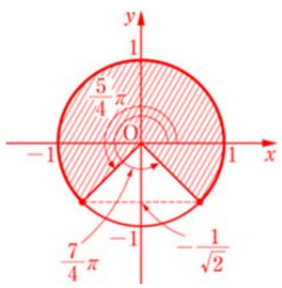


(2)　$\sin\theta \geqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ の値は　　$\theta = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\mathbf{0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi,\quad \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi}$$



(3)　$2\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$

$2\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$ より

$$\sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

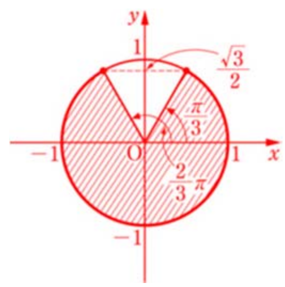
$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求める。$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\mathbf{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\quad \frac{2}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi}$$



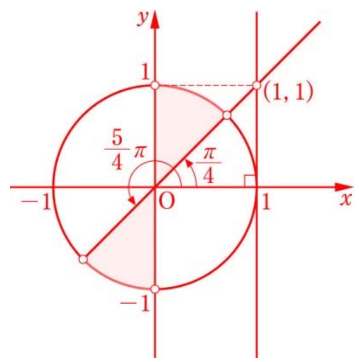
例題 7　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta > 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。。

解　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = 1$ となる θ の値は

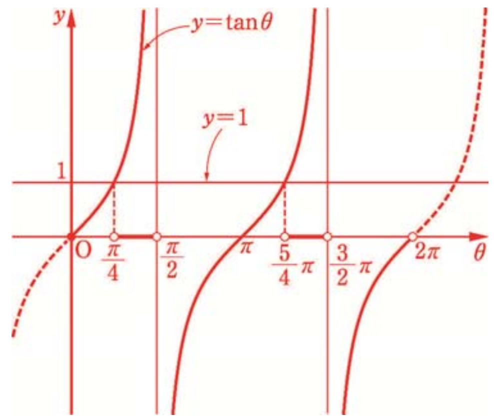
$$\theta = \frac{\pi}{4},\quad \frac{5}{4}\pi$$

よって，右の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2},\quad \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



注意　例題 7 の解は，関数 $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = 1$ より上側にある θ の値の範囲を求めても得られる。



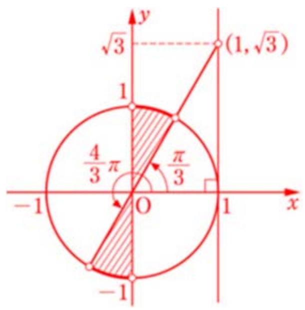
問 28 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\tan\theta > \sqrt{3}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = \sqrt{3}$ となる θ の値は　　$\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{4}{3}\pi$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2},\quad \frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi}$$



(2)　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 \leqq 0$

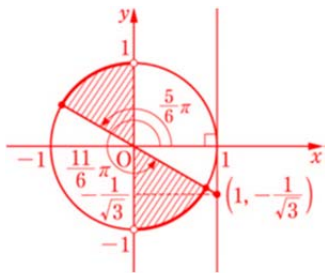
$\sqrt{3}\tan\theta + 1 \leqq 0$ より

$$\tan\theta \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ の値は　　$\theta = \frac{5}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} < \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < \theta \leqq \frac{11}{6}\pi}$$



問 29 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3}<\tan\theta<1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，$\tan\theta=-\sqrt{3}$ となるθ の値は

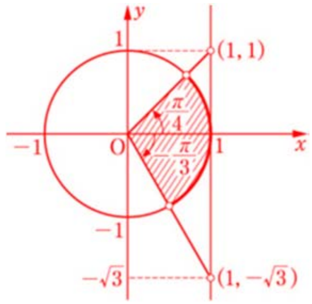
$$\theta=-\frac{\pi}{3}$$

$\tan\theta=1$ となる θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{4}}$$



三角関数を含む関数の最大・最小

（教科書 p.130）

応用例題 8 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y=\sin^2\theta+\sin\theta$$

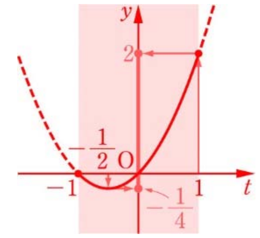
考え方 $\sin\theta=t$ とおくことによって，与えられた関数を t の 2 次関数とみて考える。

解 $\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$-1\leqq t\leqq 1$$

また，y を t で表すと

$$y=t^2+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$



よって，この関数は

$t=1$ のとき　最大値 2，$t=-\frac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。ここで，

$\sin\theta=1$ となるのは　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ となるのは　$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき

である。したがって，この関数は

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき　最大値 2

$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき　最小値 $-\frac{1}{4}$

をとる。

問 30 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$

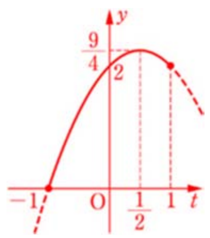
$\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$

また，y を t で表すと

$y = -t^2 + t + 2$

$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$



よって，この関数は

$t = \frac{1}{2}$ のとき　最大値 $\frac{9}{4}$，$t = -1$ のとき　最小値 0 をとる。ここで

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となるのは　$\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$ のとき

$\cos\theta = -1$ となるのは　$\theta = \pi$ のとき

である。したがって，この関数は

$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$，$\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{4}}$

$\boldsymbol{\theta = \pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{0}$　をとる。

問 題

（教科書 p.131）

1 θ は第 3 象限の角で，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ であるとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta+\cos\theta$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

θ は第 3 象限の角であるから

$\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$

よって　$\sin\theta+\cos\theta<0$

したがって

$$\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$\boldsymbol{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=-\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{8}}$

2 $\sin\frac{5}{8}\pi=a$，$\cos\frac{5}{8}\pi=b$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ。

(1) $\sin\frac{9}{8}\pi$

$=\sin\left(\frac{5}{8}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5}{8}\pi$

$=\boldsymbol{b}$

(2) $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$

$=\cos\left(\frac{13}{8}\pi-2\pi\right)=\cos\frac{13}{8}\pi$

$=\cos\left(\frac{5}{8}\pi+\pi\right)=-\cos\frac{5}{8}\pi$

$=\boldsymbol{-b}$

(3) $\tan\frac{17}{8}\pi$

$=\tan\left(\frac{9}{8}\pi+\pi\right)=\tan\frac{9}{8}\pi$

$=\tan\left(\frac{5}{8}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{5}{8}\pi}$

$=-\frac{\cos\frac{5}{8}\pi}{\sin\frac{5}{8}\pi}=-\boldsymbol{\frac{b}{a}}$

3 次の等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)+\sin\theta\,(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$$

(2) $\cos\theta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=0$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$$

であるから

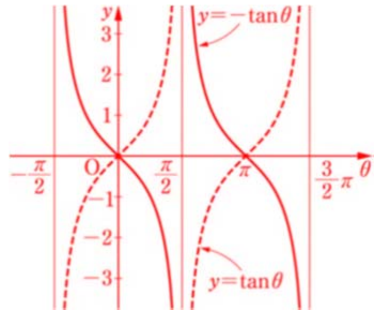
$$\cos\theta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$$

$$=\cos\theta+\cos\theta-\cos\theta-\cos\theta=0$$

4 次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

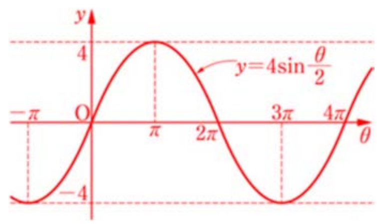
(1) $y=-\tan\theta$

$y=-\tan\theta$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフと θ 軸に関して対称であり，次の図のようになる。その周期は $\tan\theta$ と同じく $\boldsymbol{\pi}$ である。



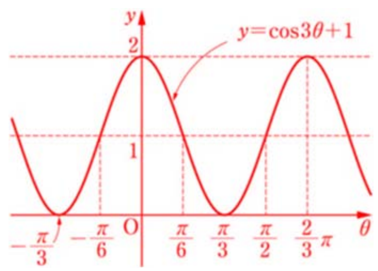
(2) $y=4\sin\frac{\theta}{2}$

$y=4\sin\frac{\theta}{2}$ のグラフは，$y=\sin\frac{\theta}{2}$ のグラフを y 軸方向に 4 倍に拡大したものであり，次の図のようになる。その周期は $\sin\frac{\theta}{2}$ と同じく $\boldsymbol{4\pi}$ である。



(3) $y=\cos 3\theta+1$

$y=\cos 3\theta+1$ のグラフは，$y=\cos 3\theta$ のグラフを y 軸方向に $+1$ だけ平行移動したものであり，次の図のようになる。その周期は $\cos 3\theta$ と同じく $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$ である。



5 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

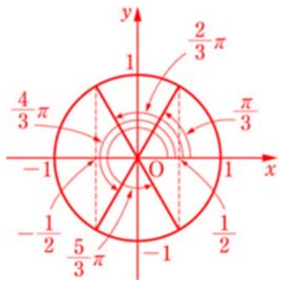
(1) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{1}{4}$ より

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$



(2) $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$

$2\sin 2\theta = \sqrt{3}$ より

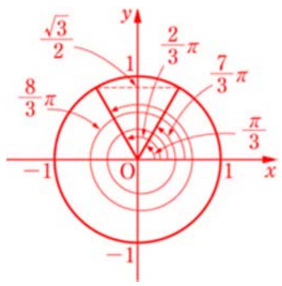
$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ であるから

$$2\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$$



(3) $\tan\frac{\theta}{2} + 1 = 0$

$\tan\frac{\theta}{2} + 1 = 0$ より

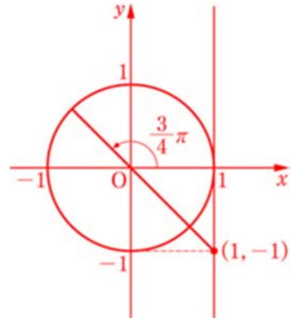
$$\tan\frac{\theta}{2} = -1$$

$0 \leqq \frac{\theta}{2} < \pi$ であるから

$$\frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{2}\pi}$$



6 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta < \frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるθ の値は

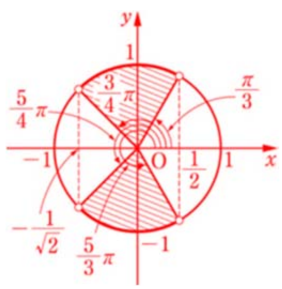
$$\theta = \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{5}{4}\pi$$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5}{3}\pi$$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi}$$



(2) $4\sin^2\theta - 1 > 0$

$4\sin^2\theta - 1 > 0$ より

$$(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) > 0$$

よって　$\sin\theta < -\frac{1}{2}$　または　$\frac{1}{2} < \sin\theta$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ となる θ の値は

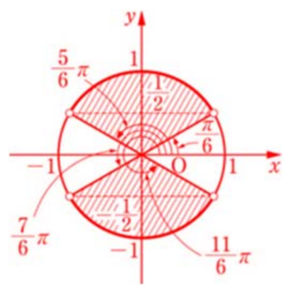
$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi$$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi$$

ゆえに，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi}$$



(3)　$3\tan^2\theta \leqq 1$

$3\tan^2\theta \leqq 1$ より

$$\tan^2\theta \leqq \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \tan\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θの値は

$$\theta = \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{11}{6}\pi$$

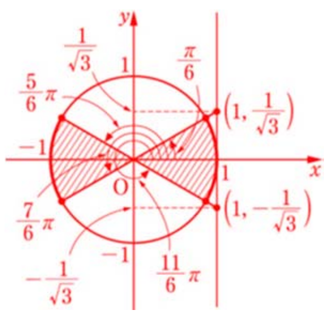
$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる θ の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\quad \frac{7}{6}\pi$$

よって，次の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi \leqq \theta \leqq \frac{7}{6}\pi,}$$

$$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi \leqq \theta < 2\pi}$$



7　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta$$

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta$$
$$= (1 - \sin^2\theta) + \sin\theta$$
$$= -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，y を t で表すと

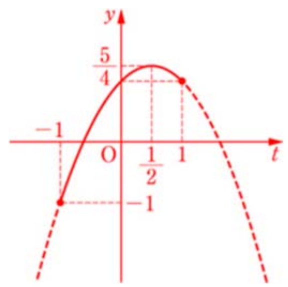
$$y = -t^2 + t + 1$$
$$= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって，この関数は

$t = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$

$t = -1$ のとき最小値 -1

をとる。



$\sin\theta = \frac{1}{2}$ となるのは　$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき

$\sin\theta = -1$ となるのは　$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき

である。したがって，この関数は

$\theta = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$**

$\theta = \frac{3}{2}\pi$ のとき　　**最小値 $\boldsymbol{-1}$**

をとる。