1節 点と直線

1 2点間の距離

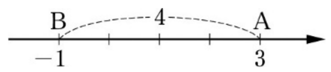
数直線上の2点間の距離

（教科書 p.62）

数直線上の点には実数が対応し，2点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて（①　　　　　　　　　　）と表される。

例1 2点 A(3)，B(−1) に対し

AB ＝



問1 次の2点間の距離を求めよ。

(1)　O(0)，A(3)

(2)　A(−1)，B(5)

(3)　A(7)，B(3)

座標平面上の2点間の距離

（教科書 p.62）

2点間の距離
2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 間の距離は $\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ とくに，原点 O と点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の距離は　$\mathbf{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

例2 2点 A(−2，4)，B(2，3) 間の距離は

AB ＝

原点 O と点 P(5，12) の距離は

OP ＝

問2 次の2点間の距離を求めよ。

(1)　A(2，1)，B(5，7)

(2)　A(−3，5)，B(−2，−2)

(3)　O(0，0)，P(−4，3)

(4)　A(8，−2)，B(8，−19)

例3 3点 A(2，3)，B(1，1)，C(5，−1) を頂点とする△ABC は，どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の3辺の長さは

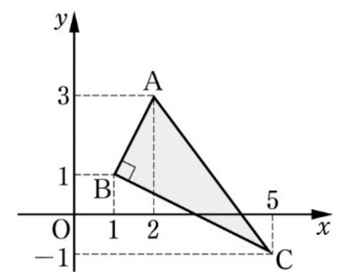
AB ＝

BC ＝

CA ＝

であるから

よって，△ABC は（　　　　　　　　　　　　　　　　）である。



問3 次の 3 点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1) $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(3,\ -1)$

(2) $A(2,\ \sqrt{3})$, $B(-1,\ 2\sqrt{3})$, $C(-1,\ 0)$

例 4 2 点 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 3)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めてみよう。点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする。

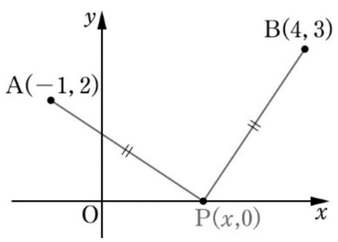
$AP = BP$ より　　$AP^2 = BP^2$

よって

$(x+1)^2 + (-2)^2 = (x-4)^2 + (-3)^2$

これを解くと　　$x = 2$

すなわち



問4 2 点 $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 4)$ から等距離にある y 軸上の点 Q の座標を求めよ。

2 内分点・外分点

数直線上の内分点・外分点

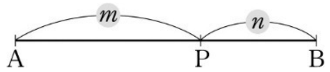
（教科書 p.64）

m, n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$

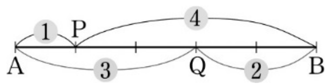
が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に（② 　　　　　　）するという。



例 5 右の図において

点 P は線分 AB を（ 　　　　　　）に内分し，

点 Q は線分 AB を（ 　　　　　　）に内分する。



問5 2 点 A(3), B(7) に対して，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，1 : 3 に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。

2 点 A(a), B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。$a < b$ のとき，$a < x < b$ となるから

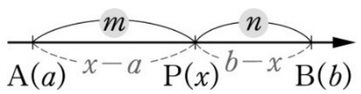
$\mathrm{AP} = x - a$, 　　$\mathrm{PB} = b - x$

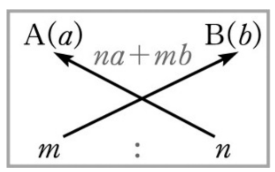
である。$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ であるから

$(x - a) : (b - x) = m : n$

すなわち　$m(b - x) = n(x - a)$

ゆえに　（③ 　　　　　　　　）





$a > b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

とくに，線分 AB の（④ 　　　　　）の座標は（⑤ 　　　　　）である。

問6 2 点 A(−4), B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M

(2)　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P

(3)　線分 AB を 1 : 4 に内分する点 Q

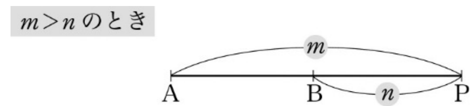
(4)　線分 BA を 1 : 4 に内分する点 R

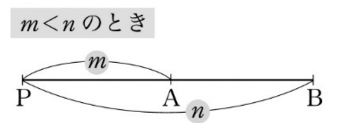
m, n を異なる正の数とする。

線分 AB の延長上に点 P があり

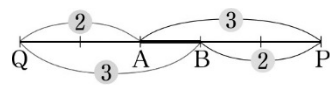
$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に（⑥ 　　　　　）するという。





例 6 右の図の点 P は線分 AB を（ 　　　　　　）に外分し，点 Q は（ 　　　　　　）に外分する。



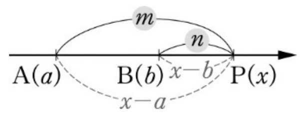
問7 例 6 の線分 AB を 1 : 2 に外分する点 R を図示せよ。

2 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a<b$，$m>n$ とすると，点 P は線分 AB の右側にあるから

$$a<b<x$$

となる。

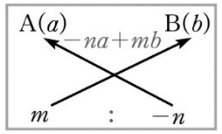


よって　$\mathrm{AP}=x-a$，　$\mathrm{PB}=x-b$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ であるから

$$(x-a):(x-b)=m:n$$

すなわち　$m(x-b)=n(x-a)$



ゆえに　（⑦　　　　　　　　　）

この式は a と b，m と n の大小に関係なく成り立つ。

問8　2 点 $\mathrm{A}(-5)$，$\mathrm{B}(7)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を $2:1$ に外分する点 P

(2)　線分 AB を $1:3$ に外分する点 Q

座標平面上の内分点・外分点

（教科書 p.66）

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に**内分**する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

$m:n$ に**外分**する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\quad \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

とくに，線分 AB の**中点**の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

例 7　2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$，$\mathrm{B}(4,\ 4)$ がある。

線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の座標を求めてみよう。

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$x=$　　　　　　　　　，　$y=$

したがって，求める点 P の座標は（　　　　　　　）である。

線分 AB を $2:1$ に外分する点 Q の座標を求めてみよう。

$\mathrm{Q}(x',\ y')$ とすると

$x'=$　　　　　　　　　，　$y'=$

したがって，求める点 Q の座標は（　　　　　　　）である。

問9 次の 2 点 A，B を結ぶ線分 AB を，3：2 に内分する点 P，3：2 に外分する点 Q，および線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(1)　$A(1,\ 3)$，$B(6,\ 5)$

(2)　$A(-2,\ 3)$，$B(4,\ -1)$

例題 1 点 $A(2,\ 3)$ に関して，点 $P(-1,\ 2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解

問 10 4 点 $A(-1,\ -1)$，$B(5,\ -2)$，$C(3,\ 3)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1)　対角線 AC の中点 M

(2)　頂点 D

三角形の重心

（教科書 p.68）

　三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を（⑧　　　　　　）という。三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，この点をその三角形の（⑨　　　　　　）という。重心はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する点である。

三角形の重心
3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(5,\ -4)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1)$を頂点とする△ ABC の重心 G の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{2+5+(-1)}{3}=2,\qquad y=\frac{3+(-4)+1}{3}=0$$

すなわち

問 11 3 点 $\mathrm{A}(3,\ 6)$，$\mathrm{B}(-5,\ -1)$，$\mathrm{C}(8,\ -7)$を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めよ。

3 直線の方程式

（教科書 p.69）

1 次関数 $y=mx+n$ のグラフは，傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を，この直線の（⑩　　　　　　　　）という。

一般に，x, y についての方程式を成り立たせる点 $(x,\ y)$ のえがく図形を，その（⑪　　　　　　　　）または（⑫　　　　　　　　）という。また，その方程式を，その（⑬　　　　　　　　）という。

例 9 (1)　方程式 $3x-2y+4=0$ は

$$y=\frac{3}{2}x+2$$

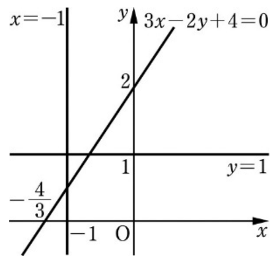
と変形できるから，傾きが（　　　　　），y 切片が（　　　　　）の直線を表す。

(2)　方程式 $y-1=0$ は　　$y=1$

と変形できるから，点（　　　　　　　）を通り，（　　　　　　）に平行な直線を表す。

(3)　方程式 $x+1=0$ は　　$x=-1$

と変形できるから，点（　　　　　　　）を通り，（　　　　　　）に平行な直線を表す。



問 12 次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

(1)　$2x-3y+6=0$

(2)　$y-2=0$

(3)　$x+3=0$

直線の方程式のいろいろな形

（教科書 p.70）

1 点を通り，傾き m の直線
点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式は $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$

例 10 点 $(2,\ -5)$ を通り，傾き -4 の直線の方程式は

$$y-(-5)=-4(x-2)$$

すなわち

問 13 点 $(-3,\ 4)$ を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが 2

(2)　傾きが $-\frac{1}{3}$

２点を通る直線
2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$ のとき　　$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)}$ $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ のとき　　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 11 2 点 A$(-3,\ 2)$，B$(6,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)}\{x - (-3)\}$　　　すなわち

問 14 次の 2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(2,\ -3)$，B$(4,\ 3)$

(2)　A$(6,\ -1)$，B$(-3,\ 5)$

(3)　A$(-2,\ 0)$，B$(-2,\ -6)$

(4)　A$(4,\ 7)$，B$(-3,\ 7)$

問 15 3 点 A$(-2,\ 6)$，B$(7,\ 3)$，C$(a,\ a+4)$ があるとき，次の問に答えよ。

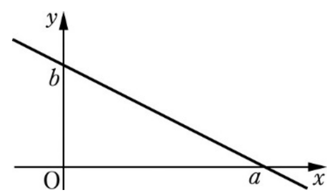
(1)　2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

例 12 2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線の方程式は，$a \neq 0$，$b \neq 0$ のとき

$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - a)$

である。これを変形すると



注意　直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の（⑭　　　　　　　）という。例 12 の直線では x 切片がa，y 切片が b である。

問 16 x 切片が 3，y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

4 2 直線の関係

2 直線の平行と垂直

（教科書 p.72）

2 直線の平行条件・垂直条件
2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について **平行条件は $\boldsymbol{m = m'}$**　　**垂直条件は $\boldsymbol{mm' = -1}$**

問 17 次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

① $y = -2x + 5$　　② $x - 3y + 7 = 0$

③ $6x + 2y + 3 = 0$　　④ $6x + 3y = 1$

例題 2 点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x + 2y - 9 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

解

問 18 点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $2x - 5y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

問 19 直線 $ax - 2y + 5 = 0$ が直線 $2x + y - 10 = 0$ に垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

例題 3 直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

考え方

解

問 20 直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 $\mathrm{A}(4,\ -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

2 直線の交点

（教科書 p.75）

例題 4 2 直線 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$ について，次の問に答えよ。

(1) 2 直線の交点の座標を求めよ。

(2) この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解

問 21 次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1) $5x-4y+13=0,\quad 3x+y+1=0$

(2) $3x-y-6=0,\quad 6x+5y+2=0$

問 22 3 直線

$x-2y+8=0,\qquad 2x+3y-5=0,\qquad mx-y-2m+8=0$

が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ。

2 直線の交点を通る直線

（教科書 p.76）

2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ に対して，方程式

(⑮ 　　　　　　　　　　　　　　　　) ……①

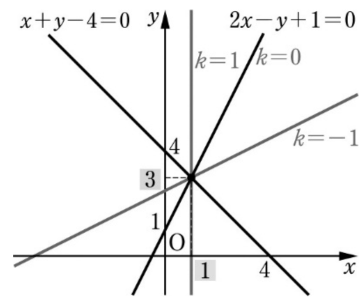
を考える。ただし，k は定数とする。

方程式①が 2 直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。

$x+y-4=0$，$2x-y+1=0$

を同時に満たす x，y の値の組 $x=1$，$y=3$ は k の値に関係なく①を満たす。

よって，①で表される図形は 2 直線の交点 (1，3) を通る。



また，①を変形すると

$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0$ ……②

$k+2$ と $k-1$ は同時には 0 にならないから，②の表す図形は直線である。

よって，①は 2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ の交点 (1，3) を通る直線を表す。

例題 5 2 直線 $3x+4y-17=0$，$x-2y+1=0$ の交点と点 (2，3) を通る直線の方程式を求めよ。

解

問 23 2 直線 $4x-5y+5=0$，$x+2y-6=0$ の交点と点 (1，1) を通る直線の方程式を求めよ。

点と直線の距離

（教科書 p.77）

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

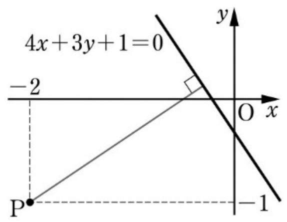
$$\boldsymbol{d=\frac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例 13　点 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$ と直線

$$4x+3y+1=0$$

の距離 d は

$d=$



問 24　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $x+2y+2=0$

(2)　点 $(3,\ 4)$ と直線 $2x-3y+1=0$

(3)　点 $(7,\ -1)$ と直線 $y=-3x+6$

座標を用いた図形の性質の証明

（教科書 p.78）

応用 例題 6　△ ABC の辺 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

であることを証明せよ。

証明

問 25　△ ABC の辺 BC を 1：2 に内分する点を D とすると

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$$

であることを証明せよ。

応用 例題 7 証明

△ ABC の 3 つの頂点から，それぞれの対辺に下ろした垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わることを証明せよ。

例題 7 における 3 本の垂線の交点を△ ABC の（⑯　　　　　　　　）という。

問 26 △ ABC において，各辺の垂直二等分線は，1 点で交わることを証明せよ。

問 題

（教科書 p.80）

1 2 点 A(-2)，B(5) を結ぶ線分 AB を $3:4$ に内分する点を C，$3:4$ に外分する点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

2 △ABC の 2 つの頂点 A，B および重心 G の座標が A$(-7,\ -5)$，B$(2,\ -2)$，G$(-2,\ -1)$ であるとき，頂点 C の座標を求めよ。

3 2 点 A$(3,\ 4)$，B$(-2,\ 7)$ を通る直線を l とするとき，次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に平行な直線

(2)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に垂直な直線

4 2 点 A$(1,\ -1)$，B$(3,\ -7)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

5 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

ただし，$b_1\neq 0$，$b_2\neq 0$ とする。

(1)　2 直線が**平行**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0}$

(2)　2 直線が**垂直**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

6 2 直線 $ax + 4y - 1 = 0$

$x + (a-3)y - 2 = 0$

が平行になるような定数 a の値を求めよ。また，垂直になるような定数 a の値を求めよ。

7 直線 $y = x$ に関して，点 A$(p,\ q)$ と対称な点 B の座標を $p,\ q$ で表せ。ただし，$p \neq q$ とする。

8 点 A$(2,\ 1)$ と直線 $5x + 12y + 4 = 0$ 上を動く点 P がある。線分 AP の長さの最小値を求めよ。

1節 点と直線

1 2点間の距離

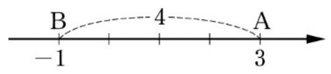
数直線上の2点間の距離

（教科書 p.62）

数直線上の点には実数が対応し，2点 $A(a)$，$B(b)$ 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて（① $AB = |b-a|$ ）と表される。

例1 2点 $A(3)$，$B(-1)$ に対し

$AB = |-1-3| = 4$



問1 次の2点間の距離を求めよ。

(1) $O(0)$，$A(3)$

$OA = |3-0| = |3| = \mathbf{3}$

(2) $A(-1)$，$B(5)$

$AB = |5-(-1)| = |6| = \mathbf{6}$

(3) $A(7)$，$B(3)$

$AB = |3-7| = |-4| = \mathbf{4}$

座標平面上の2点間の距離

（教科書 p.62）

> 2点間の距離
>
> 2点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 間の距離は
>
> $$\mathbf{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
>
> とくに，原点Oと点 $P(x, y)$ の距離は　$\mathbf{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$

例2 2点 $A(-2, 4)$，$B(2, 3)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-4)^2} = \sqrt{17}$$

原点Oと点 $P(5, 12)$ の距離は

$$OP = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$$

問2 次の2点間の距離を求めよ。

(1) $A(2, 1)$，$B(5, 7)$

$AB = \sqrt{(5-2)^2+(7-1)^2}$

$= \sqrt{45} = \mathbf{3\sqrt{5}}$

(2) $A(-3, 5)$，$B(-2, -2)$

$AB = \sqrt{\{-2-(-3)\}^2+(-2-5)^2}$

$= \sqrt{50} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

(3) $O(0, 0)$，$P(-4, 3)$

$OP = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

(4) $A(8, -2)$，$B(8, -19)$

$AB = \sqrt{(8-8)^2+\{-19-(-2)\}^2}$

$= \sqrt{17^2} = \mathbf{17}$

例3 3点 $A(2, 3)$，$B(1, 1)$，$C(5, -1)$ を頂点とする△ABCは，どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の3辺の長さは

$AB = \sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{5}$

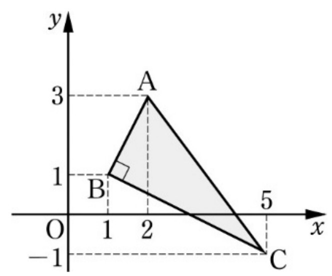
$BC = \sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$

であるから　$AB^2+BC^2 = CA^2$

よって，△ABCは（ ∠Bを直角とする直角三角形 ）である。



問3 次の 3 点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1) A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 2)$, C$(3,\ -1)$

$\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+\{1-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$ が成り立つ。

ゆえに，△ABC は **∠B を直角とし，AB = BCの直角二等辺三角形**である。

(2) A$(2,\ \sqrt{3})$, B$(-1,\ 2\sqrt{3})$, C$(-1,\ 0)$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{\{-1-(-1)\}^2+\left(0-2\sqrt{3}\right)^2}$

$=2\sqrt{3}$

$\mathrm{CA}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

ゆえに，**△**ABC は**正三角形**である。

例 4 2 点 A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 3)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めてみよう。点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする。

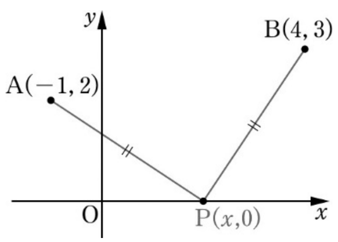
$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より　　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって

$(x+1)^2+(-2)^2=(x-4)^2+(-3)^2$

これを解くと　　$x=2$

すなわち　　P$(2,\ 0)$



問4 2 点 A$(1,\ 1)$, B$(4,\ 4)$ から等距離にある y 軸上の点 Q の座標を求めよ。

点 Q の座標を $(0,\ y)$ とすると

$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$ より　　$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{BQ}^2$

よって　　$(-1)^2+(y-1)^2=(-4)^2+(y-4)^2$

これを解いて　$y=5$

ゆえに　**Q$(0,\ 5)$**

2 内分点・外分点

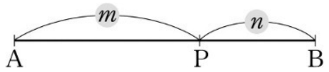
数直線上の内分点・外分点

（教科書 p.64）

m, n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$

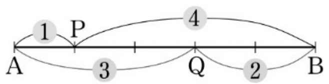


が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に（② 内分 ）するという。

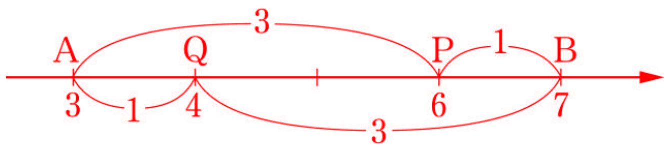
例 5 右の図において

点 P は線分 AB を（ 1 : 4 ）に内分し，

点 Q は線分 AB を（ 3 : 2 ）に内分する。

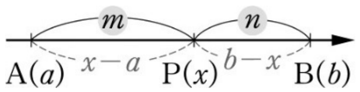


問5 2 点 A(3)，B(7) に対して，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，1 : 3 に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。



2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。$a<b$ のとき，$a<x<b$ となるから

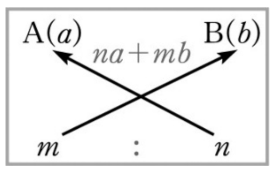
$\mathrm{AP}=x-a$,　　$\mathrm{PB}=b-x$



である。$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ であるから

$(x-a):(b-x)=m:n$

すなわち　$m(b-x)=n(x-a)$



ゆえに　（③ $x=\frac{na+mb}{m+n}$ ）

$a>b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

とくに，線分 AB の（④ 中点 ）の座標は（⑤ $\frac{a+b}{2}$ ）である。

問6 2 点 A(-4)，B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M

$\frac{-4+6}{2}=1$ であるから　　**M(1)**

(2)　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P

$\frac{2\cdot(-4)+3\cdot6}{3+2}=2$ であるから　　**P(2)**

(3)　線分 AB を 1 : 4 に内分する点 Q

$\frac{4\cdot(-4)+1\cdot6}{1+4}=-2$ であるから　　**Q(−2)**

(4)　線分 BA を 1 : 4 に内分する点 R

$\frac{4\cdot6+1\cdot(-4)}{1+4}=4$ であるから　　**R(4)**

m, n を異なる正の数とする。

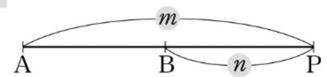
線分 AB の延長上に点 P があり

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$

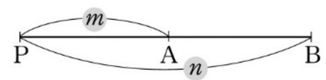
が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に

（⑥ 外分 ）するという。

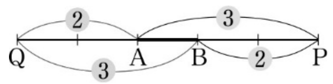
$m>n$ のとき



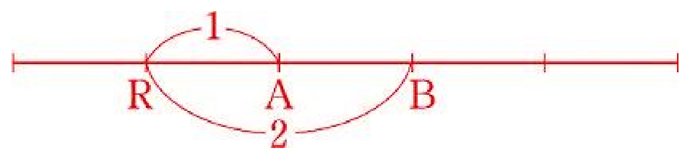
$m<n$ のとき



例 6 右の図の点 P は線分 AB を（ 3 : 2 ）に外分し，点 Q は（ 2 : 3 ）に外分する。



問7 例 6 の線分 AB を 1 : 2 に外分する点 R を図示せよ。

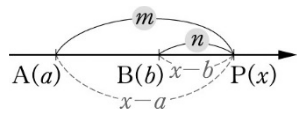


2 点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a<b$，$m>n$ とすると，点 P は線分 AB の右側にあるから

$$a<b<x$$

となる。

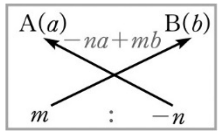


よって　$\mathrm{AP}=x-a$，　$\mathrm{PB}=x-b$

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ であるから

$$(x-a):(x-b)=m:n$$

すなわち　$m(x-b)=n(x-a)$



ゆえに　（⑦　$x=\dfrac{-na+mb}{m-n}$　）

この式は a と b，m と n の大小に関係なく成り立つ。

問8　2 点 A(−5)，B(7) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P

$$\frac{-1\cdot(-5)+2\cdot7}{2-1}=19$$

であるから　**P(19)**

(2)　線分 AB を 1 : 3 に外分する点 Q

$$\frac{-3\cdot(-5)+1\cdot7}{1-3}=-11$$

であるから　**Q(−11)**

座標平面上の内分点・外分点

（教科書 p.66）

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標
2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に**内分**する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$ $m:n$ に**外分**する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$ とくに，線分 AB の**中点**の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

例 7　2 点 A(−2, 1)，B(4, 4) がある。

線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めてみよう。

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}=2,\qquad y=\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}=3$$

したがって，求める点 P の座標は（　(2, 3)　）である。

線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めてみよう。

$\mathrm{Q}(x',\ y')$ とすると

$$x'=\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot4}{2-1}=10,\qquad y'=\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}=7$$

したがって，求める点 Q の座標は（　(10, 7)　）である。

問9 次の 2 点 A, B を結ぶ線分 AB を，3 : 2 に内分する点 P，3 : 2 に外分する点 Q，および線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(1) A(1, 3), B(6, 5)

$$\frac{2\cdot1+3\cdot6}{3+2}=4,\quad \frac{2\cdot3+3\cdot5}{3+2}=\frac{21}{5}$$

であるから　$\mathbf{P\left(4,\ \frac{21}{5}\right)}$

$$\frac{-2\cdot1+3\cdot6}{3-2}=16,$$

$$\frac{-2\cdot3+3\cdot5}{3-2}=9$$

であるから　$\mathbf{Q(16,\ 9)}$

$$\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2},\quad \frac{3+5}{2}=4$$

であるから　$\mathbf{M\left(\frac{7}{2},\ 4\right)}$

(2) A(−2, 3), B(4, −1)

$$\frac{2\cdot(-2)+3\cdot4}{3+2}=\frac{8}{5},$$

$$\frac{2\cdot3+3\cdot(-1)}{3+2}=\frac{3}{5}$$

であるから　$\mathbf{P\left(\frac{8}{5},\ \frac{3}{5}\right)}$

$$\frac{-2\cdot(-2)+3\cdot4}{3-2}=16,$$

$$\frac{-2\cdot3+3\cdot(-1)}{3-2}=-9$$

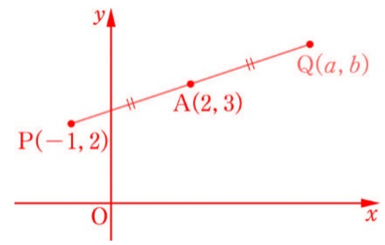
であるから　$\mathbf{Q(16,\ -9)}$

$$\frac{-2+4}{2}=1,\quad \frac{3+(-1)}{2}=1$$

であるから　$\mathbf{M(1,\ 1)}$

例題 1 点 A(2, 3) に関して，点 P(−1, 2) と対称な点 Q の座標を求めよ。

解 点 Q の座標を $(a,\ b)$ とすると，線分 PQ の中点が点 A であるから



$$\frac{-1+a}{2}=2,\quad \frac{2+b}{2}=3$$

したがって　$a=5,\ b=4$

求める点 Q の座標は　(5, 4)

問 10 4 点 A(−1, −1), B(5, −2), C(3, 3), D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1) 対角線 AC の中点 M

$$\frac{-1+3}{2}=1,\quad \frac{-1+3}{2}=1$$

であるから　$\mathbf{M(1,\ 1)}$

(2) 頂点 D

対角線 BD の中点が M(1, 1) であるから，D$(a,\ b)$とすると

$$\frac{5+a}{2}=1,\quad \frac{-2+b}{2}=1$$

よって　$a=-3,\ b=4$

ゆえに　$\mathbf{D(-3,\ 4)}$

三角形の重心

（教科書 p.68）

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を（⑧　中線　）という。三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，この点をその三角形の（⑨　重心　）という。重心はそれぞれの中線を 2：1 に内分する点である。

三角形の重心
3 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABC の重心 G の座標は　$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8 3 点 A(2, 3)，B(5, −4)，C(−1, 1)を頂点とする△ABC の重心 G の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{2+5+(-1)}{3}=2,\qquad y=\frac{3+(-4)+1}{3}=0$$

すなわち　G(2, 0)

問 11 3 点 A(3, 6)，B(−5, −1)，C(8, −7)を頂点とする△ABC の重心 G の座標を求めよ。

$$\frac{3+(-5)+8}{3}=2,$$

$$\frac{6+(-1)+(-7)}{3}=-\frac{2}{3}$$

であるから　$G\left(2,\ -\frac{2}{3}\right)$

3 直線の方程式

（教科書 p.69）

1 次関数 $y = mx + n$ のグラフは，傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を，この直線の（⑩　y 切片　）という。

一般に，x, y についての方程式を成り立たせる点 (x, y) のえがく図形を，その（⑪　方程式の表す図形　）または（⑫　方程式のグラフ　）という。また，その方程式を，その（⑬　図形の方程式　）という。

例 9 (1)　方程式 $3x - 2y + 4 = 0$ は

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

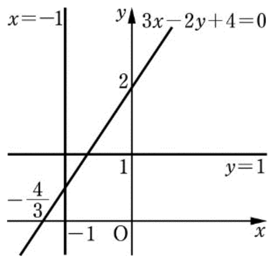
と変形できるから，傾きが（　$\frac{3}{2}$　），y 切片が（　2　）の直線を表す。

(2)　方程式 $y - 1 = 0$ は　$y = 1$

と変形できるから，点（　$(0,\ 1)$　）を通り，（　x 軸　）に平行な直線を表す。

(3)　方程式 $x + 1 = 0$ は　$x = -1$

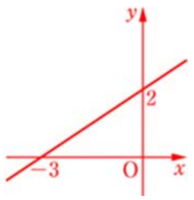
と変形できるから，点（　$(-1,\ 0)$　）を通り，（　y 軸　）に平行な直線を表す。



問 12　次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

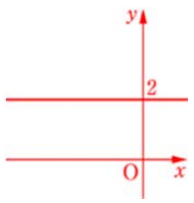
(1)　$2x - 3y + 6 = 0$

方程式 $2x - 3y + 6 = 0$ は $y = \frac{2}{3}x + 2$ と変形できるので，この方程式が表す図形は，傾き $\frac{2}{3}$，y 切片 2 の直線である。



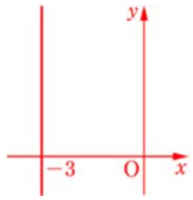
(2)　$y - 2 = 0$

方程式 $y - 2 = 0$ は $y = 2$ と変形できるので，この方程式が表す図形は，点 $(0,\ 2)$ を通り x 軸に平行な直線である。



(3)　$x + 3 = 0$

方程式 $x + 3 = 0$ は $x = -3$ と変形できるので，この方程式が表す図形は，点 $(-3,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線である。



直線の方程式のいろいろな形

（教科書 p.70）

1 点を通り，傾き m の直線
点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式は $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$

例 10 点 $(2,\ -5)$ を通り，傾き -4 の直線の方程式は

$$y - (-5) = -4(x - 2)$$

すなわち　$y = -4x + 3$

問 13 点 $(-3,\ 4)$ を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが 2

点 $(-3,\ 4)$ を通り，傾きが 2 の直線の方程式は

$$y - 4 = 2\{x - (-3)\}$$

すなわち　$\boldsymbol{y = 2x + 10}$

(2)　傾きが $-\frac{1}{3}$

点 $(-3,\ 4)$ を通り，傾きが $-\frac{1}{3}$ の直線の方程式は

$$y - 4 = -\frac{1}{3}\{x - (-3)\}$$

すなわち　$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x + 3}$

２点を通る直線

2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$x_1 = x_2$ のとき　$x = x_1$

例 11 2 点 A$(-3, 2)$, B$(6, 8)$ を通る直線の方程式は

$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)}\{x - (-3)\}$　すなわち　$y = \frac{2}{3}x + 4$

問 14 次の 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(2, -3)$, B$(4, 3)$

2 点 A$(2, -3)$, B$(4, 3)$を通る直線の方程式は

$$y - (-3) = \frac{3 - (-3)}{4 - 2}(x - 2)$$

すなわち　$y = 3x - 9$

(2)　A$(6, -1)$, B$(-3, 5)$

2 点 A$(6, -1)$, B$(-3, 5)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{-3 - 6}(x - 6)$$

すなわち　$y = -\frac{2}{3}x + 3$

(3)　A$(-2, 0)$, B$(-2, -6)$

2 点 A$(-2, 0)$, B$(-2, -6)$ を通る直線の方程式は　$x = -2$

(4)　A$(4, 7)$, B$(-3, 7)$

2 点 A$(4, 7)$, B$(-3, 7)$ を通る直線の方程式は　$y = 7$

(参考)　異なる 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式を

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

とすると，$x_1 \neq x_2$ のとき，$x_1 = x_2$ のときと場合分けする必要がない。

問 15 3 点 A$(-2, 6)$, B$(7, 3)$, C$(a, a+4)$ があるとき，次の問に答えよ。

(1)　2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

2 点 A$(-2, 6)$, B$(7, 3)$ を通る直線の方程式は

$$y - 6 = \frac{3 - 6}{7 - (-2)}\{x - (-2)\}$$

すなわち　$y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$

(2)　3 点 A, B, C が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

点 C$(a, a+4)$ が (1) で求めた直線

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$ 上にあるから

$$a + 4 = -\frac{1}{3}a + \frac{16}{3}$$

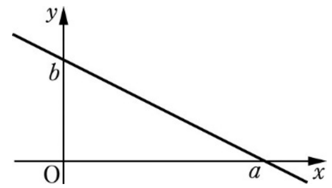
ゆえに　$a = 1$

例 12 2 点 $(a, 0)$, $(0, b)$ を通る直線の方程式は，$a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき

$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - a)$

である。これを変形すると

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



注意　直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の ([14]　x 切片　) という。例 12 の直線では x 切片がa, y 切片が b である。

問 16 x 切片が 3, y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

x 切片が 3, y 切片が -2 の直線，すなわち，2 点 $(3, 0)$, $(0, -2)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

(参考)　$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ は空間において，$(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$の 3 点を通る平面の方程式を表す。

4 ２直線の関係

２直線の平行と垂直

（教科書 p.72）

２直線の平行条件・垂直条件
２直線 $y = mx + n$，$y = m'x + n'$ について 平行条件は $\boldsymbol{m = m'}$　　垂直条件は $\boldsymbol{mm' = -1}$

問 17 次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

① $y = -2x + 5$　　② $x - 3y + 7 = 0$

③ $6x + 2y + 3 = 0$　　④ $6x + 3y = 1$

① $y = -2x + 5$　　② $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

③ $y = -3x - \frac{3}{2}$　　④ $y = -2x + \frac{1}{3}$

ゆえに，互いに平行なもの　①と④

互いに垂直なもの　②と③

例題 2 点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x + 2y - 9 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

解 直線 $3x + 2y - 9 = 0$ を l とすると，l の傾きは $-\frac{3}{2}$ である。

よって，l に平行な直線の傾きは $-\frac{3}{2}$ であるから，点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に平行な直線の方程式は

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

すなわち　$3x + 2y - 1 = 0$　……答

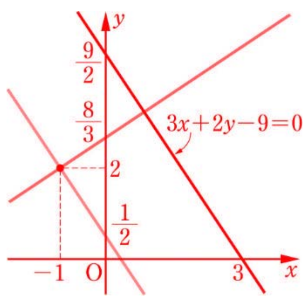
また，l に垂直な直線の傾きを m とすると

$-\frac{3}{2}m = -1$　すなわち　$m = \frac{2}{3}$

点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

すなわち　$2x - 3y + 8 = 0$　……答



問 18 点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $2x - 5y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

直線 $2x - 5y - 1 = 0$ を l とすると，l の傾きは $\frac{2}{5}$ である。

直線 l に平行な直線の傾きは $\frac{2}{5}$ であるから，点 $(3,\ -1)$ を通り，l に平行な直線の方程式は

$y - (-1) = \frac{2}{5}(x - 3)$

すなわち　$\boldsymbol{2x - 5y - 11 = 0}$

また，直線 l に垂直な直線の傾きを m とすると

$\frac{2}{5}m = -1$ より　$m = -\frac{5}{2}$

したがって，点 $(3,\ -1)$ を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$y - (-1) = -\frac{5}{2}(x - 3)$$

すなわち　$\boldsymbol{5x + 2y - 13 = 0}$

問 19 直線 $ax - 2y + 5 = 0$ が直線 $2x + y - 10 = 0$ に垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

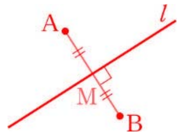
直線 $ax - 2y + 5 = 0$ の傾きは $\frac{a}{2}$ であり，直線 $2x + y - 10 = 0$ の傾きは -2 である。よって，これら２直線が垂直であるから

$$\frac{a}{2}\cdot(-2) = -1$$

ゆえに　$\boldsymbol{a = 1}$

例題 3 直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 A(1, 2) と対称な点 B の座標を求めよ。

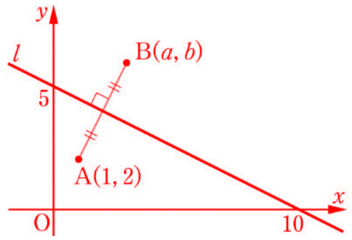
考え方 2 点 A，B が，ある直線 l に関して対称である条件は
[1]　直線 AB は直線 l に垂直である
[2]　線分 AB の中点 M は直線 l 上にある
が成り立つことである。



解 直線 $x+2y-10=0$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　$-\frac{1}{2}$

直線 AB の傾きは　$\frac{b-2}{a-1}$



$l \perp$ AB であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-2}{a-1}=-1$$

すなわち

$$b=2a \qquad \cdots\cdots ①$$

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\frac{a+1}{2}+2\cdot\frac{b+2}{2}-10=0$$

すなわち　$a+2b-15=0$　……②

①，②より

$$a=3,\ b=6$$

したがって，点 B の座標は　(3, 6)

問 20 直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 A(4, −1) と対称な点 B の座標を求めよ。

直線 $4x-2y-3=0$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　2

直線 AB の傾きは　$\frac{b-(-1)}{a-4}=\frac{b+1}{a-4}$

$l \perp$ AB であるから

$$2\cdot\frac{b+1}{a-4}=-1$$

すなわち　$a+2b=2$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b-1}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$4\cdot\frac{a+4}{2}-2\cdot\frac{b-1}{2}-3=0$$

すなわち　$2a-b+6=0$　……②

①，②より　$a=-2,\ b=2$

ゆえに　**B(−2, 2)**

2 直線の交点

（教科書 p.75）

例題 4 2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ について，次の問に答えよ。
(1)　2 直線の交点の座標を求めよ。
(2)　この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解 (1) 連立方程式

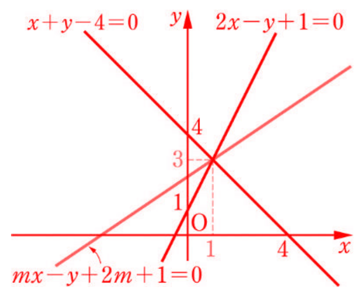
$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

を解くと

$$x=1,\ y=3$$

よって，求める交点の座標は

(1, 3)



(2) 直線 $mx-y+2m+1=0$ が点 (1, 3) を通るから

$$m-3+2m+1=0$$

したがって

$$m=\frac{2}{3}$$

問 21 次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1)　$5x-4y+13=0,\quad 3x+y+1=0$

連立方程式 $\begin{cases}5x-4y+13=0\\3x+y+1=0\end{cases}$

を解くと　$x=-1,\ y=2$

ゆえに，求める交点の座標は　$\mathbf{(-1,\ 2)}$

(2)　$3x-y-6=0,\quad 6x+5y+2=0$

連立方程式 $\begin{cases}3x-y-6=0\\6x+5y+2=0\end{cases}$

を解くと　$x=\frac{4}{3},\ y=-2$

ゆえに，求める交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{4}{3},\ -2\right)}$

問 22 3 直線

$x-2y+8=0,\qquad 2x+3y-5=0,\qquad mx-y-2m+8=0$

が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ。

連立方程式 $\begin{cases}x-2y+8=0\\2x+3y-5=0\end{cases}$

を解くと　$x=-2,\ y=3$

よって，2 直線 $x-2y+8=0$，$2x+3y-5=0$ の交点の座標は　$(-2,\ 3)$

直線 $mx-y-2m+8=0$ がこの交点を通るから

$m\cdot(-2)-3-2m+8=0$

ゆえに　$\boldsymbol{m=\frac{5}{4}}$

2 直線の交点を通る直線

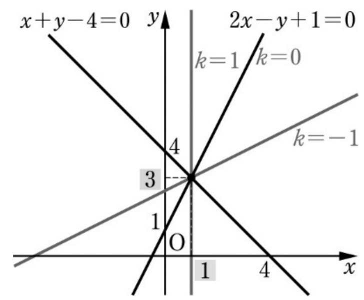
（教科書 p.76）

2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ に対して，方程式

（⑮　$k(x+y-4)+(2x-y+1)=0$　）　……①

を考える。ただし，k は定数とする。

方程式①が 2 直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。



$x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$

を同時に満たす x，y の値の組 $x=1$，$y=3$ は k の値に関係なく①を満たす。

よって，①で表される図形は 2 直線の交点 (1, 3) を通る。

また，①を変形すると

$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0$　……②

$k+2$ と $k-1$ は同時には 0 にならないから，②の表す図形は直線である。

よって，①は 2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ の交点 (1, 3) を通る直線を表す。

例題 5 2 直線 $3x+4y-17=0$，$x-2y+1=0$ の交点と点 (2, 3) を通る直線の方程式を求めよ。

解 k を定数として，2 直線の交点を通る直線の方程式を

$k(3x+4y-17)+(x-2y+1)=0$　……①

とおく。①に点 (2, 3) の座標 $x=2$，$y=3$ を代入すると

$k(3\cdot2+4\cdot3-17)+(2-2\cdot3+1)=0$ より　$k=3$

これを①に代入して整理すると，求める直線の方程式は

$x+y-5=0$

問 23 2 直線 $4x-5y+5=0$，$x+2y-6=0$ の交点と点 (1, 1) を通る直線の方程式を求めよ。

k を定数として，2 直線の交点を通る直線の方程式を

$k(4x-5y+5)+(x+2y-6)=0$　……①

とおく。①に点 $(1,\ 1)$ の座標を代入すると

$k(4\cdot1-5\cdot1+5)+(1+2\cdot1-6)=0$

より　$k=\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると，求める直線の方程式は

$\mathbf{16x-7y-9=0}$

点と直線の距離

（教科書 p.77）

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

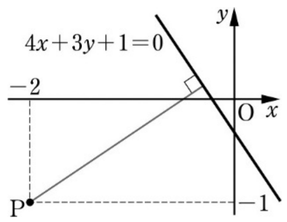
$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

例13 点 P$(-2,\ -1)$ と直線

$4x+3y+1=0$

の距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$



問 24 次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $x+2y+2=0$

$$\frac{|0+2\cdot0+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt5}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt5}{5}}$$

(2)　点 $(3,\ 4)$ と直線 $2x-3y+1=0$

$$\frac{|2\cdot3-3\cdot4+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{13}}{13}}$$

(3)　点 $(7,\ -1)$ と直線 $y=-3x+6$

直線の式を変形して

$3x+y-6=0$

ゆえに

$$\frac{|3\cdot7-1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{10}}{5}}$$

（参考）　空間において，平面の方程式は $ax+by+cz+d=0$と表され，

点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$と平面$ax+by+cz+d=0$ の距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

である。(数学 B の教科書参照)

座標を用いた図形の性質の証明

（教科書 p.78）

応用例題 6 △ABC の辺 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)}$$

であることを証明せよ。

証明 M を原点とし，直線 BC を x 軸にとると，

三角形の頂点A，B，C の座標はそれぞれ

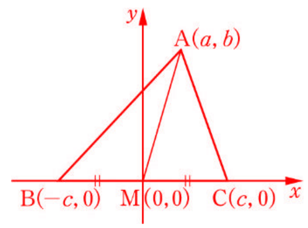
A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$

とおける。このとき

$\mathrm{AB^2+AC^2}=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$

$\mathrm{AM^2+BM^2}=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$

ゆえに　$\mathrm{AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)}$



問 25 △ABC の辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とすると

$$\mathrm{2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)}$$

であることを証明せよ。

D を原点とし，直線BC を x 軸にとると，三角形の頂点A，B，C の座標はそれぞれ

A$(a,\ b)$，

B$(-c,\ 0)$，

C$(2c,\ 0)$

とおける。このとき

$\mathrm{2AB^2+AC^2}$

$=2\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}$

$=3a^2+3b^2+6c^2$

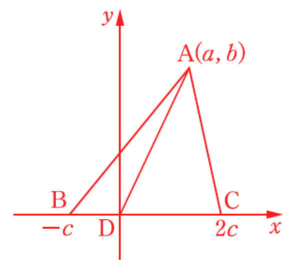
$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$\mathrm{AD^2+2BD^2}$

$=(a^2+b^2)+2c^2=a^2+b^2+2c^2$

ゆえに

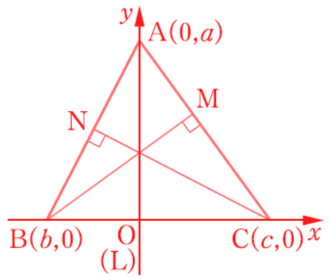
$\mathrm{2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)}$



応用例題 7 △ABC の 3 つの頂点から，それぞれの対辺に下ろした垂線 AL, BM, CN は 1 点で交わることを証明せよ。

証明 △ABC が直角三角形ならば，明らかに 3 本の垂線は直角の頂点で交わる。
次に，△ABC が直角三角形でないならば，直線 BC を x 軸，垂線 AL を y 軸にとると，
A$(0,\ a)$, B$(b,\ 0)$, C$(c,\ 0)$ とおける。
ただし，$a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ である。
直線 AC の傾きは $-\frac{a}{c}$ であるから，
垂線 BM の方程式は

$$y=\frac{c}{a}(x-b)$$



また，直線 AB の傾きは $-\frac{a}{b}$ であるから，垂線 CN の方程式は

$$y=\frac{b}{a}(x-c)$$

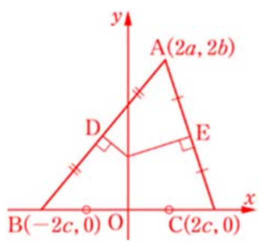
直線 BM, CN はともに y 軸上の点 $\left(0,\ -\frac{bc}{a}\right)$ を通る。

したがって，3 本の垂線 AL, BM, CN は 1 点で交わる。

例題 7 における 3 本の垂線の交点を△ABC の（⑯ 垂心 ）という。

問 26 △ABC において，各辺の垂直二等分線は，1 点で交わることを証明せよ。

△ABC が直角三角形ならば，明らかに 3 本の垂直二等分線は斜辺の中点で交わる。
次に，△ABC が直角三角形でないならば，辺 BC の中点を原点とし，直線 BC を x 軸にとると，三角形の頂点 A，B，C の座標はそれぞれ
A$(2a,\ 2b)$,
B$(-2c,\ 0)$,
C$(2c,\ 0)$
とおける。



ただし，$a\neq\pm c$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ である。
辺 BC の垂直二等分線の方程式は

$$x=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

直線 CA の傾きは

$$\frac{2b-0}{2a-2c}=\frac{b}{a-c}$$

であるから，辺 CA の垂直二等分線は，この辺の中点 $(a+c,\ b)$ を通り，傾き $-\frac{a-c}{b}$ の直線であり，その方程式は

$$y-b=-\frac{a-c}{b}\{x-(a+c)\}$$

すなわち

$$y=-\frac{a-c}{b}x+\frac{a^2+b^2-c^2}{b} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②の交点の座標は

$$\left(0,\ \frac{a^2+b^2-c^2}{b}\right) \qquad \cdots\cdots ③$$

また，直線 AB の傾きは

$$\frac{2b-0}{2a-(-2c)}=\frac{b}{a+c}$$

であるから，辺 AB の垂直二等分線は，この辺の中点 $(a-c,\ b)$ を通り，傾き $-\frac{a+c}{b}$ の直線であり，その方程式は

$$y-b=-\frac{a+c}{b}\{x-(a-c)\}$$

すなわち

$$y=-\frac{a+c}{b}x+\frac{a^2+b^2-c^2}{b} \qquad \cdots\cdots ④$$

①，④の交点の座標は

$$\left(0,\ \frac{a^2+b^2-c^2}{b}\right) \qquad \cdots\cdots ⑤$$

③，⑤は同一の点であるから，△ABC の各辺の垂直二等分線は，1 点で交わる。

問 題

（教科書 p.80）

1 2 点 $A(-2)$，$B(5)$ を結ぶ線分 AB を 3：4 に内分する点を C，3：4 に外分する点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

点 C の座標は　$\frac{4\cdot(-2)+3\cdot5}{3+4}=1$

点 D の座標は　$\frac{-4\cdot(-2)+3\cdot5}{3-4}=-23$

ゆえに　$CD=|-23-1|=\mathbf{24}$

2 △ABC の 2 つの頂点 A，B および重心 G の座標が $A(-7,\ -5)$，$B(2,\ -2)$，$G(-2,\ -1)$ であるとき，頂点 C の座標を求めよ。

$C(a,\ b)$ とすると

$$\frac{(-7)+2+a}{3}=-2,$$

$$\frac{(-5)+(-2)+b}{3}=-1$$

よって　$a=-1,\ b=4$

ゆえに　$\mathbf{C(-1,\ 4)}$

3 2 点 $A(3,\ 4)$，$B(-2,\ 7)$ を通る直線を l とするとき，次の直線の方程式を求めよ。

直線 l の傾きは　$\frac{7-4}{-2-3}=-\frac{3}{5}$

(1)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に平行な直線

点 $(1,\ 1)$ を通り，傾き $-\frac{3}{5}$ の直線であるから　$y-1=-\frac{3}{5}(x-1)$

すなわち　$\mathbf{3x+5y-8=0}$

(2)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に垂直な直線

求める直線の傾きを m とすると

$-\frac{3}{5}m=-1$ より　$m=\frac{5}{3}$

よって　$y-1=\frac{5}{3}(x-1)$

すなわち　$\mathbf{5x-3y-2=0}$

4 2 点 $A(1,\ -1)$，$B(3,\ -7)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

線分 AB の中点は　$(2,\ -4)$

直線 AB の傾きは　$\frac{-7-(-1)}{3-1}=-3$

よって，求める直線の傾きを m とすると

$-3m=-1$ より　$m=\frac{1}{3}$

ゆえに，線分 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-(-4)=\frac{1}{3}(x-2)$$

すなわち　$\mathbf{x-3y-14=0}$

5 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

ただし，$b_1\neq0$，$b_2\neq0$ とする。

直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$ の傾きは　$-\frac{a_1}{b_1}$

直線 $a_2x+b_2y+c_2=0$ の傾きは　$-\frac{a_2}{b_2}$

である。

(1)　2 直線が**平行**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0}$

2 直線が平行であるための条件は

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}$$

ゆえに

2 直線が平行　$\Longleftrightarrow$　$a_1b_2-b_1a_2=0$

(2)　2 直線が**垂直**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

2 直線が垂直であるための条件は

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\cdot\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$$

ゆえに

2 直線が垂直　$\Longleftrightarrow$　$a_1a_2+b_1b_2=0$

〔注意〕(1)，(2)は，$b_1=0$ または $b_2=0$ のときも成り立つ。

6 2 直線　$ax+4y-1=0$
$x+(a-3)y-2=0$
が平行になるような定数 a の値を求めよ。また，垂直になるような定数 a の値を求めよ。

2 直線が平行であるための条件は

$a\cdot(a-3)-4\cdot 1=0$

$a^2-3a-4=0$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-1,\ 4}$

2 直線が垂直であるための条件は

$a\cdot 1+4\cdot(a-3)=0$

$5a-12=0$

ゆえに　$\boldsymbol{a=\frac{12}{5}}$

〔注意〕５の〔注意〕で述べたように，係数の a や$a-3$ が 0 かどうかを配慮する必要はない。

7 直線 $y=x$ に関して，点 $\mathrm{A}(p,\ q)$ と対称な点 B の座標を $p,\ q$ で表せ。ただし，$p\neq q$ とする。

直線 $y=x$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　1

直線 AB の傾きは　$\frac{b-q}{a-p}$

$l\perp\mathrm{AB}$ であるから

$1\cdot\frac{b-q}{a-p}=-1$

すなわち　$a+b=p+q$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+p}{2},\ \frac{b+q}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\frac{b+q}{2}=\frac{a+p}{2}$$

整理すると　$-a+b=p-q$　……②

①，②より　$a=q,\ b=p$

ゆえに　$\mathbf{B}(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})$

8 点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ と直線 $5x+12y+4=0$ 上を動く点 P がある。線分 AP の長さの最小値を求めよ。

線分 AP の長さが最小となるのは，線分 AP と直線 $5x+12y+4=0$ が垂直なときである。
よって，最小値を求めるには点 $\mathrm{A}(2,\ 1)$ と直線 $5x+12y+4=0$ の距離を求めればよい。

$$\frac{|5\cdot 2+12\cdot 1+4|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\mathbf{2}$$