1 節 整式の乗法･除法と分数式

1 整式の乗法と因数分解

3 次式の乗法公式

（教科書 p.6）

例 1 $(a+b)^3=$

問1 $(a-b)^3$を展開せよ。

次の 3 次式の乗法公式が成り立つ。

3 次式の乗法公式(1)
$\boxed{1}$ $\boldsymbol{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ $\boxed{2}$ $\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

例 2 (1) $(x-2)^3=$

(2) $(3x+2y)^3=$

問2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)^3$

(2) $(3x-1)^3$

(3) $(x+10y)^3$

(4) $(2x-5y)^3$

また，次の乗法公式も成り立つ。

3 次式の乗法公式(2)
$\boxed{3}$ $\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$ $\boxed{4}$ $\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

問3 前のページの公式$\boxed{3}$，$\boxed{4}$が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$の証明

$\boxed{4}$の証明

問4 次の式を展開せよ。

(1) $(x+7)(x^2-7x+49)$

(2) $(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$

3次式の因数分解

（教科書 p.7）

前のページの乗法公式$\boxed{3}$，$\boxed{4}$を逆に利用することにより，次の公式が成り立つ。

3次式の因数分解
$\boxed{5}$ $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ $\boxed{6}$ $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例 3 (1) $x^3+125=x^3+5^3=$

(2) $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$

$=$

問5 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+1

(2) x^3-8

(3) $64x^3-125y^3$

例 4 $x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 =$

問6 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^6 - 64y^6$

(2) $x^6 + 7x^3 - 8$

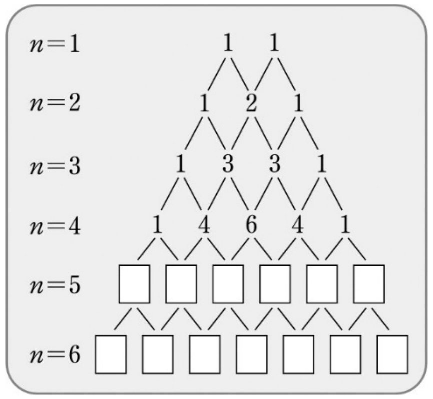
2 二項定理

パスカルの三角形

(教科書 p.8)

問7 $(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が$(a+b)^4$の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^n$の展開式の係数を次々と求め, 右のように並べたものを(① 　　　　　　　　)という。



問8 右のパスカルの三角形で, $n=5$, $n=6$ の行の空所をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

二項定理

(教科書 p.9)

一般に，次の（② 　　　　　　）が成り立つ。

二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

$(a+b)^n$の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r \quad (r=0,1,2,\cdots,n)$$

と表される。これを$(a+b)^n$の展開式の（③ 　　　　　　）という。ただし，a^0 や b^0 は 1 と定める。また，${}_n\mathrm{C}_r$を（④ 　　　　　　）ともいう。

例5 二項定理を用いて式を展開すると，次のようになる。

(1) $(2a+b)^5 =$

(2) $(x-5y)^3 =$

問9 二項定理を用いて，次の式を展開せよ。

(1) $(3a+b)^4$

(2) $(2x-3y)^4$

(3) $(2x^2+1)^5$

二項定理の応用

（教科書 p.10）

例題 1 $(2x^2-1)^8$の展開式におけるx^6の係数を求めよ。

解

問 10 次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1) $(3x^2+2)^6$ における x^2

(2) $(x-3y)^7$ における x^2y^5

応用 例題 2 $(x+y+z)^6$ の展開式における x^2y^3z の係数を求めよ。

考え方

解

問 11 $(x+2y+3z)^5$ の展開式における x^2y^2z および x^3y^2 の係数を求めよ。

一般に，次の定理が成り立つ。

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}$ の展開
$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^p b^q c^r$　　ただし，$p+q+r=n$

例 6 $(x-2y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めてみよう。

展開式における xy^2z^2 の項は

であるから，xy^2z^2 の係数は

問 12 $(x-y+2z)^7$ の展開式における $x^2y^3z^2$ の係数を求めよ。

例 7 二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において，$a=1,\ b=x$ とおくと

さらに，$x=1$ を代入すると

問 13 次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

(2)　$0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

3 整式の除法

（教科書p.13）

例 8 整式 $A=2x^2-7x+5$，整式 $B=x-3$ のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$
\begin{array}{rl}
 & \;\; 2x \;\; -1 \\
x-3 \,\big) & 2x^2-7x+5 \\
 & 2x^2-6x \qquad \cdots (x-3)\times 2x \\
\hline
 & \qquad -x+5 \\
 & \qquad -x+3 \cdots (x-3)\times(-1) \\
\hline
 & \qquad\qquad 2
\end{array}
$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x-3$ よりも次数が低いから，これ以上計算を続けることはできない。

このとき，A を B で割ったときの（　　　　　）は $2x-1$，（　　　　　）は 2 であるという。上の割り算から

$A=B\times(2x-1)+2$　◀割る式×商＋余り　……①

が成り立つことがわかる。

問 14 整式 $3x^2+2x+1$ を整式 $3x-4$ で割り，商と余りを求めよ。
また，例 8 にならって，整式 $3x^2+2x+1$ を①の形に表せ。

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$\boldsymbol{A=BQ+R}$,　　$\boldsymbol{R}$ **の次数 <** $\boldsymbol{B}$ **の次数**

とくに，$R=0$ となるとき，A は B で（⑤　　　　　　　）という。このとき，B は A の（⑥　　　　　）であるという。

例題 3 整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

$A=2x^3+4x^2+7$,　　$B=2x^2-3$

解

注意 このような計算では，割る式も割られる式も，文字 x について降べきの順に整理しておくとよい。

問 15 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 8$,　　　$B = x^2 - x - 3$

(2)　$A = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$,　　　$B = 3x - 2$

(3)　$A = 3x^3 + 7x^2 + 5$,　　　$B = x^2 + 3x - 1$

(4)　$A = 2 + 3x + 2x^3 + x^4$,　　　$B = 1 + x^2$

例題 4　整式 $x^3 - 3x^2 - 6x - 2$ をある整式 B で割ると，商が $x + 2$，余りが $3x - 4$ である。このとき，整式 B を求めよ。

解

問 16 整式 $3x^3 + 14x^2 - 4x + 5$ をある整式 B で割ると，商が $3x - 1$，余りが $7x + 3$ である。このとき，整式 B を求めよ。

応用
例題
5

$A=2x^3-5x^2y+6xy^2-8y^3$, $B=x-2y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

問 17 $A=x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$, $B=x-y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

4 分数式とその計算

（教科書 p.16）

$\frac{1}{x}$，$\frac{x+1}{x^2-3}$ のように，A を整式，B を 1 次以上の整式としたとき，
$\frac{A}{B}$ の形で表される式を（⑦　　　　　　　）という。

整式と分数式を合わせて（⑧　　　　　　　）という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。すなわち，分母と分子に共通な因数があれば（⑨　　　　　　）ができる。

これ以上約分できないとき，分数式は（⑩　　　　　　）であるという。

例 9

(1) $\frac{9a^3b}{12a^2b^3}=$

(2) $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}=$

問 18 次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1) $\dfrac{12a^4bc^2}{15a^3b^3c}$

(2) $\dfrac{2x^2+3x-2}{4x^2-1}$

(3) $\dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$

乗法・除法

例 10

$\frac{x-5}{x^2-x}\div\frac{x^2-10x+25}{x^2-4x}=\frac{x-5}{x^2-x}\times\frac{x^2-4x}{x^2-10x+25}$

$=$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 19 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+x-2}\times\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

(2) $\dfrac{x^3-8}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

問 20 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-x}+\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}$

加法・減法

（教科書 p.17）

例 11 $\frac{3}{x^2-4}-\frac{x+1}{x^2-4}=$

いくつかの分数式の分母が異なるときには，適当な整式をそれらの分母と分子に掛けて，分母が同じ分数式になおすことができる。このことを，これらの分数式を（⑪　　　　　　）するという。

例題 6 $\frac{3}{x^2+3x}+\frac{x+1}{x^2-x}$ を計算せよ。

解

問 21 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-4}$

(2) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{3x}{2x^2+x-1}$

問 22 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$

(2) $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}$

例 12

$P=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ の右辺は $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ であるから

$P=$

注意 P の分母と分子に x^2 を掛けて，次のように計算してもよい。

$$P=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x^2}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\times x^2}=\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x-1}$$

問 題

（教科書 p.19）

1 次の式を展開せよ。

(1) $(2a-3b)^3$

(2) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$

2 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3y^3-27z^3$

(2) $x^3+y^3+3y^2+3y+1$

3 次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1) $(ax-b)^{12}$ における x^{11} および x^2 （ただし，a , b は定数とする）

(2) $(x-2y+z^2)^7$ における $x^2y^3z^4$

4 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1) $A = 12x^3 - x^2 + 2,\quad B = 3x^2 - x - 1$

(2) $A = 6x^3 + x^2 - 2x + 1,\quad B = 3x - 1$

(3) $A = x^3 - 5x^2 + 8x + 1,\quad B = 2x - 6$

5 ある整式 A を $2x^2 + 4x - 3$ で割ると，商が $x - 2$，余りが $3x + 1$ である。

このとき，整式 A を求めよ。

6 次の式を計算せよ。

（1） $\dfrac{6x^2+13xy-5y^2}{2x^2-xy-3y^2}\div\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$

(2) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9}\times\dfrac{x^3-27}{3x+9}\div\dfrac{x^2-9}{3x}$

(3) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$

(4) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}\right)\div\left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}\right)$

(5) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}}$

1 節 整式の乗法･除法と分数式

1 整式の乗法と因数分解

3 次式の乗法公式

（教科書 p.6）

例 1 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

問1 $(a-b)^3$を展開せよ。

$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$= \boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

次の 3 次式の乗法公式が成り立つ。

3 次式の乗法公式(1)
$\boxed{1}$ $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ $\boxed{2}$ $\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

例 2 (1) $(x-2)^3 = x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3$

$= x^3-6x^2+12x-8$

(2) $(3x+2y)^3 = (3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2+(2y)^3$

$= 27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

問2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)^3$

$= x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$

$= \boldsymbol{x^3+3x^2+3x+1}$

(2) $(3x-1)^3$

$= (3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2-1^3$

$= \boldsymbol{27x^3-27x^2+9x-1}$

(3) $(x+10y)^3$

$= x^3+3\cdot x^2\cdot 10y+3\cdot x\cdot(10y)^2+(10y)^3$

$= \boldsymbol{x^3+30x^2y+300xy^2+1000y^3}$

(4) $(2x-5y)^3$

$= (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 5y+3\cdot 2x\cdot(5y)^2-(5y)^3$

$= \boldsymbol{8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3}$

また，次の乗法公式も成り立つ。

3 次式の乗法公式(2)
$\boxed{3}$ $\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3}$ $\boxed{4}$ $\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3}$

問3 前のページの公式$\boxed{3}$，$\boxed{4}$が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$の証明

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$

$\boxed{4}$の証明

公式$\boxed{3}$の b を $-b$ に置き換えて

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=\{a+(-b)\}\{a^2-a(-b)+(-b)^2\}$
$=a^3+(-b)^3$
$=a^3-b^3$

問4 次の式を展開せよ。

(1) $(x+7)(x^2-7x+49)$
$=(x+7)(x^2-x\cdot 7+7^2)$
$=x^3+7^3$
$=\boldsymbol{x^3+343}$

(2) $(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$
$=(5x-3y)\{(5x)^2+5x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=(5x)^3-(3y)^3$
$=\boldsymbol{125x^3-27y^3}$

3 次式の因数分解

（教科書 p.7）

前のページの乗法公式$\boxed{3}$，$\boxed{4}$を逆に利用することにより，次の公式が成り立つ。

3 次式の因数分解
$\boxed{5}$ $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$ $\boxed{6}$ $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例 3 (1) $x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-x\cdot 5+5^2)$
$=(x+5)(x^2-5x+25)$

(2) $27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$
$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

問5 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+1
$=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$
$=\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}$

(2) x^3-8
$=x^3-2^3$
$=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)$
$=\boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+4)}$

(3) $64x^3-125y^3$
$=(4x)^3-(5y)^3$
$=(4x-5y)\{(4x)^2+4x\cdot 5y+(5y)^2\}$
$=\boldsymbol{(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)}$

例 4 $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

問6 次の式を因数分解せよ。

(1) x^6-64y^6

$=(x^3)^2-(8y^3)^2$

$=(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$

$=\{x^3+(2y)^3\}\{x^3-(2y)^3\}$

$=(x+2y)\{x^2-x\cdot 2y+(2y)^2\}\times(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=\boldsymbol{(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)}$

(2) x^6+7x^3-8

$=(x^3)^2+7x^3-8$

$=(x^3+8)(x^3-1)$

$=(x^3+2^3)(x^3-1^3)$

$=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)\times(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$

$=\boldsymbol{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)}$

2 二項定理

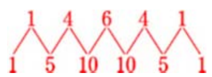
パスカルの三角形

（教科書 p.8）

問7 $(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が$(a+b)^4$の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

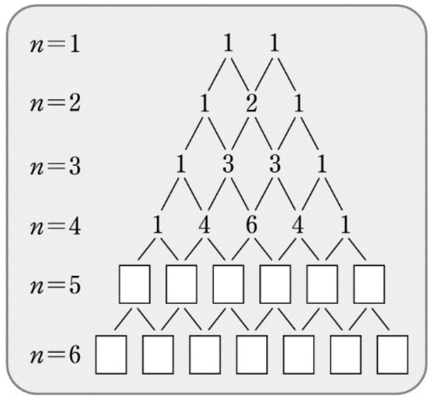
$(a+b)^5$
$=(a+b)(a+b)^4$
$=(a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$
$=a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4+a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5$
$=\boldsymbol{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

また，$(a+b)^4$の展開式の係数から

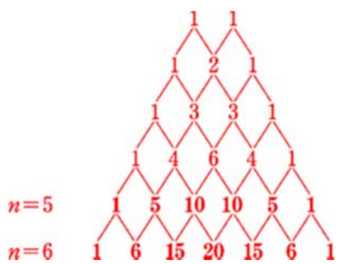


となり，先に求めた$(a+b)^5$の展開式の係数と一致する。

$(a+b)^n$の展開式の係数を次々と求め，右のように並べたものを(① パスカルの三角形)という。



問8 右のパスカルの三角形で，$n=5$，$n=6$ の行の空所をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。



よって，$(a+b)^6$の展開式は
$\boldsymbol{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$

二項定理

（教科書 p.9）

一般に，次の（② 二項定理 ）が成り立つ。

二項定理

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}={}_n\mathrm{C}_0\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}+{}_n\mathrm{C}_1\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{b}+{}_n\mathrm{C}_2\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{b}^2+\cdots$$
$$+{}_n\mathrm{C}_r\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-r}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{r}}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n-1}}+{}_n\mathrm{C}_n\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

$(a+b)^n$の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r \quad (r=0,1,2,\cdots,n)$$

と表される。これを$(a+b)^n$の展開式の（③ 一般項 ）という。ただし，a^0 や b^0 は 1 と定める。また，${}_n\mathrm{C}_r$を（④ 二項係数 ）ともいう。

例 5 二項定理を用いて式を展開すると，次のようになる。

(1) $(2a+b)^5={}_5\mathrm{C}_0(2a)^5+{}_5\mathrm{C}_1(2a)^4b^1+{}_5\mathrm{C}_2(2a)^3b^2$
$+{}_5\mathrm{C}_3(2a)^2b^3+{}_5\mathrm{C}_4(2a)^1b^4+{}_5\mathrm{C}_5b^5$
$=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$

(2) $(x-5y)^3={}_3\mathrm{C}_0x^3+{}_3\mathrm{C}_1x^2(-5y)^1+{}_3\mathrm{C}_2x^1(-5y)^2+{}_3\mathrm{C}_3(-5y)^3$
$=x^3-15x^2y+75xy^2-125y^3$

問9 二項定理を用いて，次の式を展開せよ。

公式${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$
に注意して，

(1) $(3a+b)^4$
$={}_4\mathrm{C}_0(3a)^4+{}_4\mathrm{C}_1(3a)^3b^1+{}_4\mathrm{C}_2(3a)^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3(3a)^1b^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$
$=\boldsymbol{81a^4+108a^3b+54a^2b^2+12ab^3+b^4}$

(2) $(2x-3y)^4$
$={}_4\mathrm{C}_0(2x)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2x)^3(-3y)^1+{}_4\mathrm{C}_2(2x)^2(-3y)^2+{}_4\mathrm{C}_3(2x)^1(-3y)^3+{}_4\mathrm{C}_4(-3y)^4$
$=\boldsymbol{16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4}$

(3) $(2x^2+1)^5$
$={}_5\mathrm{C}_0(2x^2)^5+{}_5\mathrm{C}_1(2x^2)^4+{}_5\mathrm{C}_2(2x^2)^3+{}_5\mathrm{C}_3(2x^2)^2+{}_5\mathrm{C}_4(2x^2)^1+{}_5\mathrm{C}_5$
$=\boldsymbol{32x^{10}+80x^8+80x^6+40x^4+10x^2+1}$

二項定理の応用

（教科書 p.10）

例題 1 $(2x^2-1)^8$の展開式におけるx^6の係数を求めよ。

解 $(2x^2-1)^8$ の展開式における一般項は

$$ {}_8C_r(2x^2)^{8-r}(-1)^r = {}_8C_r 2^{8-r}(x^2)^{8-r}(-1)^r $$
$$ = {}_8C_r 2^{8-r}x^{2(8-r)}(-1)^r $$
$$ = {}_8C_r 2^{8-r}(-1)^r x^{16-2r} $$

ここで，$16-2r=6$ となるのは，$r=5$ のときであるから，x^6 の係数は

$$ {}_8C_5 2^{8-5}(-1)^5 = 56\cdot 2^3\cdot(-1)^5 $$
$$ = -448 $$

問 10 次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(3x^2+2)^6$ における x^2

$(3x^2+2)^6$ の展開式における一般項は

$$ {}_6C_r(3x^2)^{6-r}\cdot 2^r $$
$$ = {}_6C_r 3^{6-r}(x^2)^{6-r}\cdot 2^r $$
$$ = {}_6C_r 3^{6-r}x^{2(6-r)}\cdot 2^r $$
$$ = {}_6C_r 2^r\cdot 3^{6-r}x^{12-2r} $$

ここで，$12-2r=2$ となるのは，$r=5$のときであるから，求める係数は

$$ {}_6C_5 2^5\cdot 3^{6-5} = {}_6C_1 2^5\cdot 3 = 6\cdot 2^5\cdot 3 = \mathbf{576} $$

(2)　$(x-3y)^7$ における x^2y^5

$(x-3y)^7$ の展開式における一般項は

$$ {}_7C_r x^{7-r}(-3y)^r $$
$$ = {}_7C_r x^{7-r}(-3)^r y^r $$
$$ = {}_7C_r(-3)^r x^{7-r}y^r $$

ここで，$x^{7-r}y^r = x^2y^5$ となるのは，$r=5$ のときであるから，求める係数は

$$ {}_7C_5(-3)^5 = {}_7C_2(-3)^5 = 21\cdot(-243) = \mathbf{-5103} $$

応用 例題 2 $(x+y+z)^6$ の展開式における x^2y^3z の係数を求めよ。

考え方 $x+y$ を 1 つのものと考えて，$\{(x+y)+z\}^6$を展開する。

解 $\{(x+y)+z\}^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6C_r(x+y)^{6-r}z^r $$

z の次数に着目すると，x^2y^3z が現れるのは $r=1$ のときだけで

$$ {}_6C_1(x+y)^5 z $$

$(x+y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の係数は ${}_5C_3$ であるから，x^2y^3z の係数は

$$ {}_6C_1\times {}_5C_3 = 60 $$

問 11 $(x+2y+3z)^5$ の展開式における x^2y^2z および x^3y^2 の係数を求めよ。

$\{(x+2y)+3z\}^5$ の展開式の一般項は

$$ {}_5C_r(x+2y)^{5-r}(3z)^r $$
$$ = {}_5C_r 3^r(x+2y)^{5-r}z^r \quad \cdots\cdots① $$

z の次数に着目すると，x^2y^2z が現れるのは $r=1$ のときだけである。

このとき，①は ${}_5C_1 3(x+2y)^4 z$ となり，$(x+2y)^4$ を展開したときの x^2y^2 の係数は

$$ {}_4C_2x^2(2y)^2 = 6\cdot 2^2x^2y^2 = 24x^2y^2 $$

より 24 である。

したがって，$\boldsymbol{x^2y^2z}$ **の係数は**

$$ {}_5C_1 3\cdot 24 = 5\cdot 3\cdot 24 = \mathbf{360} $$

同様に，z の次数に着目すると，①で x^3y^2になるのは $r=0$ のときだけである。

このとき，①は ${}_5C_0(x+2y)^5$ となり，$(x+2y)^5$ を展開したときの x^3y^2 の係数は

$$ {}_5C_2x^3(2y)^2 = 10\cdot 2^2x^3y^2 = 40x^3y^2 $$

より 40 である。

したがって，$\boldsymbol{x^3y^2}$ **の係数は**　${}_5C_0\cdot 40 = \mathbf{40}$

一般に，次の定理が成り立つ。

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^{\boldsymbol{n}}$ の展開
$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は $\dfrac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$　　ただし，$p+q+r=n$

例 6 $(x-2y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めてみよう。

展開式における xy^2z^2 の項は

$$\frac{5!}{1!\,2!\,2!}x(-2y)^2(3z)^2$$

であるから，xy^2z^2 の係数は

$$\frac{5!}{1!\,2!\,2!}\cdot(-2)^2\cdot 3^2=1080$$

問 12 $(x-y+2z)^7$ の展開式における $x^2y^3z^2$ の係数を求めよ。

展開式における $x^2y^3z^2$ の項は

$$\frac{7!}{2!\,3!\,2!}x^2(-y)^3(2z)^2$$

であるから，$x^2y^3z^2$ の係数は

$$\frac{7!}{2!\,3!\,2!}\cdot(-1)^3\cdot 2^2=\mathbf{-840}$$

例 7 二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において，$a=1,\ b=x$ とおくと

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

さらに，$x=1$ を代入すると

$$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$$

問 13 次の等式が成り立つことを示せ。

$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$　　……①

(1)　$3^n={}_n\mathrm{C}_0+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1+2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

①において $a=1,\ b=2$ とおくと

$$(1+2)^n={}_n\mathrm{C}_01^n+{}_n\mathrm{C}_11^{n-1}\cdot 2^1+{}_n\mathrm{C}_21^{n-2}\cdot 2^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n2^n$$

よって

$$3^n={}_n\mathrm{C}_0+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1+2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

(2)　$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

①において $a=1,\ b=-1$ とおくと

$$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1(-1)+{}_n\mathrm{C}_2(-1)^2+{}_n\mathrm{C}_3(-1)^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$$

よって

$$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

3 整式の除法

（教科書p.13）

例 8 整式 $A=2x^2-7x+5$，整式 $B=x-3$ のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2x\ -1 & \\
x-3\,) & 2x^2-7x+5 & \\
 & 2x^2-6x\quad & \cdots (x-3)\times 2x \\
\hline
 & -x+5 & \\
 & -x+3 & \cdots (x-3)\times(-1) \\
\hline
 & 2 &
\end{array}
$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x-3$ よりも次数が低いから，これ以上計算を続けることはできない。

このとき，A を B で割ったときの（　商　）は $2x-1$，（　余り　）は 2 であるという。上の割り算から

$$A=B\times(2x-1)+2 \quad ◀割る式×商＋余り \quad ……①$$

が成り立つことがわかる。

問 14 整式 $3x^2+2x+1$ を整式 $3x-4$ で割り，商と余りを求めよ。
また，例 8 にならって，整式 $3x^2+2x+1$ を①の形に表せ。

$$
\begin{array}{rr}
 & x\ +2 \\
3x-4\,) & 3x^2+2x+1 \\
 & 3x^2-4x\quad \\
\hline
 & 6x+1 \\
 & 6x-8 \\
\hline
 & 9
\end{array}
$$

商　$x+2$，余り　9

$$3x^2+2x+1=(3x-4)(x+2)+9$$

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$A=BQ+R,\quad R$ の次数 $<B$ の次数

とくに，$R=0$ となるとき，A は B で（⑤　割り切れる　）という。このとき，B は A の（⑥　因数　）であるという。

例題 3 整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

$A=2x^3+4x^2+7,\quad B=2x^2-3$

解

$$
\begin{array}{rr}
 & x\ +2 \\
2x^2\ \boxed{}-3\,) & 2x^3+4x^2\ \boxed{}+7 \\
 & 2x^3\ \boxed{}-3x\quad \\
\hline
 & 4x^2+3x+7 \\
 & 4x^2\ \boxed{}-6 \\
\hline
 & 3x+13
\end{array}
$$

◀項がないときはあけておく

〈答〉商 $x+2$，　余り $3x+13$

注意 このような計算では，割る式も割られる式も，文字 x について降べきの順に整理しておくとよい。

問 15 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 8$,　　$B = x^2 - x - 3$

$$
\begin{array}{r}
2x-5 \\
x^2-x-3\,\overline{)\,2x^3-7x^2+3x+8} \\
2x^3-2x^2-6x \\
\hline
-5x^2+9x+8 \\
-5x^2+5x+15 \\
\hline
4x-7
\end{array}
$$

商　$\mathbf{2x-5}$，余り　$\mathbf{4x-7}$

(2)　$A = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$,　　$B = 3x - 2$

$$
\begin{array}{r}
2x^2+x-1 \\
3x-2\,\overline{)\,6x^3-x^2-5x+2} \\
6x^3-4x^2 \\
\hline
3x^2-5x \\
3x^2-2x \\
\hline
-3x+2 \\
-3x+2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

商　$\mathbf{2x^2+x-1}$，余り　$\mathbf{0}$

(3)　$A = 3x^3 + 7x^2 + 5$,　　$B = x^2 + 3x - 1$

$$
\begin{array}{r}
3x-2 \\
x^2+3x-1\,\overline{)\,3x^3+7x^2 +5} \\
3x^3+9x^2-3x \\
\hline
-2x^2+3x+5 \\
-2x^2-6x+2 \\
\hline
9x+3
\end{array}
$$

商　$\mathbf{3x-2}$，余り　$\mathbf{9x+3}$

(4)　$A = 2 + 3x + 2x^3 + x^4$,　　$B = 1 + x^2$

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x-1 \\
x^2+1\,\overline{)\,x^4+2x^3 +3x+2} \\
x^4 +x^2 \\
\hline
2x^3-x^2+3x \\
2x^3 +2x \\
\hline
-x^2+x+2 \\
-x^2 -1 \\
\hline
x+3
\end{array}
$$

商　$\mathbf{x^2+2x-1}$，余り　$\mathbf{x+3}$

例題 4　整式 $x^3 - 3x^2 - 6x - 2$ をある整式 B で割ると，商が $x + 2$，余りが $3x - 4$である。このとき，整式 B を求めよ。

解　$x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = B(x + 2) + (3x - 4)$が成り立つから

$B(x + 2) = (x^3 - 3x^2 - 6x - 2) - (3x - 4)$

$= x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

よって，$x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ を $x + 2$ で割って

$B = x^2 - 5x + 1$

$$
\begin{array}{r}
x^2-5x+1 \\
x+2\,\overline{)\,x^3-3x^2-9x+2} \\
x^3+2x^2 \\
\hline
-5x^2-9x \\
-5x^2-10x \\
\hline
x+2 \\
x+2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

問 16 整式 $3x^3 + 14x^2 - 4x + 5$ をある整式 B で割ると，商が $3x - 1$，余りが $7x + 3$ である。このとき，整式 B を求めよ。

$3x^3 + 14x^2 - 4x + 5$

$= B(3x - 1) + (7x + 3)$

が成り立つから

$B(3x - 1) = (3x^3 + 14x^2 - 4x + 5) - (7x + 3)$

$= 3x^3 + 14x^2 - 11x + 2$

よって，$3x^3 + 14x^2 - 11x + 2$ を $3x - 1$ で割って

$$
\begin{array}{r}
x^2+5x-2 \\
3x-1\,\overline{)\,3x^3+14x^2-11x+2} \\
3x^3-x^2 \\
\hline
15x^2-11x \\
15x^2-5x \\
\hline
-6x+2 \\
-6x+2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

したがって　　$\mathbf{B = x^2 + 5x - 2}$

応用例題 5 $A=2x^3-5x^2y+6xy^2-8y^3$，$B=x-2y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

$$
\begin{array}{r}
2x^2-xy+4y^2 \\
x-2y\,\big)\overline{\,2x^3-5x^2y+6xy^2-8y^3} \\
\underline{2x^3-4x^2y} \\
-x^2y+6xy^2 \\
\underline{-x^2y+2xy^2} \\
4xy^2-8y^3 \\
\underline{4xy^2-8y^3} \\
0
\end{array}
$$

〈答〉商 $2x^2-xy+4y^2$，　余り 0

問 17 $A=x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$，$B=x-y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式B で割り，商と余りを求めよ。

$$
\begin{array}{r}
x^2-xy-2y^2 \\
x-y\,\big)\overline{\,x^3-2x^2y-xy^2+2y^3} \\
\underline{x^3-x^2y} \\
-x^2y-xy^2 \\
\underline{-x^2y+xy^2} \\
-2xy^2+2y^3 \\
\underline{-2xy^2+2y^3} \\
0
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{x^2-xy-2y^2}$，余り　**0**

4 分数式とその計算

（教科書 p.16）

$\frac{1}{x}$，$\frac{x+1}{x^2-3}$ のように，A を整式，B を1次以上の整式としたとき，
$\frac{A}{B}$ の形で表される式を（⑦ 分数式 ）という。

整式と分数式を合わせて（⑧ 有理式 ）という。

約分

C が0でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。すなわち，分母と分子に共通な因数があれば（⑨ 約分 ）ができる。

これ以上約分できないとき，分数式は（⑩ 既約 ）であるという。

例 9

(1) $\frac{9a^3b}{12a^2b^3}=\frac{3a}{4b^2}$

(2) $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-2)}$

$=\frac{x+4}{x-2}$

問 18 次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1) $\frac{12a^4bc^2}{15a^3b^3c}$

$=\frac{4ac}{5b^2}$

(2) $\frac{2x^2+3x-2}{4x^2-1}$

$=\frac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(2x+1)}$

$=\frac{x+2}{2x+1}$

(3) $\frac{x^3+1}{x^2+4x+3}$

$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{x^2-x+1}{x+3}$

乗法・除法

例 10 $\frac{x-5}{x^2-x}\div\frac{x^2-10x+25}{x^2-4x}=\frac{x-5}{x^2-x}\times\frac{x^2-4x}{x^2-10x+25}$

$=\frac{x-5}{x(x-1)}\times\frac{x(x-4)}{(x-5)^2}$

$=\frac{x-4}{(x-1)(x-5)}$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 19 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+x-2}\times\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

$=\dfrac{x(x-3)}{(x+2)(x-1)}\times\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x-3}{(x+2)^2}}$

(2) $\dfrac{x^3-8}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

$=\dfrac{x^3-8}{x^2+4x+4}\times\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}\times\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{(x+1)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-1)}}$

加法・減法

（教科書 p.17）

例 11 $\dfrac{3}{x^2-4}-\dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{3-(x+1)}{x^2-4}$

$=\dfrac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=-\dfrac{1}{x+2}$

問 20 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{(x^2+3x+1)-(x^2+x-3)}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{x+3}}$

(2) $\dfrac{x-1}{x^2-x}+\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}$

$=\dfrac{(x-1)+(x^2-x+1)}{x^2-x}$

$=\dfrac{x^2}{x(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-1}}$

いくつかの分数式の分母が異なるときには，適当な整式をそれらの分母と分子に掛けて，分母が同じ分数式になおすことができる。このことを，これらの分数式を（[11] 通分 ）するという。

例題 6 $\dfrac{3}{x^2+3x}+\dfrac{x+1}{x^2-x}$ を計算せよ。

解 $\dfrac{3}{x^2+3x}+\dfrac{x+1}{x^2-x}=\dfrac{3}{x(x+3)}+\dfrac{x+1}{x(x-1)}$

$=\dfrac{3(x-1)}{x(x+3)(x-1)}+\dfrac{(x+1)(x+3)}{x(x-1)(x+3)}$

$=\dfrac{(3x-3)+(x^2+4x+3)}{x(x+3)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+7x}{x(x+3)(x-1)}=\dfrac{x(x+7)}{x(x+3)(x-1)}=\dfrac{x+7}{(x+3)(x-1)}$

$$\begin{array}{lllll} x(x+3) & \longrightarrow & x & (x+3) & \\ x(x-1) & \longrightarrow & x & & (x-1) \\ \hline & & x & (x+3) & (x-1) \end{array}$$

問 21 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-4}$

$=\dfrac{x-4}{(x+3)(x-4)}+\dfrac{3(x+3)}{(x+3)(x-4)}$

$=\dfrac{(x-4)+3(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\dfrac{\mathbf{4x+5}}{\mathbf{(x+3)(x-4)}}$

(2) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{3x}{2x^2+x-1}$

$=\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3x}{(x+1)(2x-1)}$

$=\dfrac{2x(2x-1)-3x(x-1)}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\dfrac{x^2+x}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{(x-1)(2x-1)}}$

例 12

$P=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ の右辺は $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ であるから

$P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\div\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{x+1}{x}\div\dfrac{x^2-1}{x^2}$

$=\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}$

注意 P の分母と分子に x^2 を掛けて，次のように計算してもよい。

$P=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x^2}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\times x^2}=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}$

問 22 次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{a+2}{a-\frac{2}{a+1}}$

$=(a+2)\div\left(a-\dfrac{2}{a+1}\right)$

$=(a+2)\div\dfrac{a(a+1)-2}{a+1}$

$=(a+2)\div\dfrac{a^2+a-2}{a+1}$

$=(a+2)\times\dfrac{a+1}{(a+2)(a-1)}$

$=\dfrac{\boldsymbol{a+1}}{\boldsymbol{a-1}}$

[別解] $\dfrac{a+2}{a-\frac{2}{a+1}}=\dfrac{(a+2)\times(a+1)}{\left(a-\frac{2}{a+1}\right)\times(a+1)}=\dfrac{(a+2)(a+1)}{a(a+1)-2}$

(2) $\dfrac{1-\frac{x+y}{x-y}}{1+\frac{x+y}{x-y}}$

$=\left(1-\dfrac{x+y}{x-y}\right)\div\left(1+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$

$=\dfrac{(x-y)-(x+y)}{x-y}\div\dfrac{(x-y)+(x+y)}{x-y}$

$=\dfrac{-2y}{x-y}\times\dfrac{x-y}{2x}$

$=-\dfrac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$

[別解] $\dfrac{1-\frac{x+y}{x-y}}{1+\frac{x+y}{x-y}}=\dfrac{\left(1-\frac{x+y}{x-y}\right)\times(x-y)}{\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)\times(x-y)}=\dfrac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)+(x+y)}=\dfrac{-2y}{2x}=-\dfrac{y}{x}$

問 題

（教科書 p.19）

1 次の式を展開せよ。

(1) $(2a-3b)^3$

$=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot 3b+3\cdot 2a\cdot(3b)^2-(3b)^3$

$=\boldsymbol{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3}$

(2) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$

$=(4a-3b)\{(4a)^2+4a\cdot 3b+(3b)^2\}$

$=(4a)^3-(3b)^3$

$=\boldsymbol{64a^3-27b^3}$

2 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3y^3-27z^3$

$=(xy)^3-(3z)^3$

$=(xy-3z)\{(xy)^2+xy\cdot 3z+(3z)^2\}$

$=\boldsymbol{(xy-3z)(x^2y^2+3xyz+9z^2)}$

(2) $x^3+y^3+3y^2+3y+1$

$=x^3+(y+1)^3$

$=\{x+(y+1)\}\{x^2-x(y+1)+(y+1)^2\}$

$=\boldsymbol{(x+y+1)(x^2-xy-x+y^2+2y+1)}$

3 次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1) $(ax-b)^{12}$ における x^{11} および x^2　（ただし，a , b は定数とする）

展開式の一般項は

${}_{12}\mathrm{C}_r(ax)^{12-r}(-b)^r$

$={}_{12}\mathrm{C}_r a^{12-r}(-b)^r x^{12-r}$

x^{11} が現れるのは $12-r=11$ より，$r=1$ のときである。

よって，$\boldsymbol{x^{11}}$ の係数は

${}_{12}\mathrm{C}_1 a^{11}(-b)^1=\boldsymbol{-12a^{11}b}$

x^2 が現れるのは $12-r=2$ より，$r=10$ のときである。

よって，$\boldsymbol{x^2}$ の係数は

${}_{12}\mathrm{C}_{10}a^2(-b)^{10}={}_{12}\mathrm{C}_2 a^2b^{10}=\boldsymbol{66a^2b^{10}}$

(2) $(x-2y+z^2)^7$ における $x^2y^3z^4$

$\{(x-2y)+z^2\}^7$ の展開式の一般項は

${}_7\mathrm{C}_r(x-2y)^{7-r}(z^2)^r$

$x^2y^3z^4$ が現れるのは $r=2$ のときだけで

${}_7\mathrm{C}_2(x-2y)^5(z^2)^2$

$(x-2y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の係数は

${}_5\mathrm{C}_3x^2(-2y)^3={}_5\mathrm{C}_2(-2)^3x^2y^3=-80x^2y^3$

より -80 である。

したがって，$x^2y^3z^4$ の係数は

${}_7\mathrm{C}_2\cdot(-80)=\boldsymbol{-1680}$

4　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A = 12x^3 - x^2 + 2,$　　　$B = 3x^2 - x - 1$

$$\begin{array}{r}
4x + 1 \\
3x^2 - x - 1 \,\big)\, \overline{12x^3 - x^2 + 2} \\
\underline{12x^3 - 4x^2 - 4x } \\
3x^2 + 4x + 2 \\
\underline{3x^2 - x - 1} \\
5x + 3
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{4x + 1}$，余り　$\boldsymbol{5x + 3}$

(2)　$A = 6x^3 + x^2 - 2x + 1,$　　　$B = 3x - 1$

$$\begin{array}{r}
2x^2 + x - \frac{1}{3} \\
3x - 1 \,\big)\, \overline{6x^3 + x^2 - 2x + 1} \\
\underline{6x^3 - 2x^2 } \\
3x^2 - 2x \\
\underline{3x^2 - x } \\
-x + 1 \\
\underline{-x + \frac{1}{3}} \\
\frac{2}{3}
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{2x^2 + x - \frac{1}{3}}$，余り　$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(3)　$A = x^3 - 5x^2 + 8x + 1,$　　　$B = 2x - 6$

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\
2x - 6 \,\big)\, \overline{x^3 - 5x^2 + 8x + 1} \\
\underline{x^3 - 3x^2 } \\
-2x^2 + 8x \\
\underline{-2x^2 + 6x } \\
2x + 1 \\
\underline{2x - 6} \\
7
\end{array}$$

商　$\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 - x + 1}$，余り　$\boldsymbol{7}$

5　ある整式 A を $2x^2 + 4x - 3$ で割ると，商が $x - 2$，余りが $3x + 1$ である。

このとき，整式 A を求めよ。

$A = (2x^2 + 4x - 3)(x - 2) + (3x + 1)$

$\quad = \boldsymbol{2x^3 - 8x + 7}$

〔注意〕

$$\begin{array}{r}
2x^2 + 4x - 3 \\
\times)\quad \underline{x - 2 } \\
2x^3 + 4x^2 - 3x \\
\underline{-4x^2 - 8x + 6} \\
2x^3 - 11x + 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2x^3 - 11x + 6 \\
+)\quad \underline{3x + 1} \\
2x^3 - 8x + 7
\end{array}$$

6 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{6x^2+13xy-5y^2}{2x^2-xy-3y^2} \div \dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$

$=\dfrac{(3x-y)(2x+5y)}{(2x-3y)(x+y)} \div \dfrac{(3x-y)(x+y)}{(2x-3y)(x-y)}$

$=\dfrac{(3x-y)(2x+5y)}{(2x-3y)(x+y)} \times \dfrac{(2x-3y)(x-y)}{(3x-y)(x+y)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{(2x+5y)(x-y)}{(x+y)^2}}$

(2) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9} \times \dfrac{x^3-27}{3x+9} \div \dfrac{x^2-9}{3x}$

$=\dfrac{(x+3)^2}{x^2+3x+9} \times \dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3(x+3)} \times \dfrac{3x}{(x+3)(x-3)}$

$=\boldsymbol{x}$

(3) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$

$=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2+1}$

$=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2+1}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}\right) \div \left(\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x+3}\right)$

$=\dfrac{(x+2)-2(x+1)}{(x+1)(x+2)} \div \dfrac{2(x+3)-3(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{-x}{(x+1)(x+2)} \times \dfrac{(x+2)(x+3)}{-x}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+3}{x+1}}$

(5) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}}$

$1+\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{(a+1)+1}{a+1}=\dfrac{a+2}{a+1}$

よって

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{a+2}}$

$=1\div\left(1+\dfrac{a+1}{a+2}\right)$

$=1\div\dfrac{a+2+a+1}{a+2}$

$=1\div\dfrac{2a+3}{a+2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{a+2}{2a+3}}$

[別解] $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1\times(a+1)}{\left(1+\dfrac{1}{a+1}\right)\times(a+1)}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{(a+1)+1}}$

$=\dfrac{1\times(a+2)}{\left(1+\dfrac{a+1}{a+2}\right)\times(a+2)}=\dfrac{a+2}{(a+2)+(a+1)}=\dfrac{a+2}{2a+3}$