数学 II　Advanced　P.231

巻末

※「数学でアクティブ・ラーニングをしよう」,「思考力を高めよう」,「演習問題」は各章の学習が終わった後や，教科書を一通り学んだ後に取り組むと効果的です。

数学 II　Advanced　P.232

数学でアクティブ・ラーニングをしよう

アクティブ・ラーニングとは，課題の発見と解決に向けて主体的・協働的に学ぶ学習方法のことです。次の問題をペアやグループで探究してみましょう。

2 つのタワー

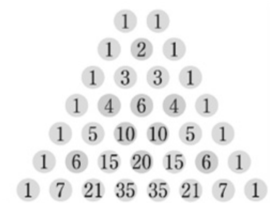
東京スカイツリーの高さは 634m であり，東京タワーの高さは 333m です。

右の写真のように，観測点によっては，高さの違う 2 つのタワーが同じ高さに見えます。

このように，2 つのタワーが同じ高さに見える場所は他にもあるだろうか。

また，ある場合は，どのような場所だろうか。

パスカルの三角形の不思議



8 ページで学んだパスカルの三角形において，奇数の場所を●，偶数の場所を●で塗るというルールで色分けを行うと，右のような図形が浮かび上がります。

これは，段を増やしていくとどうなるだろうか。

また，他のルールにしたら，どうなるだろうか考えてみよう。

地震のマグニチュード

地震波として出されたエネルギーを E とすると，地震のマグニチュード M は

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

で表されます。ここで，エネルギーの単位は J (ジュール)です。

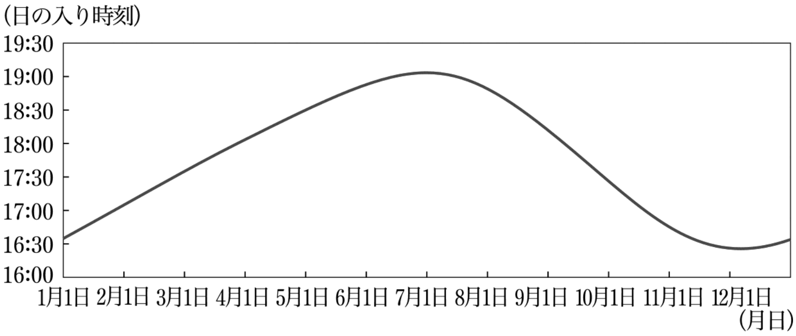
さて，2011 年 3 月 11 日に発生した東日本大震災のマグニチュードは，発生時は 8.8 と発表されましたが，その後 9.0 に修正されました。マグニチュードが 8.8 から 9.0 になると地震のエネルギーは何倍になるだろうか。

夏至と日の入り時刻

下の図は，ある年の東京都の日ごとの日の入り時刻をグラフにしたものです。

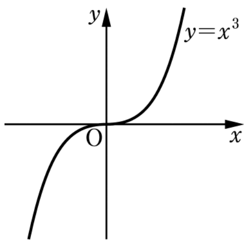
この年の夏至は 6 月 22 日でした。夏至の日は，昼の長さが 1 年で最も長いと言われていますが，下のグラフだけでそのことがわかるだろうか。

また，冬至はどうだろうか。



$y = x^n$ のグラフ

関数 $y = x^3$ のグラフは，右の図のようになります。それでは，関数 $y = x^4$ のグラフはどのようなグラフになるだろうか。



また，n が正の整数のとき，関数 $y = x^n$ のグラフはどのようになるだろうか。グラフ電卓やグラフ作成ソフトを利用して，実際にグラフをかいて考察してみよう。

条件を変える

33 ページで学んだように，2 つの実数について，「$\alpha > 0,\ \beta > 0 \Longleftrightarrow \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$」が成り立ちます。それでは，次の $\boxed{}$ には，どのような条件が入るか調べてみよう。

「$\alpha > 1,\ \beta > 1 \Longleftrightarrow \boxed{}$」

他の問題や性質でも，条件を変えてみて考えてみよう。

数学II　Advanced　P.234

思考力を高めよう

数学において，問題を解決するときには，次の4つの段階があります。

$\boxed{\text{問題を理解する}}$ → $\boxed{\text{計画を立てる}}$ → $\boxed{\text{計画を実行する}}$ → $\boxed{\text{振り返ってみる}}$

初めて見る問題で「計画を立てる」ときには，定理や公式のような知識だけではなく，**数学的思考法**も必要です。

ここでは，数学IIに関連する次のような数学的思考法を紹介します。

図を用いて考える

数学において，特に図形の問題では，問題文で与えられた条件を図にすることで，問題の状況や求めるものが見やすくなります。

対称性

数学だけでなく，日常の様々な場面にひそんでいる美しい性質ですが，この対称性を利用すると，問題の本質を見抜いたり，労力を大幅に減らすことができます。

▲白川郷（岐阜県）

背理法

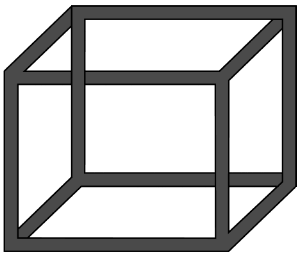
数学Iで学んだ背理法は，数学だけでなく，日常生活でもよく用いられる論法です。

命題が成り立たないと仮定してみて，矛盾がないか確かめます。

見方を変える

見方を変えると同じものでも違ったように見えることがあります。

数学においても，全体のうちのAという考え方に着目するか，Aでない考え方に着目するかによって，解決が難しくなったり，簡単になったりすることがあります。



動かす・固定する

図形やグラフを動かして，よく観察することはとても大切です。これができると問題の状況が具体的にイメージできるようになります。

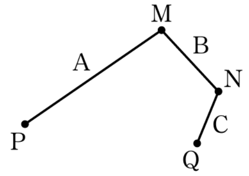
数学 II　Advanced　P.235

動かす・固定する

3 本の棒 A, B, C があり，その長さ a, b, c を $a > b > c > 0$ とします。

2 本の棒を端点どうしでつなげるとき，2 本の棒がつながった点を連結点と呼びます。連結点では棒は自由に回転することができます。また，連結点ではない方の端点を自由点と呼びます。

右の図のように，A と B，B と C をつなげ，A と B の連結点を M，B と C の連結点を N とします。また，A の自由点を P，C の自由点を Q とします。



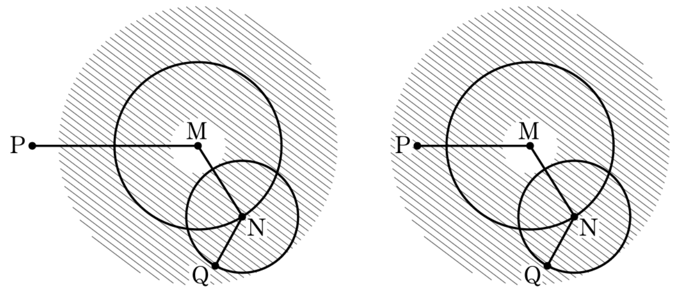
このとき，A を固定して，B と C を動かしたときの点 Q の動く範囲について考えてみよう。

まず，A と B の両方を固定して，C を動かすと，Q は N を中心に半径 c の円をえがきます。

続いて，B を動かすと，N は M を中心に半径 b の円をえがきます。

以上より，点 Q の動く範囲は，下の図の斜線部分になります。

$a > b+c$ の場合　　　$a \leqq b+c$ の場合



P と Q の距離 l が最小になるとき，A, B, C の位置はどうなるか考えてみよう。

数学II　Advanced　P.236

対称性

105 ページの例 2 では，不等式

$$|x|+|y|<1 \qquad \cdots\cdots①$$

の表す領域について扱っています。

例 2 では，絶対値による場合分けを用いて領域を図示していますが，対称性を利用して，次のように求めることもできます。

①の x を $-x$ で置き換えても，もとの式と変わりません。すなわち，①の表す図形を y 軸に関して対称移動するともとの図形と同じ図形になりますから，①の表す図形は y 軸に関して対称な図形であることがわかります。同様に，①の y を $-y$ で置き換えても，もとの式と変わりませんから，①の表す図形は x 軸に関して対称な図形であることがわかります。

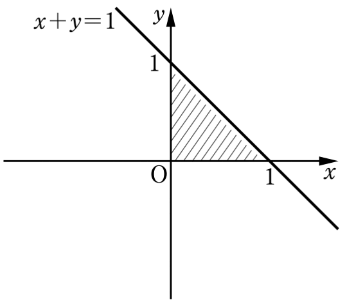
したがって，①の表す図形は，x 軸に関しても y 軸に関しても対称な図形です。

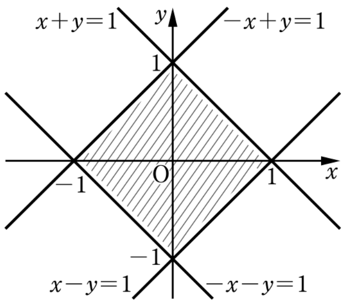
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき，①は　　$x+y<1$　　……②

となり，②の表す領域は，左下の図の斜線部分になります。

この図形を x 軸に関して対称移動し，さらに y 軸に関して対称移動した図形が求める領域となります。

したがって，求める領域は，右下の図の斜線部分となります。ただし，境界線は含みません。

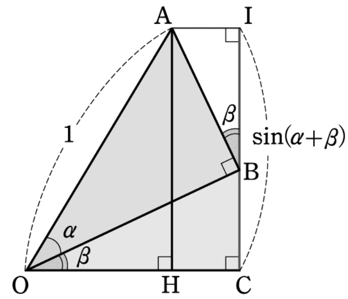




数学 II　Advanced　P.237

図を用いて考える

三角関数の加法定理を右の図を用いて証明してみよう。



右の図において，$\mathrm{OA}=1$，

$\angle\mathrm{AOC}=\alpha+\beta$ ですから

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OA}\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\sin(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots①$$

また，四角形 AHCI が長方形になるように点 I を定めると，

$\mathrm{AH}=\mathrm{IC}$ ですから

$$\mathrm{AH}=\mathrm{IB}+\mathrm{BC} \quad \cdots\cdots②$$

さらに，$\mathrm{IB}=\mathrm{AB}\cos\beta$，$\mathrm{AB}=\mathrm{OA}\sin\alpha=\sin\alpha$ ですから

$$\mathrm{IB}=\sin\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots③$$

同様に　$\mathrm{BC}=\mathrm{OB}\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots④$

①，③，④を②に代入すると，次の式が成り立ちます。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

また　$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots⑤$

$\mathrm{AI}=\mathrm{HC}$ ですから　$\mathrm{OH}=\mathrm{OC}-\mathrm{HC}=\mathrm{OC}-\mathrm{AI} \quad \cdots\cdots⑥$

さらに　$\mathrm{OC}=\mathrm{OB}\cos\beta=\mathrm{OA}\cos\alpha\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta \quad \cdots\cdots⑦$

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AB}\sin\beta=\mathrm{OA}\sin\alpha\sin\beta=\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots⑧$$

⑤，⑦，⑧を⑥に代入すると，次の式が成り立ちます。

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

次の等式が成り立つことを示すには，どのような図を用いるとよいでしょうか。ただし，α，β は鋭角で，$\alpha>\beta$ とします。

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

数学 II　Advanced　P.238

背理法

$\log_{10} 2$ や $\log_2 9$ などの対数の多くは無理数です。これらの数が無理数であることは，背理法を用いて証明することができます。

ここでは，$\log_{10} 2$ が無理数であることを背理法を用いて証明してみよう。

$\log_{10} 2$ が有理数であると仮定します。

ここで

$$\log_{10} 2 > \log_{10} 1 = 0$$

ですから，$\log_{10} 2$ は 1 以外の共通な約数をもたない 2 つの自然数 $p,\ q$ を用いて

$$\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \qquad \cdots\cdots①$$

と表すことができます。

①の両辺に q を掛けて

$$q \log_{10} 2 = p$$

$$\log_{10} 2^q = p$$

すなわち

$$2^q = 10^p \qquad \cdots\cdots②$$

ここで，$p,\ q$ は自然数ですから，②の右辺は 5 の倍数になります。

一方，②の左辺は 5 の倍数ではありません。

よって，②は成り立ちません。

これは矛盾します。

ゆえに，$\log_{10} 2$ は無理数です。

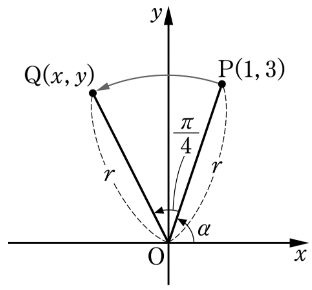
$\log_2 9$ が無理数であることを証明してみよう。

数学 II　Advanced　P.239

見方を変える

直線 $y=3x$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 3)$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ について考えてみよう。

$\mathrm{OP}=r$，動径 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とします。



このとき

$$1=r\cos\alpha,\ 3=r\sin\alpha \quad \cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{OQ}=r$，動径 OQ が x 軸の正の向きとなす角は $\alpha+\frac{\pi}{4}$ ですから

$$x=r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),\ y=r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

ここで，132 ページで学んだ加法定理と①より

$$x=r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

$$y=r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

したがって，Q の座標は　$\left(-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

これは，直線 $y=-2x$ 上の点です。

このことから，直線 $y=3x$ 上の任意の点を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点の集合は直線 $y=-2x$ になると考えることができます。

直線 $y=3\sqrt{3}x$ 上の点 $\mathrm{P}\left(1,\ 3\sqrt{3}\right)$ を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を求めてみよう。

数学 II　Advanced　P.240

演習問題

1 章　方程式・式と証明

1　10.1^6 の小数第 1 位の数字を求めよ。

2　2 次方程式 $x^2-7x+9=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ の値を求めよ。

3　4 次方程式 $(x^2+2x+a)(x^2+ax+2)=0$ が異なる 4 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

4　整式 $P(x)$ を $(x-2)^2$ で割ると $3x-5$ 余り，$x-3$ で割ると 6 余る。
$P(x)$ を $(x-2)^2(x-3)$ で割った余りを求めよ。

5　$x>0$ のとき，$x+\frac{16}{x+3}$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

発展

6　$x+\frac{1}{x}=t$ とおくことにより，次の方程式を解け。

$$x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$$

考え方　方程式の両辺を x^2 で割り，$x+\frac{1}{x}$ の 2 次方程式を導く。次に，$x+\frac{1}{x}=t$ とおき，t の 2 次方程式を解く。

2 章　図形と方程式

1　2 直線　$6x-8y+15=0$　……①

$9x-ky-5=0$　……②

が平行になるように，定数 k の値を定めよ。また，そのときの 2 直線①，②の距離を求めよ。

2　2 直線 $2x+y=5,\ x-2y=0$ から等距離にある点の軌跡は，どのような図形か。

$\boxed{3}$　点 A(4, 0) を中心とする半径 2 の円が, 直線 $y = kx$ と異なる 2 点 P, Q で交わっている。このとき，次の問に答えよ。

(1)　定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　線分 PQ の中点 M の軌跡の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$　実数 $x,\ y$ が 2 つの不等式 $y \geqq 2x + 4,\ x^2 + y^2 + 2x - 4y \leqq 15$ をともに満たしながら変化するとき，$x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

3 章　三角関数

$\boxed{1}$　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $f(\theta) = \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$ について，次の問に答えよ。

(1)　$y = f(\theta)$ のグラフをかけ。

(2)　a を実数とするとき，方程式 $f(\theta) = a$ の解の個数を調べよ。

$\boxed{2}$　(1)　$\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおくとき，次の等式を証明せよ。

$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2},\qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

(2)　θ が不等式 $2\cos\theta + \sin\theta - 1 > 0$ を満たすとき, $\tan\frac{\theta}{2}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

4 章　指数関数・対数関数

$\boxed{1}$　関数 $f(x) = 4^x + 4^{-x} - 5(2^x + 2^{-x}) + 9$ について，次の問に答えよ。

(1)　$t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表せ。また，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$　次の方程式，不等式を解け。

(1)　$x^{2+\log_2 x} = 8$　　　　(2)　$\log_2 x - \log_x 4 \geqq 1$

数学 II　Advanced　P.242

5 章　微分と積分

$\boxed{1}$　4 次関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。曲線 $y = f(x)$ について，$x = 0$ における接線が $8x + y - 5 = 0$，$x = 1$ における接線が $16x + y - 8 = 0$ であるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$\boxed{2}$　3 次関数 $f(x) = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ が $x = \alpha$ で極大値，$x = \beta$ で極小値をとるとき，$f(\alpha) - f(\beta) = 64\sqrt{2}$ を満たす正の定数 m の値を求めよ。

$\boxed{3}$　曲線 $y = x^3 + 3x^2$ を C とするとき，次の問に答えよ。

(1)　C 上の点 $(t,\ t^3 + 3t^2)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(1,\ a)$ を通り，C に 3 本の接線が引けるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$　曲線 $y = x^3 - 9x + 1$ と放物線 $y = 3x^2 + a$ の交点の x 座標が，1 つの正の数と 2 つの負の数であるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$　実数 a，b に対して

$$A = \int_0^1 x^2\,dx,\ B = \int_0^1 (ax + b)^2\,dx,\ C = \int_0^1 x(ax + b)\,dx$$

とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　A，B，C を求めよ。

(2)　不等式 $AB \geqq C^2$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{6}$　2 つの放物線 $y = 2x^2$，$y = -x^2 + 2ax - a^2 + a$ が異なる 2 点で交わるとき，次の問に答えよ。

(1)　定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの放物線によって囲まれる図形の面積 S の最大値とそのときの a の値を求めよ。

数学 II　Advanced　P.243

総合問題

$\boxed{1}$ Consider the expansion of $(x+3)^{10}$.

(a) Write down the number of terms in this expansion.

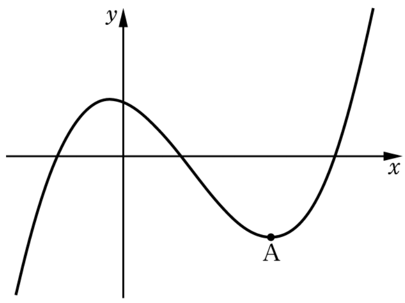
(b) Find the term containing x^3.

$\boxed{2}$ (a) Write down the value of

(i) $\log_3 27$;　　(ii) $\log_8 \frac{1}{8}$;　　(iii) $\log_{16} 4$.

(b) Hence, solve $\log_3 27 + \log_8 \frac{1}{8} - \log_{16} 4 = \log_4 x$.

$\boxed{3}$ The following diagram shows the graph of a function f. There is a local minimum point at A, where $x > 0$.



The derivative of f is given by $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$.

(a) Find the x-coordinate of A.

(b) The y-intercept of the graph is at $(0,\ 6)$. Find an expression for $f(x)$.

The graph of a function g is obtained by reflecting the graph of f in the y-axis, followed by a translation of $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$.

(c) Find the x-coordinate of the local minimum point on the graph of g.

注意 a translation of $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ は x 軸方向に m, y 軸方向に n だけ平行移動することを表す。

(国際バカロレアのディプロマ・プログラム最終試験)