数学 II　Advanced　P.149

4 章　指数関数・対数関数

数多くの試行錯誤の末，ついに私は，厄介な計算の労苦を取り除く素晴らしい簡明な公式を発見した。

スコットランド(現イギリス)の貴族。
当時，天文学や航海術には膨大な量の計算が必要だったが，ネイピアの発見した「対数」はその計算量を画期的に減らした。
ネイピアが作成した対数表は，ヘンリー・ブリッグス(イギリス)の協力を得て改良され，10 を底とする今日の「常用対数表」ができあがった。
ジョン・ネイピア
(1550 年～1617 年)

数学 II　Advanced　P.150

1 節　指数関数

1　指数法則

$m,\ n$ が正の整数のとき，数学 I で学んだ次の**指数法則**が成り立つ。

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$　　$\boxed{2}$　$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$　　$\boxed{3}$　$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$

$\boxed{\boldsymbol{a^0} \text{ と } \boldsymbol{a^{-n}}}$

$a \neq 0$ とする。指数 n が 0 または負の整数であるときにも，上の指数法則が成り立つように，a^n の意味を定めてみよう。

$n = 0$ のとき，指数法則 $\boxed{1}$ が成り立つとすると

$a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$　　ゆえに　　$a^0 = 1$

$m = -n$ のとき，指数法則 $\boxed{1}$ が成り立つとすると

$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$　　ゆえに　　$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

よって，指数が 0 または負の整数のときの累乗を次のように定める。

a^0，a^{-n} の定義
$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき $$\boldsymbol{a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

例 1　(1)　$3^0 = 1$

(2)　$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

問 1　次の値を求めよ。

(1)　5^{-1}　　(2)　6^0　　(3)　10^{-2}　　(4)　$(-4)^{-3}$

問 2　次の式を a^n の形で表せ。

(1)　$\frac{1}{a}$　　(2)　1　　(3)　$\frac{1}{a^5}$　　(4)　$\frac{1}{a^{17}}$

指数法則

$a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ と定めると，前ページの指数法則は m, n がどのような整数のときにも成り立つ。

例 2　$m=3$, $n=-2$ のとき，前ページの指数法則 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ が成り立つことを確かめてみよう。

$\boxed{1}$　$a^3a^{-2}=a^3\times\frac{1}{a^2}=a=a^{3+(-2)}$

$\boxed{2}$　$(a^3)^{-2}=\frac{1}{(a^3)^2}=\frac{1}{a^6}=a^{-6}=a^{3\times(-2)}$

$\boxed{3}$　$(ab)^{-2}=\frac{1}{(ab)^2}=\frac{1}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}\times\frac{1}{b^2}=a^{-2}b^{-2}$

さらに，$a\neq 0$, $b\neq 0$ で，m, n が整数のとき，次のような計算を行うことができる。

$$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^m\times\frac{1}{a^n}=a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$$

以上より，次の指数法則が成り立つことがわかる。

指数法則 1	
$a\neq 0$, $b\neq 0$ で，m, n が整数のとき	
$\boxed{1}$　$\boldsymbol{a^ma^n=a^{m+n}}$	$\boxed{1}'$　$\boldsymbol{a^m\div a^n=a^{m-n}}$
$\boxed{2}$　$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$	
$\boxed{3}$　$\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$	$\boxed{3}'$　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$

例 3　(1)　$a^3\times a^{-9}\div a^{-4}=a^{3+(-9)-(-4)}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$

(2)　$(a^2)^3\times(ab^3)^{-2}=a^6\times a^{-2}\times b^{-6}=a^4b^{-6}=\frac{a^4}{b^6}$

問 3　次の計算をせよ。

(1)　$a^{-2}a^5$　　(2)　$x^{-7}\div(x^{-5}\times x^2)$　　(3)　$(a^3b^{-4})^{-2}$　　(4)　$\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\right)^{-5}$

➡ p.161 問題1, 2

2　累乗根

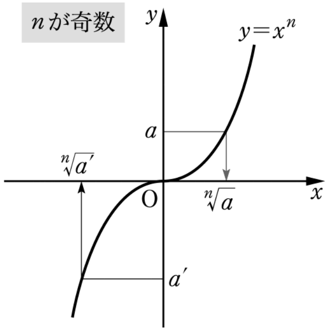
a を実数とする。正の整数 n に対して，n 乗して a になる数，
すなわち　$\boldsymbol{x^n = a}$
を満たす数 x を，a の **n 乗根**という。平方根は 2 乗根である。

例 4　(1)　$(-2)^3 = -8$ であるから，-2 は -8 の 3 乗根
(2)　$(-2)^4 = 16,\ 2^4 = 16$ であるから，$-2,\ 2$ は 16 の 4 乗根

この章では，n 乗根は実数の範囲で考えるものとする。このとき，実数 a の n 乗根について，次のことがいえる。

(i)　n が奇数のとき

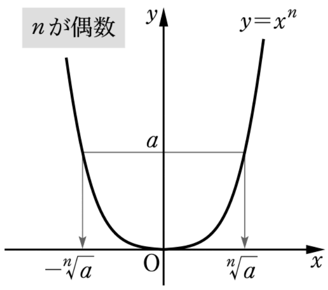
a の n 乗根は a の正負に関係なく，ただ 1 つ存在する。それを $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ と表す。$\sqrt[n]{a}$ と a の正負は同じである。



例 5　$(-2)^5 = -32$ であるから
$\sqrt[5]{-32} = -2$

(ii)　n が偶数のとき

$a > 0$ のとき，a の n 乗根は正と負の 2 つが存在する。そのうち正の方を $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$，負の方を $\boldsymbol{-\sqrt[n]{a}}$ と表す。
$a < 0$ のとき，a の n 乗根は存在しない。



例 6　$3^4 = 81,\ (-3)^4 = 81$ であるから
$\sqrt[4]{81} = 3,\ -\sqrt[4]{81} = -3$

注意　$\sqrt[2]{a}$ をこれまで通り $\sqrt{a}$ と書く。また，n が奇数，偶数のいずれであっても $\boldsymbol{\sqrt[n]{0} = 0}$ である。

問 4　次の値を求めよ。
(1)　$\sqrt[3]{125}$　　(2)　$\sqrt[3]{-125}$　　(3)　$\sqrt[4]{256}$　　(4)　$\sqrt[5]{-243}$

数学 II　Advanced　P.153

累乗根の性質

2 乗根，3 乗根，4 乗根，…をまとめて**累乗根**という。

$a > 0$ で，n が正の整数のとき，$\sqrt[n]{a}$ は a のただ 1 つの正の n 乗根である。すなわち

$a > 0$ のとき　$\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$,　$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} > 0}$

さらに，累乗根について次の性質が成り立つ。

累乗根の性質	
$a > 0,\ b > 0$ で，$m,\ n,\ p$ が正の整数のとき	
$\boxed{1}$ $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$	$\boxed{2}$ $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$
$\boxed{3}$ $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$	$\boxed{4}$ $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$
$\boxed{5}$ $\boldsymbol{\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}}$	

証明　$\boxed{1}$　左辺を n 乗すると　$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

ここで，$\sqrt[n]{a} > 0,\ \sqrt[n]{b} > 0$ であるから　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} > 0$

よって，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は ab の正の n 乗根である。

すなわち　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

問 5　上の証明にならって，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を証明せよ。

例 7　(1)　$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(2)　$\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{10}{2}} = \sqrt[6]{5}$

(3)　$\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \times 5} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{49}} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7}$

問 6　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[4]{400} \times \sqrt[4]{25}$　　(2)　$\sqrt[4]{400} \div \sqrt[4]{25}$

(3)　$\sqrt[3]{\sqrt{216}}$　　(4)　$\left(\sqrt[3]{4}\right)^5 \div \sqrt[3]{64}$

3　指数の拡張

$a>0$ のとき，有理数 r に対して累乗 a^r を定義しよう。

たとえば，指数法則 $\boxed{2}$ の $(a^m)^n=a^{mn}$ が，$m=\frac{3}{4}$，$n=4$ のときにも成り立つとすると

$$\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^4=a^{\frac{3}{4}\times 4}=a^3$$

よって，$a^{\frac{3}{4}}$ は a^3 の正の 4 乗根であり，$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$ となる。

このような考え方にしたがって，一般に次のように定義する。

有理数を指数とする累乗
$a>0$ で，m，n が正の整数のとき $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}}$，　$\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$

上のことから，とくに $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ である。

$\boxed{\text{例 8}}$　(1)　$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(2)　$16^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(2^4)^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(2^3)^4}}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

$\boxed{\text{問 7}}$　次の値を求めよ。

(1)　$16^{\frac{1}{4}}$　　(2)　$27^{\frac{4}{3}}$　　(3)　$36^{-\frac{1}{2}}$　　(4)　$125^{-\frac{2}{3}}$

$\boxed{\text{問 8}}$　次の値を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(1)　$\sqrt[5]{a}$　　(2)　$\sqrt[3]{a^5}$　　(3)　$\sqrt{a^{-3}}$　　(4)　$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7}}$

有理数を指数とする累乗を上のように定めると

$$a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a\times a^2}=\sqrt[3]{a^{1+2}}=a^{\frac{1+2}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[9]{a^2}=a^{\frac{2}{9}}=a^{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}$$

$$(ab)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(ab)^2}=\sqrt[3]{a^2b^2}=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{b^2}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$$

となり，指数法則 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ は，$m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{2}{3}$ のときも成り立つことがわかる。

一般に，有理数を指数とする累乗についても，指数法則が成り立つ。

指数法則 2	
$a>0,\ b>0$ で，$p,\ q$ が有理数のとき	
$\boxed{1}$　$\boldsymbol{a^p a^q = a^{p+q}}$	$\boxed{1}'$　$\boldsymbol{a^p \div a^q = a^{p-q}}$
$\boxed{2}$　$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{pq}}$	
$\boxed{3}$　$\boldsymbol{(ab)^p = a^p b^p}$	$\boxed{3}'$　$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$

指数法則を利用して，いろいろな計算を行ってみよう。

例 9　(1)　$24^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2 \times 3 = 6$

(2)　$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a^3} \div \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} \div a^{\frac{1}{12}}$

$= a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}} = a^1$

$= a$

問 9　次の計算をせよ。

(1)　$7^{\frac{1}{2}} \div 7^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{2}{3}}$　　(2)　$\left(16^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}$　　(3)　$\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \times 27^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{3}{2}}$

➡ p.161 問題3

問 10　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a^3} \div \sqrt{a}$　　(2)　$\sqrt[3]{ab^2} \div \sqrt[6]{a^5 b} \times \sqrt{a}$

➡ p.161 問題4

指数 p が無理数のときにも，正の数 a に対して a^p が定義される。

たとえば，$\sqrt{2} = 1.41421\cdots$ に対して，有理数を指数とする 3 の累乗の列

$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \cdots$

を考えると，その項は右のようになり，しだいに一定の値に近づいていくから，その値を $3^{\sqrt{2}}$ と定める。

累乗の指数を，このように実数にまで拡張しても，上の指数法則はそのまま成り立つ。

3^1	$= 3$
$3^{1.4}$	$= 4.65553672\cdots$
$3^{1.41}$	$= 4.70696500\cdots$
$3^{1.414}$	$= 4.72769503\cdots$
$3^{1.4142}$	$= 4.72873393\cdots$
$3^{1.41421}$	$= 4.72878588\cdots$
	$\cdots\cdots\cdots$

数学 II　Advanced　P.156

4　指数関数とそのグラフ

$a > 0,\ a \neq 1$ のとき

$$y = a^x$$

で表される関数を，a を**底**とする**指数関数**という。

指数関数のグラフ

2 を底とする指数関数 $y = 2^x$ のグラフについて考えてみよう。

たとえば，x が $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ のときの 2^x の値は，次のようになる。

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \fallingdotseq 1.41, \quad 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.83$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.71$$

いろいろな x の値に対応する 2^x の値は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\cdots$
$y = 2^x$	$\cdots$	0.25	0.35	0.5	0.71	1	1.41	2	2.83	4	$\cdots$

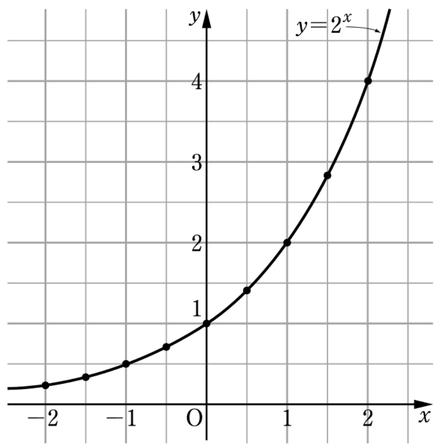
問 11　x の値が $-\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$ のときの 2^x の値を求めよ。

上のように，x の値に対する y の値を求め，x, y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとっていくと，右の図のような曲線が得られる。

これが指数関数

$$y = 2^x$$

のグラフである。



問 12　$y = 3^x$ のグラフをかけ。

指数関数 $y=2^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを比べてみよう。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$y=2^x$	$\cdots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	$\cdots$
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\cdots$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\cdots$

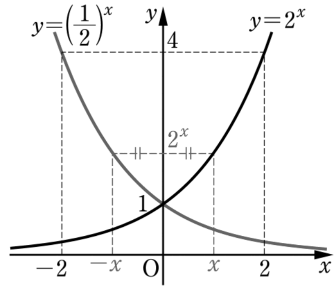
$y=2^x$ と $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$

とでは，x と $-x$ が入れかわっている。

したがって，$y=2^x$ のグラフと

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，y 軸に関して対称

である。



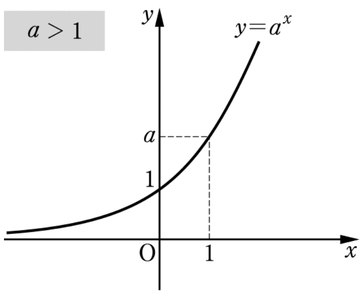
一般に，関数 $y=a^x$ のグラフと関数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフは，y 軸に関して対称である。

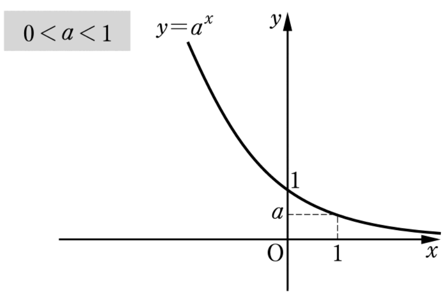
指数関数 $y=a^x$ のグラフは

$a>1$ のときは，$y=2^x$ のグラフと同様に右上がりの曲線

$0<a<1$ のときは，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフと同様に右下がりの曲線

となる。





$\boxed{問 13}$　$y=3^x$ のグラフをもとにして，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

➡ p.161 問題6

指数関数の性質

指数関数 $y=a^x$ の性質をまとめると，次のようになる。

1　定義域は**実数全体**，値域は**正の実数全体**である。

2　グラフは点 $(0,\ 1)$ および点 $(1,\ a)$ を通り，x 軸が漸近線になる。

3　**$a>1$ のとき**，x の値が増加すると y の値も増加する。

すなわち　$\boldsymbol{p<q \iff a^p<a^q}$

$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は減少する。

すなわち　$\boldsymbol{p<q \iff a^p>a^q}$

$a>1$ のときの $y=a^x$ のように，x の値が増加すると y の値も増加する関数を**増加関数**といい，$0<a<1$ のときの $y=a^x$ のように，x の値が増加すると y の値が減少する関数を**減少関数**という。

例題 1　大小比較

3 つの数 $2\sqrt{2},\ \sqrt[3]{32},\ \sqrt[4]{32}$ の大小を比較せよ。

解　3 つの数を 2^p の形に表すと

$$2\sqrt{2}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$$

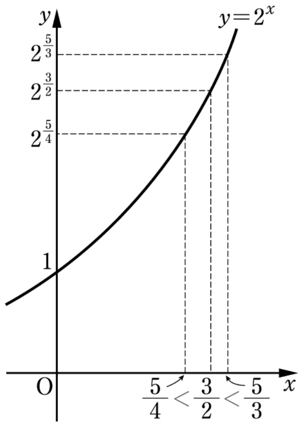
$$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=2^{\frac{5}{4}}$$

ここで，$y=2^x$ の底 2 は 1 より大きく，$\frac{5}{4}<\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$ であるから

$$2^{\frac{5}{4}}<2^{\frac{3}{2}}<2^{\frac{5}{3}}$$

すなわち　$\sqrt[4]{32}<2\sqrt{2}<\sqrt[3]{32}$



問 14　次の 3 つの数の大小を比較せよ。

(1)　$\sqrt[3]{9},\ \sqrt[5]{81},\ \sqrt[7]{243}$　　(2)　$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt[4]{\frac{1}{8}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

→ p.161 問題7

指数関数を含む方程式・不等式

$a>0$, $a \neq 1$ のとき，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{a^p = a^q \iff p = q}$$

このことを用いて，指数関数を含む方程式を解いてみよう。

例題 2　指数関数を含む方程式［1］

方程式 $4^{2x} = 2^{x-6}$ を解け。

解 $4^{2x} = (2^2)^{2x} = 2^{4x}$ であるから

$$2^{4x} = 2^{x-6}$$

◀両辺の底をそろえる

よって　$4x = x - 6$

ゆえに　$x = -2$

問 15　次の方程式を解け。

(1)　$25^{1-x} = 5^x$　　(2)　$\frac{1}{49^{2x}} = 7^{6-x}$

応用例題 3　指数関数を含む方程式［2］

方程式 $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ を解け。

解 $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$ であるから　$(3^x)^2 - 3 = 2 \cdot 3^x$

ここで，$3^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

◀指数関数 $t = 3^x$ の値域は正の実数全体

$$t^2 - 3 = 2t$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$t > 0$ より　$t = 3$

すなわち　$3^x = 3$

ゆえに　$x = 1$

問 16　次の方程式を解け。

(1)　$\left(\frac{1}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 = 0$　　(2)　$2 \cdot 4^x + 4 = 9 \cdot 2^x$

指数関数の性質を用いて，指数関数を含む不等式を解いてみよう。

応用例題 4　指数関数を含む不等式

次の不等式を解け。

(1)　$\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{25}\right)^{x-1}$　　　(2)　$4^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 1 > 0$

解　(1)　$\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ であるから，与えられた不等式は

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \leqq \left(\frac{1}{5}\right)^{2(x-1)}$$

底 $\frac{1}{5}$ は 0 より大きく 1 より小さいから

$$x \geqq 2(x-1)$$

ゆえに　$x \leqq 2$

◀ $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ は減少関数

(2)　$4^{x+1} = 4 \cdot 4^x = 4 \cdot (2^2)^x = 4 \cdot 2^{2x} = 4 \cdot (2^x)^2$

であるから，与えられた不等式は

$$4 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 1 > 0$$

ここで，$2^x = t$ とおくと，$t > 0$ であって

$$4t^2 - 5t + 1 > 0$$

$$(4t-1)(t-1) > 0$$

$$t < \frac{1}{4}, \quad 1 < t$$

$t > 0$ であるから　$0 < t < \frac{1}{4}, \quad 1 < t$

すなわち　$0 < 2^x < 2^{-2}, \quad 2^0 < 2^x$

底 2 は 1 より大きいから

$$x < -2, \quad 0 < x$$

◀ $t = 2^x$ は増加関数

問 17　次の不等式を解け。

(1)　$\left(\sqrt{7}\right)^x < 49^{3-2x}$　　　(2)　$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$

➡ p.161 問題9

数学II　Advanced　P.161

$\boxed{\text{問題}}$

1　次の計算をせよ。

(1)　$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div 2^{-3} \times 3^5$　　(2)　$\frac{10^7 \times 10^{-3}}{10^{-2} \div 10^{-4}}$

➡ p.174 練習問題2

2　次の式を簡単にせよ。

(1)　$(a^3)^{-2} \div a^{-8}$　　(2)　$x^8 \div (x^{-2})^{-3} \times \left(\frac{1}{x}\right)^5$

3　次の計算をせよ。

(1)　$\left(-\sqrt[4]{49}\right)^2$　　(2)　$\sqrt[5]{64} \div \sqrt[10]{4}$

(3)　$\left\{\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$　　(4)　$(2 \times 3^2)^{\frac{2}{3}} \div 2^{-\frac{4}{3}} \div \sqrt[3]{3}$

4　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\frac{\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[12]{a^{11}}}$　　(2)　$\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$

(3)　$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

5　$\left(\sqrt{2}\right)^6$, $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ の値を計算することにより，2 つの数 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ の大小を比較せよ。

6　$y = 2^x$ のグラフをもとにして，$y = 2^{x-1}$ のグラフをかけ。

7　次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$\sqrt[4]{27}$, $9^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{3^5}$　　(2)　$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[8]{8}$, $\sqrt[9]{16}$

➡ p.175 練習問題11

8　次の方程式を解け。

(1)　$4^x = 2^x \cdot 8^{x+1}$　　(2)　$3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x - 1 = 0$

9　次の不等式を解け。

(1)　$0.125 < 0.5^x < 1$　　(2)　$\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqq 2$

(3)　$4^x + 2^{x+2} - 32 \geqq 0$