数学 II　Advanced　P.061

2 章　図形と方程式

われ思う，ゆえに，われあり。

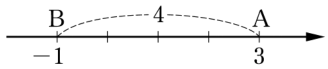
フランスの哲学者，数学者。
“すべてを疑った”上で，知識を合理的に再構成すべきことを主張した。
座標を用いて図形の性質を代数学の手法によって調べる方法を提唱したため, “解析幾何学”の祖とされる。
ルネ・デカルト
(1596年～1650年)

1 節　点と直線

1　2 点間の距離

数直線上の 2 点間の距離

数直線上の点には実数が対応し，2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて $\mathbf{AB} = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$ と表される。



例 1　2 点 A(3)，B(-1) に対し

$$\mathrm{AB} = |-1-3| = 4$$

問 1　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　O(0)，A(3)　　(2)　A(-1)，B(5)　　(3)　A(7)，B(3)

座標平面上の 2 点間の距離

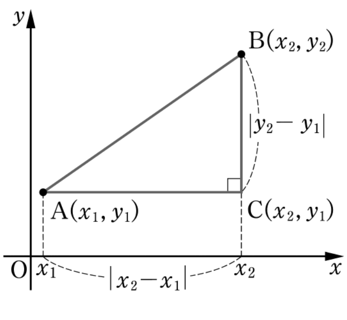
座標平面上の 2 点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2) 間の距離を求めてみよう。

線分 AB が座標軸に平行でないとして，図のような直角三角形 ABC をつくると

$$\mathrm{AC} = |x_2 - x_1|,\ \mathrm{BC} = |y_2 - y_1|$$

三平方の定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2}\\ &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}\\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\end{aligned}$$



2 点間の距離
2 点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2) 間の距離は $\mathbf{AB} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2}$ とくに，原点 O と点 P(x，y) の距離は　$\mathbf{OP} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$

この公式は，線分 AB が x 軸または y 軸に平行な場合でも成り立つ。

例 2　2 点 $A(-2,\ 4)$, $B(2,\ 3)$ 間の距離は

$$AB=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-4)^2}=\sqrt{17}$$

原点 O と点 $P(5,\ 12)$ の距離は

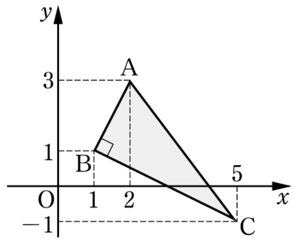
$$OP=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

問 2　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　$A(2,\ 1)$, $B(5,\ 7)$　　(2)　$A(-3,\ 5)$, $B(-2, -2)$

(3)　$O(0,\ 0)$, $P(-4,\ 3)$　　(4)　$A(8,\ -2)$, $B(8,\ -19)$

例 3　3 点 $A(2,\ 3)$, $B(1,\ 1)$, $C(5,\ -1)$ を頂点とする△ABC は，どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の 3 辺の長さは



$AB=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$

$\quad =2\sqrt{5}$

$CA=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5$

であるから　　$AB^2+BC^2=CA^2$

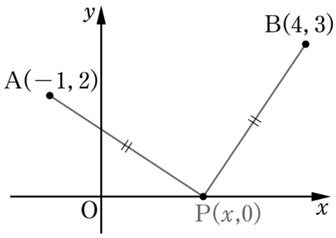
よって，△ABC は $\angle B$ を直角とする直角三角形である。

問 3　次の 3 点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1)　$A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 2)$, $C(3,\ -1)$

(2)　$A\left(2,\ \sqrt{3}\right)$, $B\left(-1,\ 2\sqrt{3}\right)$, $C(-1,\ 0)$

例 4　2 点 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 3)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めてみよう。点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする。



$AP=BP$ より　　$AP^2=BP^2$

よって

$(x+1)^2+(-2)^2=(x-4)^2+(-3)^2$

これを解くと　　$x=2$

すなわち　　$P(2,\ 0)$

問 4　2 点 $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 4)$ から等距離にある y 軸上の点 Q の座標を求めよ。

2　内分点・外分点

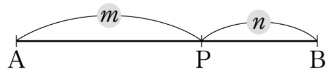
数直線上の内分点・外分点

m, n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

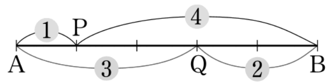
が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に**内分**するという。



例 5　右の図において

点 P は線分 AB を 1 : 4 に内分し，

点 Q は線分 AB を 3 : 2 に内分する。



問 5　2 点 A(3)，B(7) に対して，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，1 : 3 に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。

2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a < b$ のとき，$a < x < b$ となるから

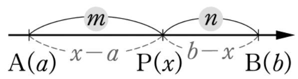
$$\mathrm{AP} = x - a, \qquad \mathrm{PB} = b - x$$

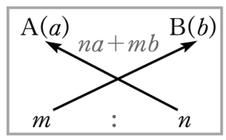
である。$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ であるから

$$(x - a) : (b - x) = m : n$$

すなわち　$m(b - x) = n(x - a)$

ゆえに　$\boldsymbol{x = \dfrac{na + mb}{m + n}}$





$a > b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

とくに，線分 AB の**中点**の座標は $\boldsymbol{\dfrac{a+b}{2}}$ である。

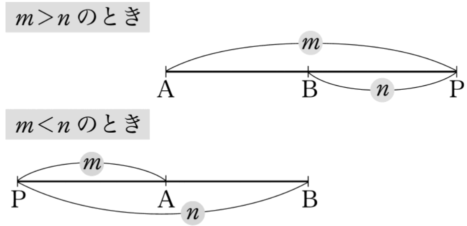
問 6　2 点 A(−4)，B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M　　　(2)　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P

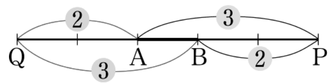
(3)　線分 AB を 1 : 4 に内分する点 Q

(4)　線分 BA を 1 : 4 に内分する点 R

$m,\ n$ を異なる正の数とする。
線分 AB の延長上に点 P があり
$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$
が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に**外分**するという。



例6　右の図の点 P は線分 AB を 3 : 2 に外分し, 点 Q は 2 : 3 に外分する。

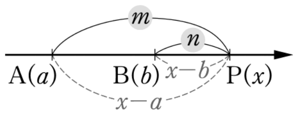


問7　例 6 の線分 AB を 1 : 2 に外分する点 R を図示せよ。

2 点 A(a), B(b) に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。
$a<b,\ m>n$ とすると，点 P は線分 AB の右側にあるから

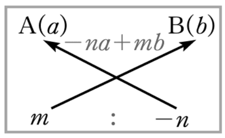
$$a<b<x$$

となる。



よって　　$\mathrm{AP}=x-a,\quad \mathrm{PB}=x-b$
$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ であるから

$$(x-a):(x-b)=m:n$$



すなわち　　$m(x-b)=n(x-a)$

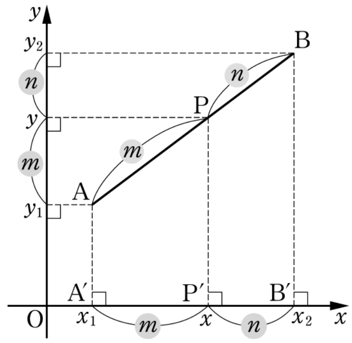
ゆえに　　$\boldsymbol{x=\dfrac{-na+mb}{m-n}}$

この式は a と b, m と n の大小に関係なく成り立つ。
外分の公式は，内分の公式で n を $-n$ に置き換えたものである。

問8　2 点 A(-5), B(7) に対して，次の点の座標を求めよ。
(1)　線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P
(2)　線分 AB を 1 : 3 に外分する点 Q

座標平面上の内分点・外分点

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 (x, y) を求めてみよう。



点 A, B, P から x 軸に垂線 AA′, BB′, PP′ を下ろすと，点 P′ は線分 A′B′ を $m:n$ に内分する点である。

数直線上の内分点の公式により

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

である。

また，点 A, B, P から y 軸に垂線を下ろして考えると，点 P の y 座標は

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

である。

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標
2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に**内分**する点の座標は $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$ $m:n$ に**外分**する点の座標は $\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$ とくに，線分 AB の**中点**の座標は $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

この公式を用いて，内分点，外分点の座標を求めてみよう。

例 7　2 点 A$(-2,\ 1)$，B$(4,\ 4)$ がある。

線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めてみよう。

P$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}=2,\qquad y=\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}=3$$

したがって，求める点 P の座標は $(2,\ 3)$ である。

線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めてみよう。

Q$(x',\ y')$ とすると

$$x'=\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot4}{2-1}=10,\qquad y'=\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}=7$$

したがって，求める点 Q の座標は $(10,\ 7)$ である。

問 9　次の 2 点 A，B を結ぶ線分 AB を，3 : 2 に内分する点 P，3 : 2 に外分する点 Q，および線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(1)　A$(1,\ 3)$，B$(6,\ 5)$　　(2)　A$(-2,\ 3)$，B$(4,\ -1)$

例題 1　ある点に関して対称な点

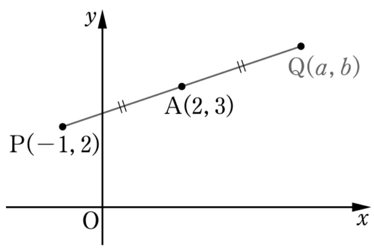
点 A$(2,\ 3)$ に関して，点 P$(-1,\ 2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

解　点 Q の座標を $(a,\ b)$ とすると，線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{-1+a}{2}=2,\qquad \frac{2+b}{2}=3$$

したがって　$a=5,\ b=4$

求める点 Q の座標は　$(5,\ 4)$



問 10　4 点 A$(-1,\ -1)$，B$(5,\ -2)$，C$(3,\ 3)$，D を頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1)　対角線 AC の中点 M　　(2)　頂点 D

三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を**中線**という。三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，この点をその三角形の**重心**という。重心はそれぞれの中線を 2：1 に内分する点である。

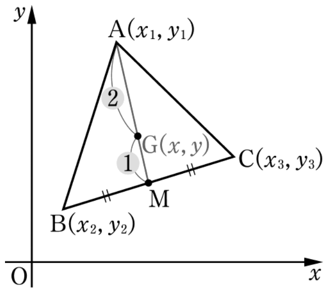
3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めてみよう。

辺 BC の中点を M とすると，点 M の座標は $\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ である。

重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は線分 AM を 2：1 に内分する点であるから

$$x=\frac{1\cdot x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{1\cdot y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$



以上より，次のことがわかる。

三角形の重心
3 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は　$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8　3 点 A(2, 3)，B(5, −4)，C(−1, 1)を頂点とする△ ABC の重心 G の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{2+5+(-1)}{3}=2,\qquad y=\frac{3+(-4)+1}{3}=0$$

すなわち　　G(2, 0)

問 11　3 点 A(3, 6)，B(−5, −1)，C(8, −7)を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めよ。

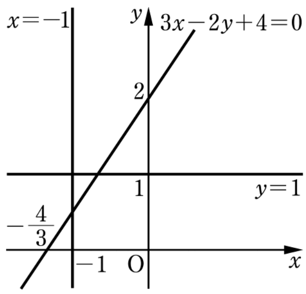
➡ p.80 問題2

3　直線の方程式

1 次関数 $y = mx + n$ のグラフは，傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を，この直線の **y 切片**という。

一般に，x，y についての方程式を成り立たせる点 $(x,\ y)$ のえがく図形を，その**方程式の表す図形**または**方程式のグラフ**という。また，その方程式を，その**図形の方程式**という。

x，y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形を考えてみよう。



$\boxed{例 9}$ (1)　方程式 $3x - 2y + 4 = 0$ は

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

と変形できるから，傾きが $\frac{3}{2}$，y 切片が 2 の直線を表す。

(2)　方程式 $y - 1 = 0$ は　　$y = 1$

と変形できるから，点 $(0,\ 1)$ を通り，x 軸に平行な直線を表す。

(3)　方程式 $x + 1 = 0$ は　　$x = -1$

と変形できるから，点 $(-1,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線を表す。

$\boxed{問 12}$　次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

(1)　$2x - 3y + 6 = 0$　　(2)　$y - 2 = 0$　　(3)　$x + 3 = 0$

一般に，x，y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形は，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき，直線である。実際

$b \neq 0$ のとき，傾きが $-\frac{a}{b}$ の直線 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ を表す。

とくに $a = 0$ のときは，x 軸に平行な直線 $y = -\frac{c}{b}$ を表す。

$b = 0$ のとき，y 軸に平行な直線 $x = -\frac{c}{a}$ を表す。

逆に，すべての直線は，x，y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ で表される。

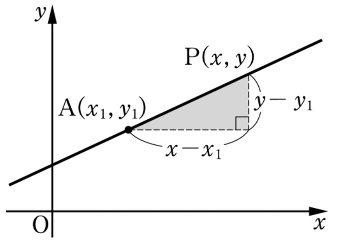
直線の方程式のいろいろな形

1　点 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線

　この直線上の点 A 以外の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，傾き m は次の式で表される。

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

よって　　$y-y_1=m(x-x_1)$



1 点を通り，傾き m の直線
点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式は $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$

例 10　点 $(2,\ -5)$ を通り，傾き -4 の直線の方程式は

$$y-(-5)=-4(x-2)$$

すなわち　　$y=-4x+3$

問 13　点 $(-3,\ 4)$ を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが 2　　　　(2)　傾きが $-\frac{1}{3}$

2　異なる 2 点 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathbf{B}(x_2,\ y_2)$ を通る直線

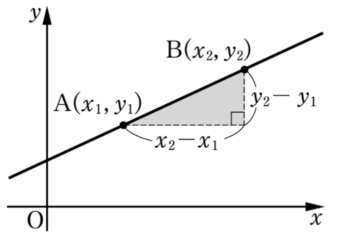
(i)　$x_1\neq x_2$ のとき

　直線 AB の傾き m は

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

　さらに点 $(x_1,\ y_1)$ を通るから，その方程式は

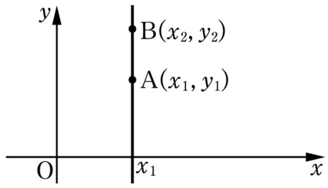
$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$



(ii)　$x_1 = x_2$ のとき

直線 AB は y 軸に平行であるから，その方程式は

$$x = x_1$$



2 点を通る直線
2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$ のとき　　$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$ $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ のとき　　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 11　2 点 A$(-3,\ 2)$, B$(6,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)}\{x - (-3)\}$　　すなわち　$y = \frac{2}{3}x + 4$

問 14　次の 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(2,\ -3)$, B$(4,\ 3)$　　(2)　A$(6,\ -1)$, B$(-3,\ 5)$

(3)　A$(-2,\ 0)$, B$(-2,\ -6)$　　(4)　A$(4,\ 7)$, B$(-3,\ 7)$

問 15　3 点 A$(-2,\ 6)$, B$(7,\ 3)$, C$(a,\ a+4)$ があるとき，次の問に答えよ。

(1)　2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

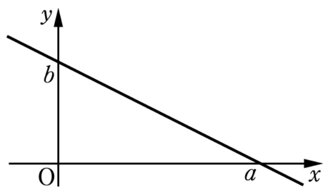
(2)　3 点 A, B, C が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

例 12　2 点 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線の方程式は，$a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - a)$$

である。これを変形すると

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$



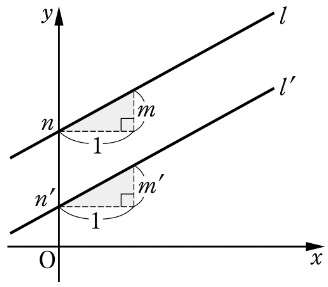
注意　直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の **x 切片**という。例 12 の直線では x 切片が a, y 切片が b である。

問 16　x 切片が 3, y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

数学 II　Advanced　P.072

4　2 直線の関係

2 直線の平行と垂直



2 直線　l： $y = mx + n$

l' : $y = m'x + n'$

が平行あるいは垂直となる条件を調べてみよう。

2 直線が平行ならば傾きは等しく，傾きが等しければ 2 直線は平行である。

すなわち　　2 直線 l, l' が平行　$\Leftrightarrow$　$m = m'$

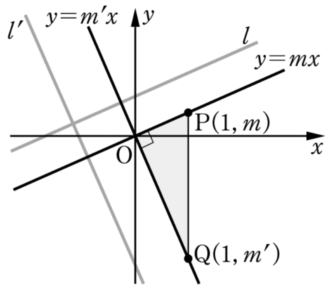
なお, $m = m'$, $n = n'$ のとき, 2 直線は一致するが, このときも平行と考えることにする。

次に，l, l' が座標軸に平行でないとして，l と l' の垂直条件を考える。

l と l' が垂直であることは，これらと平行で原点 O を通る 2 直線

$y = mx$,　$y = m'x$

が垂直であることと同じである。



この 2 直線上にそれぞれ

点 P$(1, m)$, Q$(1, m')$ をとると

$\mathrm{OP} \perp \mathrm{OQ}$

であるから，△ OPQ について三平方の定理により　　$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2$

すなわち　　$(m - m')^2 = (1 + m^2) + \{1 + (m')^2\}$

これを整理すると　　$mm' = -1$

逆に，2 直線の傾きの積が -1 のとき，それらは垂直である。

よって

2 直線 l, l' が垂直　$\Longleftrightarrow$　$mm' = -1$

2 直線の平行条件・垂直条件
2 直線 $y = mx + n,\ y = m'x + n'$ について **平行条件は $\boldsymbol{m = m'}$**　　　**垂直条件は $\boldsymbol{mm' = -1}$**

問 17　次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

①　$y = -2x + 5$　　②　$x - 3y + 7 = 0$

③　$6x + 2y + 3 = 0$　　④　$6x + 3y = 1$

例題 2　2 直線の平行と垂直

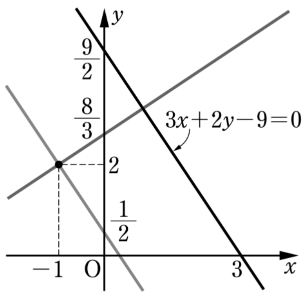
点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x + 2y - 9 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

解　直線 $3x + 2y - 9 = 0$ を l とすると，l の傾きは $-\frac{3}{2}$ である。

よって，l に平行な直線の傾きは $-\frac{3}{2}$ であるから，点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に平行な直線の方程式は

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

すなわち　$3x + 2y - 1 = 0$　……答



また，l に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{2}m = -1 \qquad \text{すなわち} \qquad m = \frac{2}{3}$$

点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

すなわち　$2x - 3y + 8 = 0$　……答

問 18　点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $2x - 5y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

➡ p.80 問題3

問 19　直線 $ax - 2y + 5 = 0$ が直線 $2x + y - 10 = 0$ に垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

➡ p.80 問題5

垂直条件を用いて，次の問題を解いてみよう。

例題 3　ある直線に関して対称な点

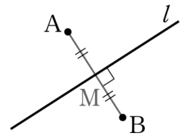
直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 A$(1,\ 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

考え方　2 点 A，B が，ある直線 l に関して対称である条件は

[1]　直線 AB は直線 l に垂直である

[2]　線分 AB の中点 M は直線 l 上にある

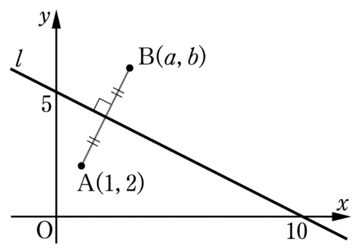
が成り立つことである。



解　直線 $x+2y-10=0$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　$-\frac{1}{2}$

直線 AB の傾きは　$\frac{b-2}{a-1}$



$l \perp$ AB であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-2}{a-1}=-1$$

すなわち

$$b=2a \qquad \cdots\cdots①$$

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\frac{a+1}{2}+2\cdot\frac{b+2}{2}-10=0$$

すなわち　$a+2b-15=0$　$\cdots\cdots②$

①，②より

$$a=3,\ b=6$$

したがって，点 B の座標は　$(3,\ 6)$

問 20　直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 A$(4,\ -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

➡ p.80 問題7

2 直線の交点

2 直線の交点の座標は，2 直線を表す方程式を連立させた連立 2 元 1 次方程式の解として得られる。

例題 4　3 直線が 1 点で交わる条件

2 直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ について，次の問に答えよ。

(1)　2 直線の交点の座標を求めよ。

(2)　この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解　(1)　連立方程式

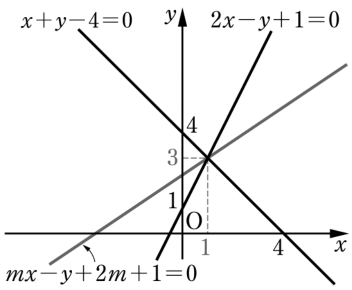
$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

を解くと

$$x=1,\ y=3$$

よって，求める交点の座標は

$$(1,\ 3)$$



(2)　直線 $mx-y+2m+1=0$ が点 $(1,\ 3)$ を通るから

$$m-3+2m+1=0$$

したがって

$$m=\frac{2}{3}$$

問 21　次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1)　$5x-4y+13=0$,　$3x+y+1=0$

(2)　$3x-y-6=0$,　$6x+5y+2=0$

問 22　3 直線

$$x-2y+8=0, \quad 2x+3y-5=0, \quad mx-y-2m+8=0$$

が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ。

2 直線の交点を通る直線

2 直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ に対して，方程式

$$\boldsymbol{k(x+y-4)+(2x-y+1)=0} \quad \cdots\cdots①$$

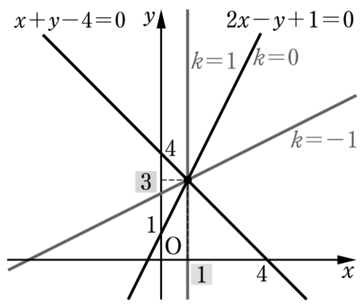
を考える。ただし，k は定数とする。

方程式①が 2 直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。

$x+y-4=0$, $2x-y+1=0$

を同時に満たす x, y の値の組 $x=1$, $y=3$ は k の値に関係なく①を満たす。

よって，①で表される図形は 2 直線の交点 $(1,\ 3)$ を通る。



また，①を変形すると

$$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0 \quad \cdots\cdots②$$

$k+2$ と $k-1$ は同時には 0 にならないから，②の表す図形は直線である。

よって，①は 2 直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ の交点 $(1,\ 3)$ を通る直線を表す。

例題 5　2 直線の交点を通る直線

2 直線 $3x+4y-17=0$, $x-2y+1=0$ の交点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解　k を定数として，2 直線の交点を通る直線の方程式を

$$k(3x+4y-17)+(x-2y+1)=0 \quad \cdots\cdots①$$

とおく。①に点 $(2,\ 3)$ の座標 $x=2$, $y=3$ を代入すると

$k(3\cdot2+4\cdot3-17)+(2-2\cdot3+1)=0$ より　　$k=3$

これを①に代入して整理すると，求める直線の方程式は

$$x+y-5=0$$

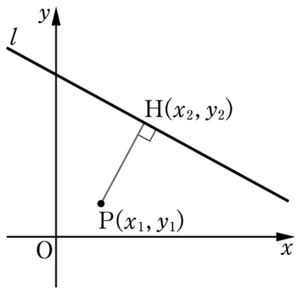
問 23　2 直線 $4x-5y+5=0$, $x+2y-6=0$ の交点と点 $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

➡ p.106 練習問題2

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ を l とし，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を l 上にない点とする。

直線 l と点 P の距離は，点 P から直線 l に下ろした垂線 PH の長さである。これを求めてみよう。$a \neq 0,\ b \neq 0$ とし，点 H の座標を $(x_2,\ y_2)$ とすると，垂直条件から



$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

よって　$\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$

この値を k とおくと

$$x_2-x_1=ak,\quad y_2-y_1=bk \quad \cdots\cdots①$$

すなわち　$x_2=x_1+ak,\quad y_2=y_1+bk \quad \cdots\cdots②$

また，$\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$ は直線 l 上の点であるから　$ax_2+by_2+c=0$

これと②より

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$$
$$(a^2+b^2)k+(ax_1+by_1+c)=0$$

これより　$k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \quad \cdots\cdots③$

①，③より　$\mathrm{PH}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(a^2+b^2)k^2$

$$=(a^2+b^2)\cdot\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$$

ゆえに　$\mathrm{PH}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

点と直線の距離
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は $\boldsymbol{d=\frac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

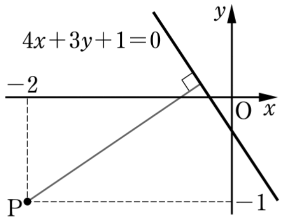
上の公式は，$a,\ b$ の一方が 0 の場合も成り立つ。

例 13　点 P$(-2,\ -1)$ と直線

$$4x+3y+1=0$$

の距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$



問 24　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $x+2y+2=0$

(2)　点 $(3,\ 4)$ と直線 $2x-3y+1=0$

(3)　点 $(7,\ -1)$ と直線 $y=-3x+6$

➡ p.80 問題8

座標を用いた図形の性質の証明

座標を利用して，図形の性質を証明してみよう。

応用例題 6　中線定理

△ ABC の辺 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

であることを証明せよ。

証明　M を原点とし，直線 BC を x 軸にとると，三角形の頂点A，B，C の座標はそれぞれ

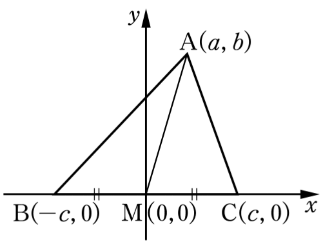
$$\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(-c,\ 0),\ \mathrm{C}(c,\ 0)$$

とおける。このとき

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$$

ゆえに　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$



問 25　△ ABC の辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とすると

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$$

であることを証明せよ。

➡ p.106 練習問題4

2 直線の垂直条件を利用して，三角形の頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線が 1 点で交わることを証明してみよう。

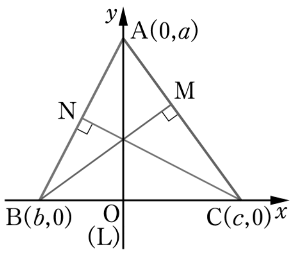
応用例題 7　3 本の垂線の交点

△ ABC の 3 つの頂点から，それぞれの対辺に下ろした垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わることを証明せよ。

証明　△ ABC が直角三角形ならば，明らかに 3 本の垂線は直角の頂点で交わる。

次に，△ ABC が直角三角形でないならば，直線 BC を x 軸，垂線 AL を y 軸にとると，A$(0,\ a)$，B$(b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ とおける。

ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ である。



直線 AC の傾きは $-\frac{a}{c}$ であるから，

垂線 BM の方程式は

$$y=\frac{c}{a}(x-b)$$

また，直線 AB の傾きは $-\frac{a}{b}$ であるから，垂線 CN の方程式は

$$y=\frac{b}{a}(x-c)$$

直線 BM，CN はともに y 軸上の点 $\left(0,\ -\frac{bc}{a}\right)$ を通る。

したがって，3 本の垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わる。

例題 7 における 3 本の垂線の交点を△ ABC の**垂心**という。

問 26　△ ABC において，各辺の垂直二等分線は，1 点で交わることを証明せよ。

図形の性質を証明するには，座標を用いて次のようにするとよい。

1　座標軸を適当に設定し，図形の関係を数式で表す。

2　得られた数式を用いて計算する。

3　計算結果を図形的に解釈する。

数学 II　Advanced　P.080

問題

1　2 点 A(-2), B(5) を結ぶ線分 AB を 3：4 に内分する点を C, 3：4 に外分する点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。 → p.106 練習問題1

2　△ABC の 2 つの頂点 A, B および重心 G の座標が A$(-7,\ -5)$, B$(2,\ -2)$, G$(-2,\ -1)$ であるとき，頂点 C の座標を求めよ。

3　2 点 A$(3,\ 4)$, B$(-2,\ 7)$ を通る直線を l とするとき，次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に平行な直線

(2)　点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に垂直な直線

4　2 点 A$(1,\ -1)$, B$(3,\ -7)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

5　2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ について, 次のことが成り立つことを証明せよ。ただし，$b_1\neq 0$, $b_2\neq 0$ とする。

(1)　2 直線が**平行**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0}$

(2)　2 直線が**垂直**　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

6　2 直線

$$ax+4y-1=0$$
$$x+(a-3)y-2=0$$

が平行になるような定数 a の値を求めよ。また, 垂直になるような定数 a の値を求めよ。

7　直線 $y=x$ に関して，点 A$(p,\ q)$ と対称な点 B の座標を p, q で表せ。ただし，$p\neq q$ とする。

8　点 A$(2,\ 1)$ と直線 $5x+12y+4=0$ 上を動く点 P がある。線分 AP の長さの最小値を求めよ。 → p.106 練習問題3