数学 II　Advanced　P.005

1 章　方程式・式と証明

数学において上達したければ，弟子たちにではなく巨匠たちに学ぶとよい。

ノルウェーの数学者。
中学生のときの数学教師ホルンボエとの出会いにより，数学に目覚める。
5 次方程式に解の公式が存在しないことを証明した。
それ以外にも数学の様々な分野で多大な功績を残した。
26 歳という若さでこの世を去った天才を偲び，2002 年に「アーベル賞」が設けられた。
ニールス・ヘンリック・アーベル
(1802 年～1829 年)

数学 II　Advanced　P.006

1 節　整式の乗法・除法と分数式

1　整式の乗法と因数分解

2 次式の乗法公式と因数分解については数学 I で学んだ。ここでは，3 次式の乗法公式と因数分解について考えてみよう。

3 次式の乗法公式

例 1　$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$
$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$
$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$
$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$
$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

問 1　$(a-b)^3$ を展開せよ。

次の 3 次式の乗法公式が成り立つ。

3 次式の乗法公式 (1)
1　$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$
2　$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

例 2　(1)　$(x-2)^3 = x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3$
$= x^3-6x^2+12x-8$

(2)　$(3x+2y)^3 = (3x)^3+3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2+(2y)^3$
$= 27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

問 2　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)^3$　　(2)　$(3x-1)^3$

(3)　$(x+10y)^3$　　(4)　$(2x-5y)^3$

また，次の乗法公式も成り立つ。

3 次式の乗法公式 (2)
$\boxed{3}$　$\boldsymbol{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$
$\boxed{4}$　$\boldsymbol{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$

問 3　上の公式 $\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が成り立つことを示せ。

問 4　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+7)(x^2-7x+49)$　　(2)　$(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$

3 次式の因数分解

上の乗法公式 $\boxed{3}$，$\boxed{4}$ を逆に利用することにより，次の公式が成り立つ。

3 次式の因数分解
$\boxed{5}$　$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$
$\boxed{6}$　$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

例 3　(1)　$x^3+125=x^3+5^3=(x+5)(x^2-x\cdot 5+5^2)$

$=(x+5)(x^2-5x+25)$

(2)　$27x^3-8y^3=(3x)^3-(2y)^3$

$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

問 5　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+1　　(2)　x^3-8　　(3)　$64x^3-125y^3$　　➡ p.19 問題2

例 4　$(x^6-y^6)=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)\times(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

問 6　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^6-64y^6　　(2)　x^6+7x^3-8

2　二項定理

パスカルの三角形

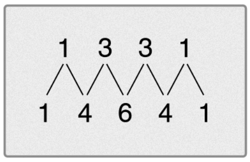
$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ を展開すると次のようになる。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

これをもとに，$(a+b)^4$ を展開してみよう。

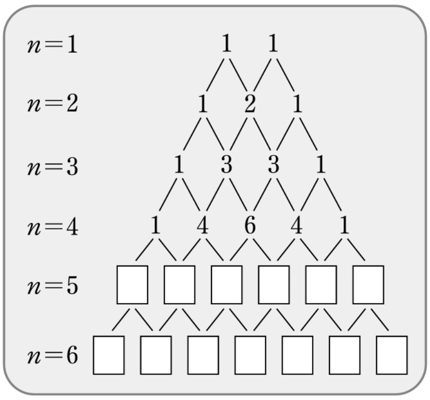
$$\begin{aligned}(a+b)^4&=(a+b)(a+b)^3\\&=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\\&=1a^4+3a^3b+3a^2b^2+1ab^3\\&\qquad+1a^3b+3a^2b^2+3ab^3+1b^4\\&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

よって，$(a+b)^4$ の展開式において，両端の 1 以外の係数は，$(a+b)^3$ の展開式における隣り合った係数 1 と 3，3 と 3，3 と 1 のそれぞれの和として得られることがわかる。



問 7　$(a+b)^5$ の展開式を求め，この展開式の係数が $(a+b)^4$ の展開式の係数から，上と同様の考え方により得られることを確かめよ。

$(a+b)^n$ の展開式の係数を次々と求め，右のように並べたものを**パスカルの三角形**という。



問 8　右のパスカルの三角形で，$n=5$，$n=6$ の行の空所をうめ，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

二項定理

$(a+b)^4$ の展開式における a^3b の係数は，パスカルの三角形から 4 である。

これを組合せの考え方を利用して求めてみよう。

$(a+b)^4$　　すなわち　　$\underset{①}{(a+b)}\underset{②}{(a+b)}\underset{③}{(a+b)}\underset{④}{(a+b)}$

を展開して得られる項は，4 個の因数①，②，③，④のそれぞれから，a か b のどちらかを取り出して掛け合わせた積である。

たとえば, a^3b の項は, 4 個の因数のうち 1 個の因数を選んで b を取り出し, 残り 3 個の因数から a を取り出して掛け合わせることにより得られる。

①	②	③	④	
$a\times$	$a\times$	$a\times$	b	$=a^3b$
$a\times$	$a\times$	$b\times$	a	$=a^3b$
$a\times$	$b\times$	$a\times$	a	$=a^3b$
$b\times$	$a\times$	$a\times$	a	$=a^3b$

すなわち，4 個の因数から 1 個の因数を選ぶ選び方の数だけ a^3b の項ができる。したがって，a^3b の項は ${}_4\mathrm{C}_1=4$ (個) 現れるから，a^3b の係数は ${}_4\mathrm{C}_1$ である。

同様に考えると，$(a+b)^4$ の展開式におけるすべての項

$$a^4,\ a^3b,\ a^2b^2,\ ab^3,\ b^4$$

の係数はそれぞれ

$${}_4\mathrm{C}_0,\ {}_4\mathrm{C}_1,\ {}_4\mathrm{C}_2,\ {}_4\mathrm{C}_3,\ {}_4\mathrm{C}_4$$

である。一般に，次の**二項定理**が成り立つ。

二項定理

$$\boldsymbol{(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots}$$
$$\boldsymbol{+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n}$$

$(a+b)^n$ の展開式における項は，一般に

$${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r\ \ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と表される。これを $(a+b)^n$ の展開式の**一般項**という。ただし，a^0 や b^0 は 1 と定める。また，${}_n\mathrm{C}_r$ を**二項係数**ともいう。

例 5　二項定理を用いて式を展開すると，次のようになる。

(1)　$(2a+b)^5 = {}_5\mathrm{C}_0(2a)^5 + {}_5\mathrm{C}_1(2a)^4b^1 + {}_5\mathrm{C}_2(2a)^3b^2$
$\qquad + {}_5\mathrm{C}_3(2a)^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4(2a)^1b^4 + {}_5\mathrm{C}_5b^5$
$= 32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5$

(2)　$(x-5y)^3 = {}_3\mathrm{C}_0x^3 + {}_3\mathrm{C}_1x^2(-5y)^1 + {}_3\mathrm{C}_2x^1(-5y)^2 + {}_3\mathrm{C}_3(-5y)^3$
$= x^3 - 15x^2y + 75xy^2 - 125y^3$

問 9　二項定理を用いて，次の式を展開せよ。

(1)　$(3a+b)^4$　　(2)　$(2x-3y)^4$　　(3)　$(2x^2+1)^5$

また，パスカルの三角形のつくり方から，

${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ が成り立つことがわかる。

$n-1$　　${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　　${}_{n-1}\mathrm{C}_r$

n　　　　　${}_n\mathrm{C}_r$

二項定理の応用

二項定理を応用して，項の係数を求めてみよう。

例題 1　二項定理［1］

$(2x^2-1)^8$ の展開式における x^6 の係数を求めよ。

解　$(2x^2-1)^8$ の展開式における一般項は

$$\begin{aligned}{}_8\mathrm{C}_r(2x^2)^{8-r}(-1)^r &= {}_8\mathrm{C}_r2^{8-r}(x^2)^{8-r}(-1)^r \\ &= {}_8\mathrm{C}_r2^{8-r}x^{2(8-r)}(-1)^r \\ &= {}_8\mathrm{C}_r2^{8-r}(-1)^rx^{16-2r}\end{aligned}$$

ここで，$16-2r=6$ となるのは，$r=5$ のときであるから，x^6 の係数は

$$\begin{aligned}{}_8\mathrm{C}_52^{8-5}(-1)^5 &= 56\cdot2^3\cdot(-1)^5 \\ &= -448\end{aligned}$$

問 10　次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(3x^2+2)^6$ における x^2　　(2)　$(x-3y)^7$ における x^2y^5

応用例題 2　二項定理［2］

$(x+y+z)^6$ の展開式における x^2y^3z の係数を求めよ。

考え方　$x+y$ を 1 つのものと考えて，$\{(x+y)+z\}^6$ を展開する。

解　$\{(x+y)+z\}^6$ の展開式の一般項は

$$ {}_6\mathrm{C}_r(x+y)^{6-r}z^r $$

z の次数に着目すると，x^2y^3z が現れるのは $r=1$ のときだけで

$$ {}_6\mathrm{C}_1(x+y)^5z $$

$(x+y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の係数は ${}_5\mathrm{C}_3$ であるから，x^2y^3z の係数は

$$ {}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3=60 $$

問 11　$(x+2y+3z)^5$ の展開式における x^2y^2z および x^3y^2 の係数を求めよ。

また，例題 2 の x^2y^3z の項は，6 個の因数

$$ \underset{①}{(x+y+z)}\underset{②}{(x+y+z)}\underset{③}{(x+y+z)}\underset{④}{(x+y+z)}\underset{⑤}{(x+y+z)}\underset{⑥}{(x+y+z)} $$

から 2 個の因数を選んで x を取り出し，残り 4 個の因数から 3 個の因数を選んで y を取り出し，最後に残った 1 個の因数から z を取り出して掛け合わせることによっても得られる。

したがって，x^2y^3z の係数は

$$ {}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_1\mathrm{C}_1=\frac{6!}{2!\,4!}\times\frac{4!}{3!\,1!}\times1=\frac{6!}{2!\,3!\,1!} $$

一般に，次の定理が成り立つ。

$(a+b+c)^n$ の展開

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は

$$ \frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \qquad \text{ただし，} p+q+r=n $$

$\boxed{\text{例 6}}$　$(x-2y+3z)^5$ の展開式における xy^2z^2 の係数を求めてみよう。
展開式における xy^2z^2 の項は

$$\frac{5!}{1!\,2!\,2!}x(-2y)^2(3z)^2$$

であるから，xy^2z^2 の係数は

$$\frac{5!}{1!\,2!\,2!}\cdot(-2)^2\cdot 3^2=1080$$

$\boxed{\text{問 12}}$　$(x-y+2z)^7$ の展開式における $x^2y^3z^2$ の係数を求めよ。

二項定理を用いて，${}_n\mathrm{C}_r$ のさまざまな性質を導くことができる。
まず，次の等式について考えてみよう。

$$2^1=1+1={}_1\mathrm{C}_0+{}_1\mathrm{C}_1$$
$$2^2=1+2+1={}_2\mathrm{C}_0+{}_2\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2$$
$$2^3=1+3+3+1={}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3$$
$$\cdots$$

一般に，$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$ が成り立つ。
これを示してみよう。

$\boxed{\text{例 7}}$　二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

において，$a=1,\ b=x$ とおくと

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

さらに，$x=1$ を代入すると

$$2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$$

$\boxed{\text{問 13}}$　次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$3^n={}_n\mathrm{C}_0+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1+2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

(2)　$0={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

➡ p.58 練習問題1

3　整式の除法

整数 a と正の整数 b に対して，a を b で割った商が q，余りが r であるとき

$$a = bq + r,\quad 0 \leqq r < b$$

が成り立つ。

たとえば，$172 \div 7$ を計算すると商は 24，余りは 4 である。

このとき

$$172 = 7 \times 24 + 4$$

◀割る数×商＋余り

である。同じような計算を整式で行うことを考えてみよう。

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 24 \\
7 & \overline{)172} \\
 & 140 \cdots 7 \times 20 \\ \hline
 & 32 \\
 & 28 \cdots 7 \times 4 \\ \hline
 & 4
\end{array}$$

$\boxed{\text{例 8}}$　整式 $A = 2x^2 - 7x + 5$，整式 $B = x - 3$ のとき，A を B で割ると次のようになる。

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 2x - 1 \\
x-3 & \overline{)2x^2 - 7x + 5} \\
 & 2x^2 - 6x \quad \cdots (x-3) \times 2x \\ \hline
 & -x + 5 \\
 & -x + 3 \cdots (x-3) \times (-1) \\ \hline
 & 2
\end{array}$$

最後の行に現れた 2 は，割る式 $x - 3$ よりも次数が低いから，これ以上計算を続けることはできない。

このとき，A を B で割ったときの**商**は $2x - 1$，**余り**は 2 であるという。上の割り算から

$$A = B \times (2x - 1) + 2 \qquad \cdots\cdots①$$

◀割る式×商＋余り

が成り立つことがわかる。

$\boxed{\text{問 14}}$　整式 $3x^2 + 2x + 1$ を整式 $3x - 4$ で割り，商と余りを求めよ。

また，例 8 にならって，整式 $3x^2 + 2x + 1$ を①の形に表せ。

一般に，整式 A を 0 でない整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると，次の式が成り立つ。

商と余り
$\boldsymbol{A = BQ + R,\qquad R}$ **の次数** $\boldsymbol{<B}$ **の次数**

このような $Q,\ R$ はただ 1 つ定まる。

とくに，$R=0$ となるとき，A は B で**割り切れる**という。このとき，B は A の**因数**であるという。

例題 3　整式の除法［1］

次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

$$A = 2x^3 + 4x^2 + 7,\qquad B = 2x^2 - 3$$

解

$$
\begin{array}{r}
x + 2 \\
2x^2 \boxed{} - 3 \,\big)\, \overline{2x^3 + 4x^2 \boxed{} + 7} \\
\underline{2x^3 \boxed{} - 3x } \\
4x^2 + 3x + 7 \\
\underline{4x^2 \boxed{} - 6} \\
3x + 13
\end{array}
$$

◀ 項がないときはあけておく

〈答〉商 $x+2$，　余り $3x+13$

注意　このような計算では，割る式も割られる式も，文字 x について降べきの順に整理しておくとよい。

問 15　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 8,\qquad B = x^2 - x - 3$

(2)　$A = 6x^3 - x^2 - 5x + 2,\qquad B = 3x - 2$

(3)　$A = 3x^3 + 7x^2 + 5,\qquad B = x^2 + 3x - 1$

(4)　$A = 2 + 3x + 2x^3 + x^4,\qquad B = 1 + x^2$

➡ p.19 問題4

例題 4　整式の除法［2］

整式 x^3-3x^2-6x-2 をある整式 B で割ると，商が $x+2$，余りが $3x-4$ である。このとき，整式 B を求めよ。

解　$x^3-3x^2-6x-2=B(x+2)+(3x-4)$

が成り立つから

$B(x+2)=(x^3-3x^2-6x-2)-(3x-4)$

$\qquad\quad =x^3-3x^2-9x+2$

よって，x^3-3x^2-9x+2 を $x+2$

で割って

$\qquad B=x^2-5x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-5x+1 \\
\hline
x+2 & x^3-3x^2-9x+2 \\
 & x^3+2x^2 \\
\hline
 & \quad -5x^2-9x \\
 & \quad -5x^2-10x \\
\hline
 & \qquad\qquad x+2 \\
 & \qquad\qquad x+2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

問 16　整式 $3x^3+14x^2-4x+5$ をある整式 B で割ると，商が $3x-1$，余りが $7x+3$ である。このとき，整式 B を求めよ。

➡ p.19 問題5

2 種類以上の文字を含む整式についても，その中の 1 つの文字に着目して，割り算を行うことができる。

応用例題 5　2 種類の文字を含む整式の除法

$A=2x^3-5x^2y+6xy^2-8y^3$，$B=x-2y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-\quad xy+4y^2 \\
\hline
x-2y & 2x^3-5x^2y+6xy^2-8y^3 \\
 & 2x^3-4x^2y \\
\hline
 & \quad -x^2y+6xy^2 \\
 & \quad -x^2y+2xy^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 4xy^2-8y^3 \\
 & \qquad\qquad 4xy^2-8y^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

〈答〉 商 $2x^2-xy+4y^2$，　余り 0

問 17　$A=x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$，$B=x-y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

4　分数式とその計算

$\frac{1}{x}$，$\frac{x+1}{x^2-3}$ のように，A を整式，B を 1 次以上の整式としたとき，$\frac{A}{B}$ の形で表される式を**分数式**という。

整式と分数式を合わせて**有理式**という。

約分

C が 0 でない整式のとき，分数式 $\frac{AC}{BC}$ に対し

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。すなわち，分母と分子に共通な因数があれば**約分**ができる。

これ以上約分できないとき，分数式は**既約**であるという。

例 9　(1)　$\frac{9a^3b}{12a^2b^3}=\frac{3a}{4b^2}$

(2)　$\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x+3)(x-2)}$

$$=\frac{x+4}{x-2}$$

問 18　次の分数式を約分して，既約な分数式になおせ。

(1)　$\frac{12a^4bc^2}{15a^3b^3c}$　　(2)　$\frac{2x^2+3x-2}{4x^2-1}$　　(3)　$\frac{x^3+1}{x^2+4x+3}$

乗法・除法

分数式の乗法，除法は次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例 10　$\frac{x-5}{x^2-x} \div \frac{x^2-10x+25}{x^2-4x} = \frac{x-5}{x^2-x} \times \frac{x^2-4x}{x^2-10x+25}$

$$= \frac{x-5}{x(x-1)} \times \frac{x(x-4)}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{x-4}{(x-1)(x-5)}$$

注意　分数式の計算で得られた結果は，既約な分数式になおしておく。

問 19　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{x^2-3x}{x^2+x-2} \times \frac{x-1}{x^2+2x}$　　(2)　$\frac{x^3-8}{x^2+4x+4} \div \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

加法・減法

分母が等しい分数式の加法，減法は次のようにする。

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

例 11　$\frac{3}{x^2-4} - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{3-(x+1)}{x^2-4}$

$$= \frac{-(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= -\frac{1}{x+2}$$

問 20　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6} - \frac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$　　(2)　$\frac{x-1}{x^2-x} + \frac{x^2-x+1}{x^2-x}$

いくつかの分数式の分母が異なるときには，適当な整式をそれらの分母と分子に掛けて，分母が同じ分数式になおすことができる。このことを，これらの分数式を**通分**するという。

例題 6　分数式の計算

$\frac{3}{x^2+3x}+\frac{x+1}{x^2-x}$ を計算せよ。

解

$$\frac{3}{x^2+3x}+\frac{x+1}{x^2-x}=\frac{3}{x(x+3)}+\frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{3(x-1)}{x(x+3)(x-1)}+\frac{(x+1)(x+3)}{x(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{(3x-3)+(x^2+4x+3)}{x(x+3)(x-1)}$$

$$=\frac{x^2+7x}{x(x+3)(x-1)}=\frac{x(x+7)}{x(x+3)(x-1)}=\frac{x+7}{(x+3)(x-1)}$$

$$\begin{array}{lcc|c|c}
x(x+3) & \longrightarrow & x & (x+3) & \\
x(x-1) & \longrightarrow & x & & (x-1) \\
\hline
 & & x & (x+3) & (x-1)
\end{array}$$

問 21　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-4}$　　(2)　$\frac{2x}{x^2-1}-\frac{3x}{2x^2+x-1}$

分母や分子に分数式を含む式について考えてみよう。

例 12　$P=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$ の右辺は $\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ であるから

$$P=\left(1+\frac{1}{x}\right)\div\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x+1}{x}\div\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$=\frac{x+1}{x}\times\frac{x^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x-1}$$

注意　P の分母と分子に x^2 を掛けて，次のように計算してもよい。

$$P=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x^2}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\times x^2}=\frac{x^2+x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x-1}$$

問 22　次の式を簡単にせよ。

(1)　$\frac{a+2}{a-\frac{2}{a+1}}$　　(2)　$\frac{1-\frac{x+y}{x-y}}{1+\frac{x+y}{x-y}}$

数学 II　Advanced　P.019

問題

1　次の式を展開せよ。

(1)　$(2a-3b)^3$　　　(2)　$(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$

2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^3y^3-27z^3$　　　(2)　$x^3+y^3+3y^2+3y+1$

3　次の式を展開したとき，それぞれ指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(ax-b)^{12}$ における x^{11} および x^2　（ただし，a，bは定数とする）

(2)　$(x-2y+z^2)^7$ における $x^2y^3z^4$

4　次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

(1)　$A=12x^3-x^2+2,$　　$B=3x^2-x-1$

(2)　$A=6x^3+x^2-2x+1,$　　$B=3x-1$

(3)　$A=x^3-5x^2+8x+1,$　　$B=2x-6$

5　ある整式 A を $2x^2+4x-3$ で割ると，商が $x-2$，余りが $3x+1$ である。
このとき，整式 A を求めよ。

6　次の式を計算せよ。

(1)　$\frac{6x^2+13xy-5y^2}{2x^2-xy-3y^2}\div\frac{3x^2+2xy-y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$

(2)　$\frac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9}\times\frac{x^3-27}{3x+9}\div\frac{x^2-9}{3x}$

(3)　$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}$

(4)　$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}\right)\div\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}\right)$

(5)　$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a+1}}}$