1節　微分係数と導関数

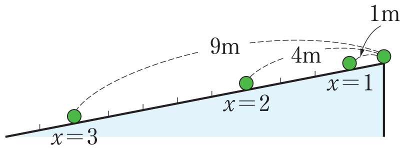
1　微分係数

平均の速さ

斜面を転がる球の速さは，時刻とともに変化する。

ある斜面では，球が転がりはじめてからの時間 x（秒）と，転がった距離 y（m）との間に

$$y = x^2$$



の関係が成り立っている。この関数を $y=f(x)$ とすると，球が転がりはじめて2秒後から3秒後までの平均の速さは

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{3^2-2^2}{3-2} = 5 \quad (\mathrm{m/s})$$

問 1　上の球の運動で，3秒後から4秒後までの平均の速さを求めよ。

平均変化率

平均の速さと同様のことを，一般の関数についても考えてみよう。

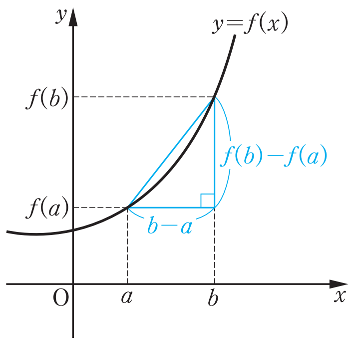
関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき

x の変化量　$b-a$　　と

y の変化量　$f(b)-f(a)$

との比の値

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \cdots\cdots ①$$



を，x が a から b まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の **平均変化率** という。

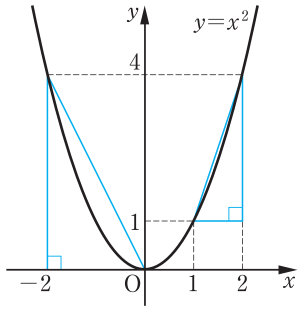
例 1　2次関数 $f(x)=x^2$ について，平均変化率を求めてみよう。

(1)　x が1から2まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2^2-1^2}{2-1}=3$$

(2)　x が -2 から0まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=\frac{0^2-(-2)^2}{0-(-2)}=\frac{-4}{2}=-2$$



問 2　次の関数について，x が3から5まで変わるときの平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=3x+2$　　(2)　$f(x)=2x^2+3x$

前ページの ① において，b を $a+h$ で置き換えると，x が a から $a+h$ まで変わるときの関数 $f(x)$ の平均変化率は次のようになる。ただし，$h\neq 0$ とする。

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例 2　2次関数 $f(x)=x^2+3x$ について，x が2から $2+h$ まで変わるときの平均変化率を求めてみよう。

$$f(2+h)-f(2)=\{(2+h)^2+3(2+h)\}-(2^2+3\cdot 2)$$
$$=7h+h^2=h(7+h)$$

であるから，求める平均変化率は

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{h(7+h)}{h}$$
$$=7+h$$

問 3　関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のときの平均変化率を求めよ。

(1)　x が1から $1+h$ まで変わるとき

(2)　x が a から $a+h$ まで変わるとき

瞬間の速さ

178ページの球の運動において，転がりはじめて2秒後から$2+h$秒後までの平均の速さは

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=\frac{h(4+h)}{h}$$

$$=4+h \quad (\mathrm{m/s})$$

となる。ただし，$h \neq 0$ である。

この平均の速さはhの値によって変化するが，経過時間hを0.1，0.01，0.001，…と0に限りなく近づけていくと，平均の速さ$4+h$は下の表からもわかるように，限りなく 4 に近づく。また，hが負の値をとりながら0に近づく場合も同様である。

h	…	-0.1	-0.01	-0.001	…	0	…	0.001	0.01	0.1	…
$4+h$	…	3.9	3.99	3.999	…	4	…	4.001	4.01	4.1	…

この 4 という値は，球が転がりはじめて2秒後の“瞬間の速さ”を表していると考えてよい。

極限値と微分係数

関数$f(x)$において，xがaと異なる値をとりながら限りなくaに近づくとき，$f(x)$が一定の値αに限りなく近づくならば

$$\boldsymbol{x \to a} \quad \text{のとき} \quad \boldsymbol{f(x) \to \alpha}$$

または

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = \alpha}$$

と書き，αをxがaに限りなく近づくときの$f(x)$の **極限値** という。(*)

発展 P.190

例 3 $\lim_{x\to 1}(2x-6)=2\cdot 1-6=-4$

問 4 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 4}(2x-3)$　　(2) $\lim_{x\to -2}(x^2+3x)$

→ p.189 問題1

(*) lim は極限を意味する limit に由来する記号であり，“リミット”と読む。

例 4　178 ページの球の運動において，転がりはじめて 2 秒後の“瞬間の速さ”は，次のように表される。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4\quad(\mathrm{m/s})$$

問 5　例 4 にならって，球が転がりはじめて 3 秒後の瞬間の速さを求めよ。

x が a から $a+h$ まで変わるときの関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において，h を限りなく 0 に近づけたとき，この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** または変化率

といい，$f'(a)$ で表す。

微分係数の定義

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

例 5　関数 $f(x)=x^2$ について

(1)　$x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

(2)　$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

問 6　関数 $f(x)=2x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1)　$f'(1)$　　(2)　$f'(-2)$　　(3)　$f'(a)$　→ p.189 問題2

微分と積分

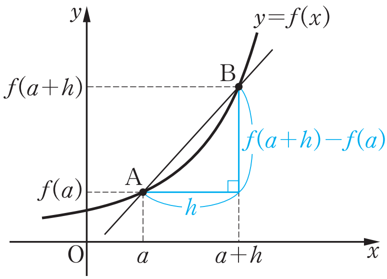
微分係数の図形的意味

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数の意味を，この関数のグラフにおいて考えてみよう。

グラフ上に，x 座標がそれぞれ a，$a+h$ である2点A，Bをとると

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

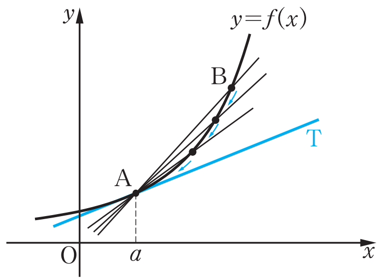
は，直線ABの傾きを表している。



いま，h を0に限りなく近づけると，点Bはグラフ上を動いて限りなく点Aに近づく。このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

であるから，直線ABは点Aを通り，傾き $f'(a)$ の直線ATに限りなく近づく。この直線ATを点Aにおける曲線 $y=f(x)$ の **接線** といい，点Aを **接点** という。



以上のことは，次のようにまとめることができる。

> 微分係数 $f'(a)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。

例 6　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(3,\ 9)$ における接線の傾きは，$f(x)=x^2$ とおくと $f'(3)$ に等しいから

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-3^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

問 7　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(-2,\ 4)$ における接線の傾きを求めよ。

2 導関数

181 ページの例 5 で調べたように，関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=2a$$

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(a)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

であった。この式で，a の値を変えると，$f'(a)$ の値も変わる。

すなわち，a を変数とみなすと，微分係数 $f'(a)$ は a の関数になる。

そこで，文字 a を文字 x に置き換えて得られる関数 $f'(x)=2x$ を，関数 $f(x)=x^2$ の“導関数”という。

一般に，関数 $y=f(x)$ が与えられたとき，x のおのおのの値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させると，1 つの新しい関数 $f'(x)$ が得られる。

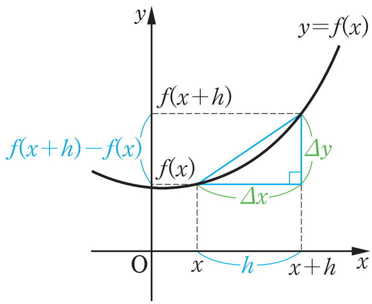
この関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の **導関数** という。

すなわち，関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は次の式で定義される。

導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

上の式において，h は x の変化量，$f(x+h)-f(x)$ はそれにともなう y の変化量を表している。これらをそれぞれ，x の **増分**，y の **増分** といい，記号 Δx，Δy で表す。(*) すなわち



$$\Delta x=h,\quad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

Δx，Δy の記号を用いると，導関数は次のように表される。

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

関数 $y=f(x)$ の導関数を表すには，$f'(x)$ のほかに y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などの記号も用いられる。

(*) Δ はギリシャ文字で，“デルタ”と読む。

x の関数 $f(x)$ から，その導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を **x で微分する**，または単に **微分する** という。

例題 1　　導関数の定義

導関数の定義にしたがって，次の関数を微分せよ。

(1)　$f(x)=x$　　　　(2)　$f(x)=x^3$

解

(1)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$

(2)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

関数を微分した結果を表すのに，次のように書くこともある。

$$(x)'=1 \qquad (x^3)'=3x^2$$

問 8　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=x^2+7$ を微分せよ。

導関数の計算

一般に，関数 x^n の導関数は，次のようになる。

x^n の導関数

n が正の整数のとき　　$(x^n)'=nx^{n-1}$

この公式を証明してみよう。

n は正の整数であるから，二項定理により

$$(x+h)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots+nxh^{n-1}+h^n$$

右辺の x^n を左辺に移項して，両辺を h で割ると

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}$$

$h\to 0$ のとき，右辺の第2項以降の各項は0に近づく。

よって　　$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$

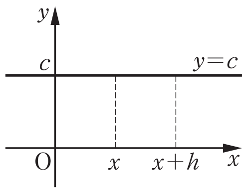
問 9　関数 $y = x^4$ を微分せよ。

定数関数の微分

一定の値だけをとる関数を **定数関数** という。定数関数 $y = c$ を微分してみよう。

$f(x) = c$ とおくと，$f(x+h) = c$ であるから

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$



すなわち，次のことが成り立つ。

c が定数のとき　　$(c)' = 0$

問10　関数 $y = -6$ を微分せよ。

定数倍の微分

関数 $y = 5x^2$ を微分してみよう。

$f(x) = 5x^2$ とおくと，$f(x+h) = 5(x+h)^2$ であるから

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2 - 5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{10xh + 5h^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 5(2x+h)$$
$$= 5 \cdot 2x$$

$(x^2)' = 2x$ より，次の式が成り立つことがわかる。

$$(5 \cdot x^2)' = 5 \cdot (x^2)'$$

一般に，定数 k と関数 $f(x)$ について，次の式が成り立つ。

$$\{kf(x)\}' = kf'(x)$$

問11　関数 $y = -4x^3$ を微分せよ。

和・差の微分

関数 $y=x^3+x^2$ を微分してみよう。

$f(x)=x^3+x^2$ とおくと，$f(x+h)=(x+h)^3+(x+h)^2$ であるから

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2\}-(x^3+x^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}+\frac{h(2x+h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\{(3x^2+3xh+h^2)+(2x+h)\} \\ &= 3x^2+2x \end{aligned}$$

$(x^3)'=3x^2$，$(x^2)'=2x$ より，次の式が成り立つ。

$$(x^3+x^2)'=(x^3)'+(x^2)'$$

一般に，2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について，次の式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)}$$
$$\boldsymbol{\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)}$$

問12　関数 $y=x^3-x$ を微分せよ。

以上の導関数の性質をまとめると，次のようになる。

導関数の公式

1　c が定数で　　$y=c$　ならば　$y'=0$

2　k が定数で　　$y=kf(x)$　ならば　$y'=kf'(x)$

3　$y=f(x)+g(x)$　ならば　$y'=f'(x)+g'(x)$

4　$y=f(x)-g(x)$　ならば　$y'=f'(x)-g'(x)$

問13　上の公式を用いて，次の式が成り立つことを示せ。

関数 $f(x)$，$g(x)$ について，k，l を定数とするとき

$$\boldsymbol{\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)}$$

例題 2　導関数の計算［1］

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=3x^2-1$　　(2)　$y=2x^3+3x^2-5x+2$

解　(1)　
$$\begin{aligned} y' &= (3x^2-1)' \\ &= 3(x^2)'-(1)' \\ &= 3\cdot 2x-0 \\ &= 6x \end{aligned}$$

(2)　
$$\begin{aligned} y' &= (2x^3+3x^2-5x+2)' \\ &= 2(x^3)'+3(x^2)'-5(x)'+(2)' \\ &= 2\cdot 3x^2+3\cdot 2x-5\cdot 1+0 \\ &= 6x^2+6x-5 \end{aligned}$$

問14　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-2x+3$　　(2)　$y=-3x^2+x+4$

(3)　$y=5x^3-8x+1$　　(4)　$y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-3x+1$

(5)　$y=-4x^3+6x^2+7x-9$

例題 3　導関数の計算［2］

関数 $y=(2x+1)(x-3)$ を微分せよ。

解　$y=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$　　◀まず展開する

よって　
$$\begin{aligned} y' &= (2x^2-5x-3)' \\ &= 2(x^2)'-5(x)'-(3)' \\ &= 2\cdot 2x-5\cdot 1-0 \\ &= 4x-5 \end{aligned}$$

問15　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x+5)(3x-1)$　　(2)　$y=(2x+3)^2$

(3)　$y=x(x+1)^2$　　(4)　$y=(x-1)^3$

微分係数の計算

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がわかっているとき，微分係数 $f'(a)$ は，導関数 $f'(x)$ に $\boldsymbol{x=a}$ **を代入** して得られる。

例 7 $f(x)=x^3-4x+3$ のとき

$$f'(x)=3x^2-4$$

したがって，$f(x)$ の $x=0,\ 1,\ -2$ における微分係数は

$$f'(0)=-4, \qquad f'(1)=-1, \qquad f'(-2)=8$$

である。

問16 関数 $f(x)=3x^3-x^2$ について，$f'(2)$，$f'(-1)$ を求めよ。

問17 関数 $f(x)=x^3+x^2-ax+1$ について，$f'(1)=7$ となるような定数 a の値を求めよ。

→ p.189 問題7

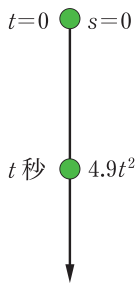
変数が x，y 以外の文字の導関数

これまでは，おもに x の関数を x で微分することを考えてきたが，x 以外の文字を変数とする関数の微分についても同様である。

例 8 物体が静止の状態から重力によって落下するとき，落下しはじめてから t 秒間に落ちる距離を s (m) とする。空気抵抗を考えなければ，s は t の関数として

$$s=4.9t^2$$

と表されることがわかっている。



この関数を t で微分して得られる導関数は，次の式で与えられる。

$$\frac{ds}{dt}=(4.9t^2)'=4.9\cdot 2t=9.8t$$

問18 次の関数を〔 〕内の文字を変数として微分せよ。

(1) $h=10t-5t^2$ 〔 t 〕　(2) $S=\pi r^2$ 〔 r 〕

→ p.189 問題5

問 題

1　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to3}(x^2-5x)$　　(2)　$\displaystyle\lim_{t\to2}\frac{t^2-4}{t-2}$

2　関数 $f(x)=-2x^2+5x$ について，定義にしたがって，次の微分係数を求めよ。

(1)　$f'(2)$　　(2)　$f'(-3)$　　(3)　$f'(a)$

3　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^3-6x^2+3$　　(2)　$y=x(7-3x^2)$

(3)　$y=(5x-1)^2$　　(4)　$y=(4x^2-1)(3x+2)$

4　関数 $y=2x^2$ の $x=a$ における微分係数が 12 に等しいとき，定数 a の値を求めよ。

5　次の関数を〔　〕内の文字を変数として微分せよ。

(1)　$s=h+vt-\dfrac{1}{2}gt^2$　〔 t 〕

(2)　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$　〔 r 〕

6　2 次関数 $f(x)=x^2+1$ について，x が a から b まで変わるときの平均変化率と，$x=c$ における微分係数 $f'(c)$ が等しいとき，c を a と b を用いて表せ。ただし，$a \neq b$ とする。→ p.228 練習問題1

7　3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2-6$ について，$f'(1)=7$，$f'(-2)=4$ となるように，定数 a，b の値を定めよ。

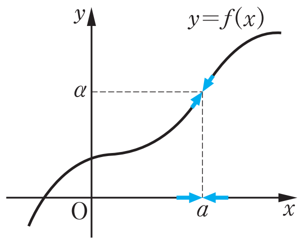
8　次のことを証明せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1)　$y=(ax+b)^2$ ならば　$y'=2a(ax+b)$

(2)　$y=(ax+b)^3$ ならば　$y'=3a(ax+b)^2$

発展　関数の極限値と四則

　関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくならば



$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

または　　$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$

と表し，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の **極限値** という。

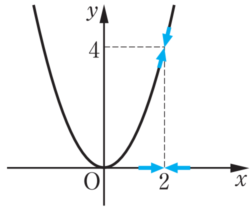
　また，この場合，“$x \to a$ のとき $f(x)$ は α に **収束** する”という。

例 1　$f(x) = x^2$ では

　$x \to 2$ のとき　$f(x) \to f(2)$

すなわち

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



例 2　$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ は，$x = 1$ では定義されていない。

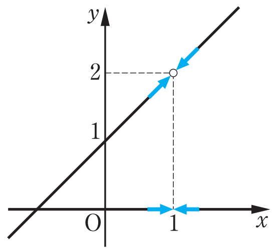
しかし，$x \neq 1$ の範囲では

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$$

と変形される。

したがって，x が限りなく1に近づくとき，$f(x)$ は限りなく2に近づく。

すなわち　　$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$



問 1　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to -2} (x^3 + 1)$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

関数の極限値について，次の性質が成り立つ。

極限値と四則

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ ならば

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　　ただし，k は定数

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta\neq 0$

例 3

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} 2(x^2+x-3)=2\cdot(2^2+2-3)=6$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}(x+3)(2x^2+x+1)=2\cdot 2=4$

(3) $$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{5}{7}$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2-\frac{4}{x+2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x+2}=1$$

問 2　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -2} 3(2x^2-3x-1)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-2x^2-x+2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$