

# 1 節 三角関数

## 1 一般角

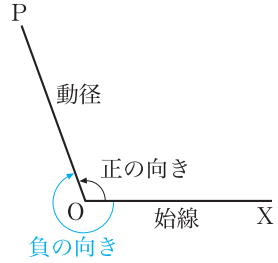
平面上で、点Oを中心として半直線OPを回転させることを考える。このとき、半直線OPを**動径**といい、動径の始めの位置を示す半直線OXを**始線**という。

動径の回転には2つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを**正の向き**、時計の針の回転と同じ向きを**負の向き**という。また、OPをOXから正の向きに回転したときの角を**正の角**、負の向きに回転したときの角を**負の角**という。

たとえば、負の向きに $30^\circ$ 回転したとき、この角を $-30^\circ$ と表す。また、正の向きに1回転とさらに $60^\circ$ 回転したとき、この角を $420^\circ$ と表す。

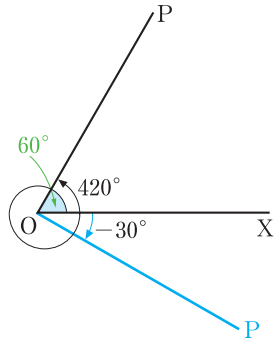
このように、負の角や $360^\circ$ よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を**一般角**という。

また、 $\alpha$ を一般角として、始線OXの位置から点Oのまわりに $\alpha$ だけ回転した動径を、**角 $\alpha$ の動径**という。

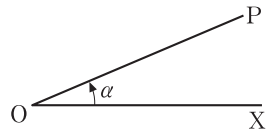


5

10



15



20

**問1** OXを始線として、次の角の動径OPを図示せよ。

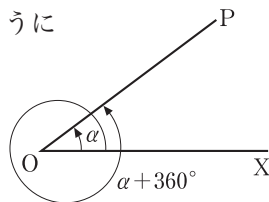
- (1)  $240^\circ$
- (2)  $-60^\circ$
- (3)  $765^\circ$
- (4)  $-570^\circ$

角  $\alpha$  の動径を OP とすると、右の図からわかるように

$$\alpha + 360^\circ, \alpha + 360^\circ \times 2, \alpha + 360^\circ \times 3, \dots$$

$$\alpha - 360^\circ, \alpha - 360^\circ \times 2, \alpha - 360^\circ \times 3, \dots$$

などの角の動径も角  $\alpha$  の動径と一致する。



5 これらの角を **動径 OP の表す角** という。

すなわち、動径 OP の表す一般角  $\theta$  は、次のように表される。

$$\theta = \alpha + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

**例 1**  $420^\circ$  の動径が表す一般角  $\theta$  は  $\theta = 60^\circ + 360^\circ \times n$  ( $n$  は整数)

**問 2** 次の角の動径が表す一般角を  $\alpha + 360^\circ \times n$  ( $n$  は整数) の形で表せ。ただし、 $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$  とする。

10

(1)  $500^\circ$       (2)  $1000^\circ$       (3)  $-290^\circ$       (4)  $-830^\circ$

## 弧度法

角の大きさを表すのに、これまでは直角の  $\frac{1}{90}$  を単位とする“度”を用いてきた。これに対して、1つの円において

15

半径と同じ長さの弧に対する中心角

をとり、これを単位とする角の表し方がある。

この中心角を  $\alpha$  とし、その大きさを“度”で表してみよう。

1つの円において、弧の長さは中心角に比例するから、円の半径を  $r$  とすると

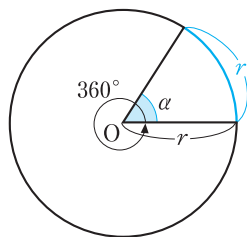
20

$$r : 2\pi r = \alpha : 360^\circ$$

よって 
$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57.2958^\circ$$

この  $\alpha$  は円の半径に関係しない一定の角である。

この角を **1 ラジアン** または **1 弧度** といい、これを単位とする角の表し方を **弧度法** という。



25

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 180^\circ = \pi \text{ ラジアン}$$

いろいろな角の度と弧度の対応は、次の表ようになる。

度	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$360^\circ$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$

**注意** 弧度法では、ふつう単位名のラジアンを省略する。

**問 3**  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $-270^\circ$ ,  $405^\circ$ ,  $1^\circ$  を弧度法で表せ。

**問 4** 弧度法による角  $\frac{\pi}{5}$ ,  $\frac{3}{4}\pi$ ,  $-\frac{5}{2}\pi$ ,  $-3\pi$  を度で表せ。

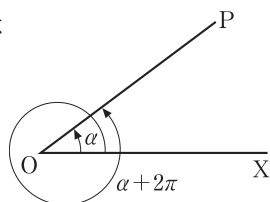
弧度法を用いると、角  $\alpha$  の動径が表す一般角  $\theta$  は

$$\theta = \alpha + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

と表される。

これからは、角の大きさを表すのに主として

弧度法を用いる。



5

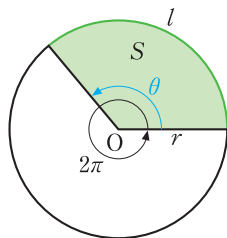
### 扇形の弧の長さとお面積

10

半径  $r$ , 中心角  $\theta$  の扇形の弧の長さを  $l$ , 面積を  $S$  とする。1つの円において、扇形の弧の長さとお面積は、ともに中心角に比例するから

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi, \quad S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

ゆえに  $l = r\theta$ ,  $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$



15

**例 2** 半径 3, 中心角  $\frac{\pi}{6}$  の扇形の弧の長さ  $l$  と面積  $S$  を求めてみよう。

$$l = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$$

**問 5** 半径 6, 中心角  $\frac{3}{4}\pi$  の扇形の弧の長さとお面積を求めよ。

## 2 三角関数

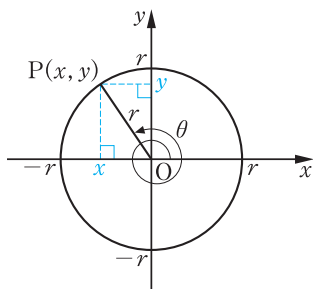
数学 I で学んだ正弦, 余弦, 正接を一般角について定義しよう。

座標平面上で, 原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円をかく。  $x$  軸の正の部分を開始として, 角  $\theta$  の動径と円  $O$  との交点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると, 比

$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x}$$

の値は円  $O$  の半径  $r$  の大きさに関係なく,

角  $\theta$  だけによって定まる。したがって, これらを次のように表す。



### 三角関数の定義

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  をまとめて,  $\theta$  の **三角関数** という。

$0 \leq \theta \leq \pi$  の場合, これらは数学 I で学んだ三角比の値と一致する。

**注意**  $\tan \theta$  は  $x = 0$  となるような  $\theta$  に対しては定義されない。

定義にもとづいて, いろいろな角の三角関数の値を求めてみよう。

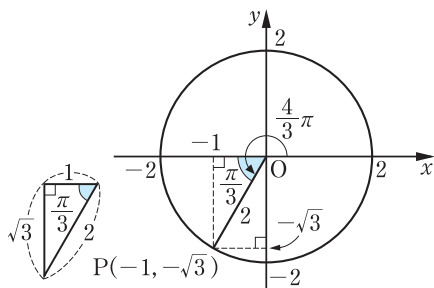
#### 例 3

右の図で,  $\theta = \frac{4}{3}\pi$  のとき,  $OP = 2$  とすると,  $P(-1, -\sqrt{3})$  であるから

$$\sin \frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4}{3}\pi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$



**問 6**  $\theta$  が次の角のとき,  $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  の値を求めよ。

(1)  $\frac{5}{4}\pi$

(2)  $\frac{11}{6}\pi$

(3)  $3\pi$

例 4

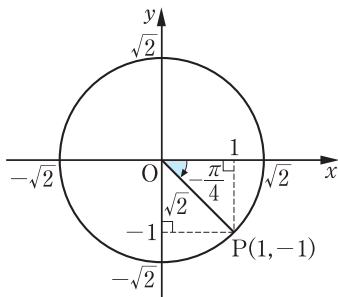
右の図で、 $\theta = -\frac{\pi}{4}$  のとき、 $OP = \sqrt{2}$  とすると、 $P(1, -1)$  であ

るから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{1} = -1$$



5

問 7  $\theta$  が次の角のとき、 $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$  の値を求めよ。

(1)  $-\frac{\pi}{6}$

(2)  $-\frac{2}{3}\pi$

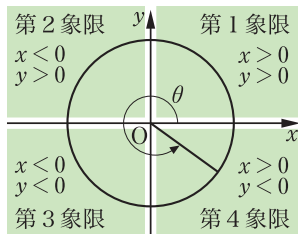
(3)  $-\frac{5}{4}\pi$

例 4 のように、角  $\theta$  の動径が第 4 象限にあるとき、 $\theta$  を **第 4 象限の角** という。

他の象限についても同様である。

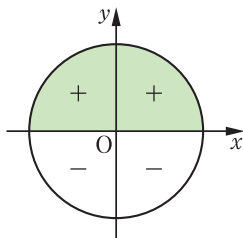
$\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$  の値の正負は、 $\theta$  がどの象限の角であるかによって定まる。

これを図に示すと、次のようになる。

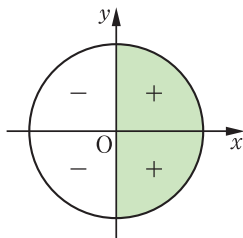


10

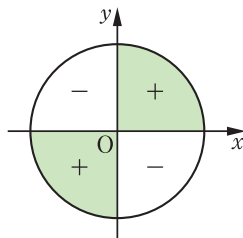
sinθ の正負



cosθ の正負



tanθ の正負



問 8 次の条件を満たす角  $\theta$  は第何象限の角か。

(1)  $\sin\theta < 0$ ,  $\cos\theta > 0$

(2)  $\tan\theta < 0$ ,  $\cos\theta < 0$

15

## 三角関数と単位円

原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という。単位円を用いて、三角関数の性質を調べてみよう。

- 5 右の図のように、単位円と角  $\theta$  の動径の交点を  $P(x, y)$  とすると、三角関数の定義で  $r = 1$  として

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y$$

が成り立つ。すなわち、 $P$  の座標は

$$P(\cos \theta, \sin \theta)$$

- 10 点  $P$  は単位円の周上にあるから、 $\sin \theta, \cos \theta$  のとり得る値の範囲は次のようになる。

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

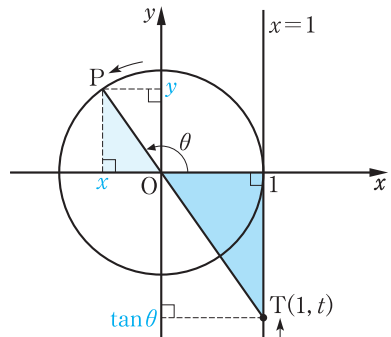
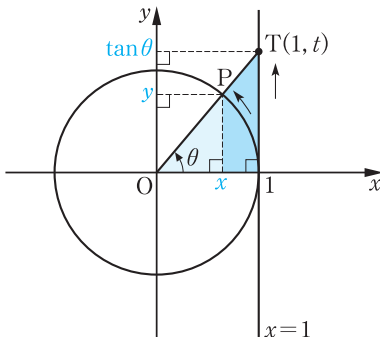
$$\leftarrow -1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

また、下の図の単位円において、直線  $OP$  と直線  $x = 1$  の交点を  $T(1, t)$  とすると、2つの直角三角形が相似であることから

15 
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

である。すなわち、 $T$  の座標は  $T(1, \tan \theta)$

点  $T$  は直線  $x = 1$  上をすべて動くことができるから、 $\tan \theta$  は **すべての実数値** をとる。



### 3 三角関数の性質

#### 三角関数の相互関係

右の図で、角  $\theta$  の動径と単位円の交点を  $P(x, y)$  とすると

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta$$

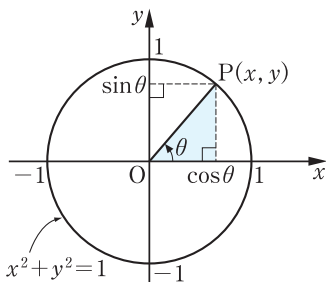
ここで、 $x^2 + y^2 = 1$  であるから

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

また、 $\tan \theta$  の定義より

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

よって、三角関数についても、三角比と同様に次の公式が成り立つ。



#### 三角関数の相互関係

$$\text{①} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\text{②} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{③} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

問9 上の公式 ③ を、①、② を用いて証明せよ。

#### 例題

#### 三角関数の相互関係

1

$\theta$  が第3象限の角で、 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  のとき、 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$  の値を求めよ。

解

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  であるから

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\theta$  が第3象限の角であるから、 $\sin \theta < 0$  である。

$$\text{よって} \quad \sin \theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

**問10**  $\theta$  が第 4 象限の角で、 $\sin \theta = -\frac{1}{3}$  のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$  の値を求めよ。

**問11**  $\theta$  が第 2 象限の角で、 $\tan \theta = -2$  のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$  の値を求めよ。

**例題**

相互関係による式の値

**2**

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$  のとき、 $\sin \theta \cos \theta$ 、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  の値を求めよ。

**解**

与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ であるから } 2 \sin \theta \cos \theta + 1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{すなわち } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{3}{8} \quad \cdots \cdots \text{ 答}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( -\frac{3}{8} \right) \right\} = \frac{11}{16} \quad \cdots \cdots \text{ 答} \end{aligned}$$

**問12**  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$  のとき、 $\sin \theta \cos \theta$ 、 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$  の値を求めよ。

→ p.131 問題1

**例題**

相互関係による式変形

**3**

等式  $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{2}{\cos \theta}$  を証明せよ。

**証明**

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} &= \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta) + \cos \theta(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

**問13** 次の等式を証明せよ。

$$(1) \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (2) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$



### 三角関数の性質

$n$  を整数とすると、角  $\theta + 2n\pi$  の動径は角  $\theta$  の動径と同じ位置にあるから、次の公式が成り立つ。

#### $\theta + 2n\pi$ の三角関数

$$\text{① } \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$$

$$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan \theta$$

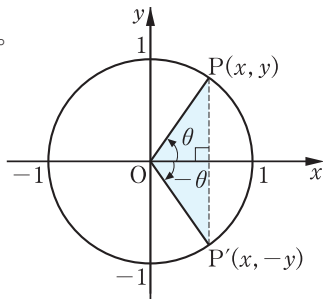
$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta$$

5

**例 5**  $\cos \frac{14}{3}\pi = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + 4\pi\right) = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

**問 14**  $\sin \frac{27}{4}\pi$ ,  $\cos \frac{27}{4}\pi$ ,  $\tan \frac{27}{4}\pi$  の値を求めよ。

次に、角  $-\theta$  の動径  $OP'$  は、角  $\theta$  の動径  $OP$  と  $x$  軸に関して対称の位置にあるから、次の公式が成り立つ。



10

#### $-\theta$ の三角関数

$$\text{② } \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

**例 6**  $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

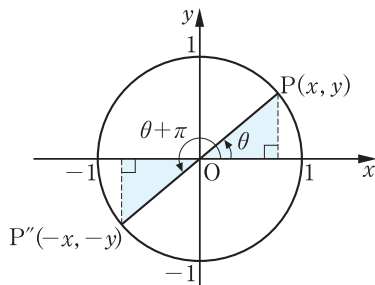
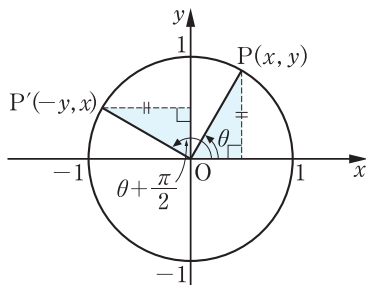
15

**問 15**  $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ ,  $\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ ,  $\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$  の値を求めよ。

また、角  $\theta + \frac{\pi}{2}$  の動径  $OP'$ 、角  $\theta + \pi$  の動径  $OP''$  は、角  $\theta$  の動径  $OP$  を原点  $O$  のまわりにそれぞれ  $\frac{\pi}{2}$ 、 $\pi$  だけ回転したものである。

よって、次ページの図からもわかるように、点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とすると、点  $P'$  の座標は  $(-y, x)$ 、点  $P''$  の座標は  $(-x, -y)$  となる。

20



したがって、次の公式が成り立つ。

### $\theta + \frac{\pi}{2}$ , $\theta + \pi$ の三角関数

$$\text{③ } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$\text{④ } \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$

例 7

$\sin \frac{5}{12}\pi = a$  とおくとき、 $\cos \frac{11}{12}\pi$  の値を  $a$  を用いて表してみよう。

$$\cos \frac{11}{12}\pi = \cos\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{5}{12}\pi = -a$$

問16  $\cos \frac{\pi}{8} = a$  とおくとき、次の値を  $a$  を用いて表せ。

(1)  $\sin \frac{5}{8}\pi$

(2)  $\cos \frac{9}{8}\pi$

(3)  $\sin \frac{13}{8}\pi$

さらに、次の公式が成り立つ。

$$\text{⑤ } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\text{⑥ } \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$$

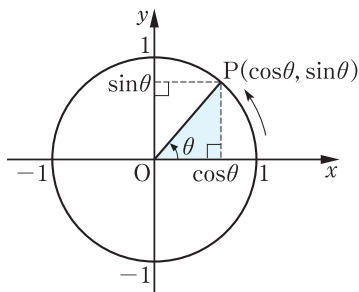
問17 公式③, ④の  $\theta$  を  $-\theta$  で置き換えることにより、上の公式を確かめよ。

## 4 三角関数のグラフ

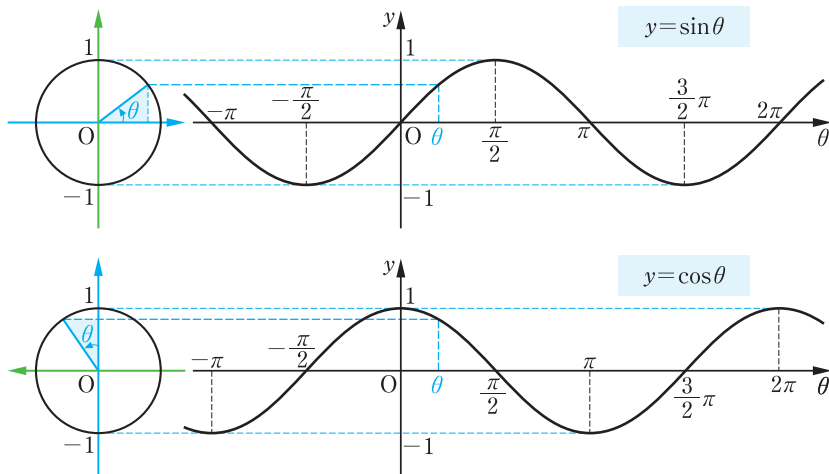
### $y = \sin \theta$ , $y = \cos \theta$ のグラフ

角  $\theta$  の動径と単位円の交点を P とすると、P の  $y$  座標が  $\sin \theta$ 、P の  $x$  座標が  $\cos \theta$  となる。

このことを利用すると、関数  $y = \sin \theta$ ,  $y = \cos \theta$  のグラフを、下のようにかくことができる。



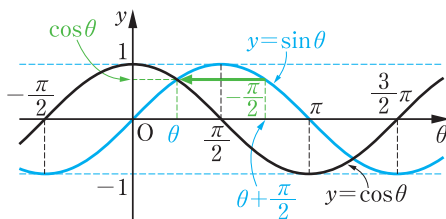
5



前ページの公式 **3** から、 $y = \cos \theta$  は

$$y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

と書ける。すなわち、 $y = \cos \theta$  のグラフは  $y = \sin \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $-\frac{\pi}{2}$  だけ平行移動したものである。



10

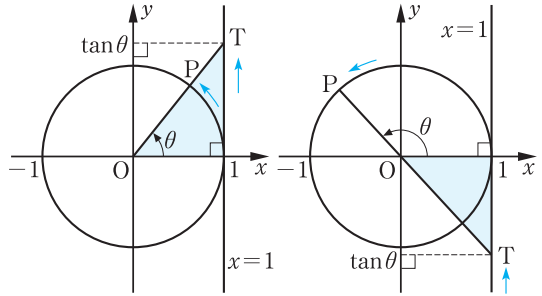
$y = \sin \theta$  や  $y = \cos \theta$  のグラフの形の曲線を **正弦曲線** という。

15

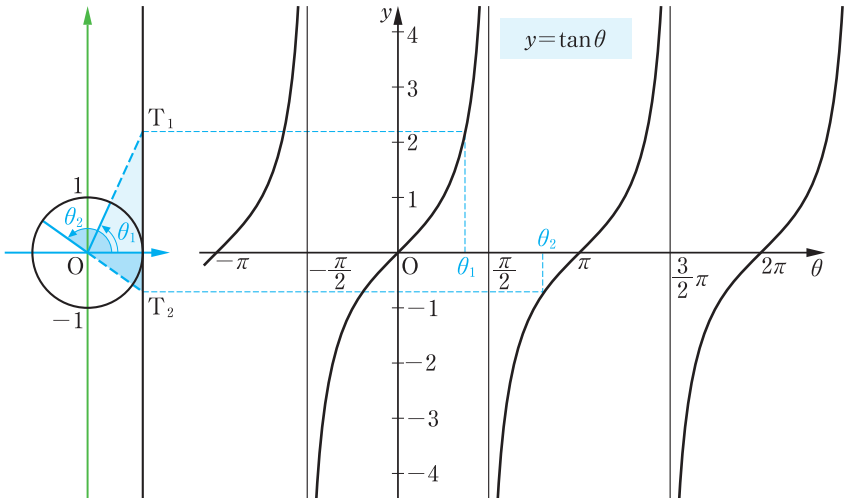
### y = tan θ のグラフ

角 θ の動径を OP とし、  
直線 OP と直線 x = 1  
の交点を T とすると

5 T(1, tan θ)  
すなわち、T の y 座標が  
tan θ に等しい。



このことを利用すると、関数  $y = \tan \theta$  のグラフを、下のようにかくことができる。



10  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲で考えると、 $\theta$  が 0 から増加するにつれて、 $\tan \theta$  の値も増加する。そして、 $\theta$  が  $\frac{\pi}{2}$  に近づけば、 $\tan \theta$  の値は限りなく大きくなり、グラフは直線  $\theta = \frac{\pi}{2}$  に限りなく近づいていく。

このように、グラフがある直線に限りなく近づくとき、その直線をグラフの ぜんきんせん 漸近線 という。同様に考えると、直線

15  $\dots, \theta = -\frac{3}{2}\pi, \theta = -\frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3}{2}\pi, \dots$

は、 $y = \tan \theta$  のグラフの漸近線である。

## 周期関数

関数  $y = \sin \theta$ ,  $y = \cos \theta$  のグラフは、ともに  $2\pi$  ごとに同じ形がくり返される。このことは、次の公式からもわかる。

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

また、 $y = \tan \theta$  のグラフは、 $\pi$  ごとに同じ形がくり返される。このことは、公式  $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$  からわかる。

一般に、関数  $y = f(x)$  について、0でない定数  $p$  があって、等式

$$f(x+p) = f(x)$$

がすべての  $x$  に対して成り立つとき、 $f(x)$  を、 $p$  を周期とする **周期関数** という。

$p$  が  $f(x)$  の周期であるとき、 $2p$ ,  $3p$ ,  $-p$  など  $f(x)$  の周期となるから、 $f(x)$  の周期は無数にある。しかし、ふつうは正の周期のうちで最小のものを  $f(x)$  の **周期** という。

三角関数は周期関数で

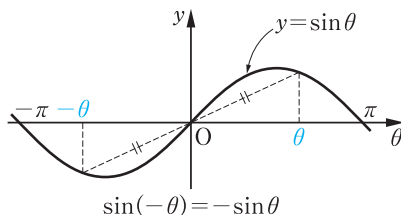
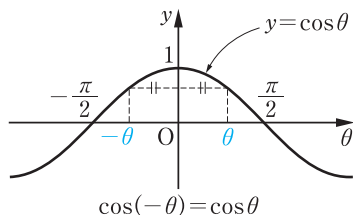
$$\sin \theta, \cos \theta \text{ の周期は } 2\pi, \quad \tan \theta \text{ の周期は } \pi$$

## 偶関数・奇関数とそのグラフ

118 ページの公式 [2] より

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

このことから、関数  $y = \cos \theta$  のグラフは  $y$  軸に関して対称であり、関数  $y = \sin \theta$  のグラフは原点に関して対称であることがわかる。



一般に、関数  $f(x)$  において

$f(-x) = f(x)$  が成り立つとき、 $f(x)$  を **偶関数**

$f(-x) = -f(x)$  が成り立つとき、 $f(x)$  を **奇関数**

という。 $y = \cos \theta$  は偶関数、 $y = \sin \theta$  は奇関数である。

- 5 偶関数のグラフは  $y$  軸に関して対称であり、奇関数のグラフは原点に関して対称である。

**例 8** 関数  $f(\theta) = \tan \theta$  において

$$f(-\theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta = -f(\theta)$$

関数  $g(x) = x^2$  において

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$$

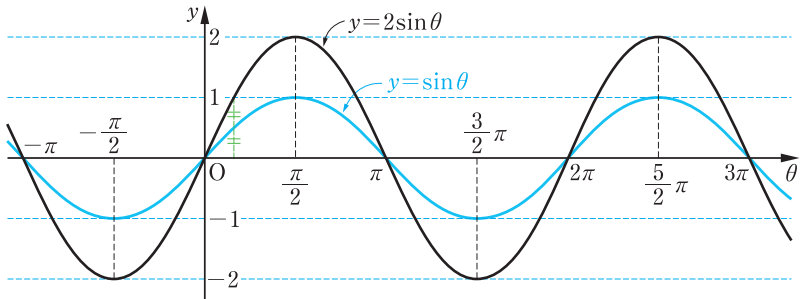
よって、 $f(\theta) = \tan \theta$  は奇関数、 $g(x) = x^2$  は偶関数である。

**問 18** 関数  $f(x) = 2x$  は偶関数であるか、奇関数であるか調べよ。

### いろいろな三角関数のグラフ

**例 9** 関数  $y = 2 \sin \theta$  のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは、 $y = \sin \theta$  のグラフを  $y$  軸方向に 2 倍に拡大したものである。その周期は  $\sin \theta$  と同じく  $2\pi$  である。



**問 19** 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

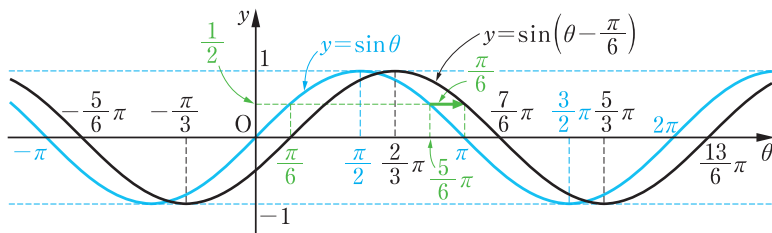
(1)  $y = 2 \cos \theta$

(2)  $y = \frac{1}{2} \sin \theta$

例 10

関数  $y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$  のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは、 $y = \sin \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\frac{\pi}{6}$  だけ平行移動したものである。その周期は  $\sin \theta$  と同じく  $2\pi$  である。



問 20

次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1)  $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

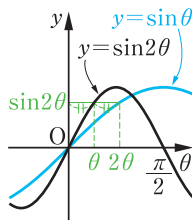
(2)  $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

5

例 11

関数  $y = \sin 2\theta$  のグラフをかいてみよう。

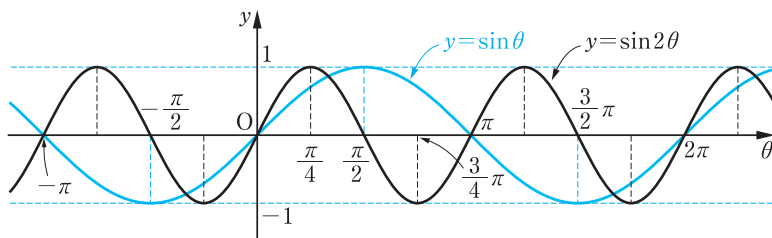
$\theta$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			



上の表からもわかるように、 $y = \sin 2\theta$  のグラフは  $y = \sin \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $\frac{1}{2}$  倍に縮小したものである。

したがって、関数  $y = \sin 2\theta$  の周期は  $\sin \theta$  の周期の  $\frac{1}{2}$  に等しく、 $\frac{2\pi}{2} = \pi$  である。

10



一般に、 $a$  を正の定数として、 $f(\theta) = \sin a\theta$  とおくと

$$\begin{aligned} f\left(\theta + \frac{2\pi}{a}\right) &= \sin a\left(\theta + \frac{2\pi}{a}\right) = \sin(a\theta + 2\pi) \\ &= \sin a\theta = f(\theta) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $\sin a\theta$  の周期は  $\frac{2\pi}{a}$  である。

- 5 同様に、 $\cos a\theta$  の周期は  $\frac{2\pi}{a}$ 、 $\tan a\theta$  の周期は  $\frac{\pi}{a}$  である。

**問21** 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1)  $y = \cos 2\theta$

(2)  $y = \tan \frac{\theta}{3}$

→ p.131 問題4

やや複雑な三角関数について、調べてみよう。

**例題**

三角関数のグラフ

**4**

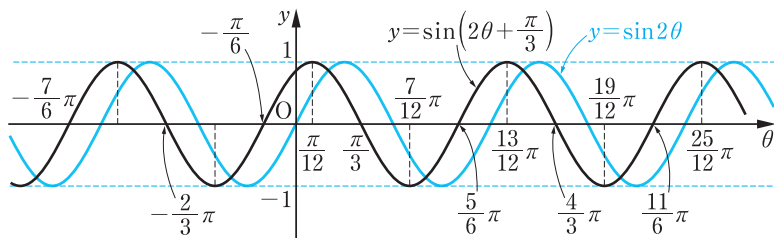
関数  $y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$  のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

**解**

$$y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

よって、 $y = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$  のグラフは、 $y = \sin 2\theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向に  $-\frac{\pi}{6}$  だけ平行移動したものである。

また、その周期は  $\sin 2\theta$  の周期に等しく、 $\frac{2\pi}{2} = \pi$  である。



- 15 **問22** 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

(1)  $y = \sin\left(2\theta - \frac{2}{3}\pi\right)$

(2)  $y = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

→ p.146 練習問題8



## 5 三角関数の応用

### 三角関数を含む方程式

例 12

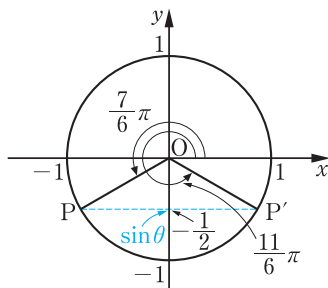
方程式  $\sin \theta = -\frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  の値を求めてみよう。

単位円の周上で、 $y$  座標が  $-\frac{1}{2}$  となる点は、右の図の  $P$ 、 $P'$  の 2 点であり、動径  $OP$ 、 $OP'$  の表す角  $\theta$  は、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

$\sin \theta$  の周期は  $2\pi$  であるから

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



5

10

問 23 次の方程式を満たす  $\theta$  の値を求めよ。

(1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $2 \cos \theta = 1$

例 13

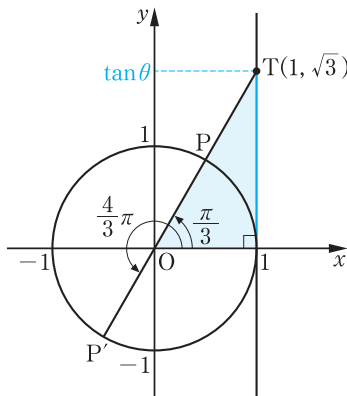
方程式  $\tan \theta = \sqrt{3}$  を満たす  $\theta$  の値を求めてみよう。

$T(1, \sqrt{3})$  をとり、直線  $OT$  と単位円の交点を右の図のように  $P$ 、 $P'$  とすると、動径  $OP$ 、 $OP'$  の表す角  $\theta$  は、 $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$$

$\tan \theta$  の周期は  $\pi$  であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \quad (n \text{ は整数})$$



15

20

問 24 次の方程式を満たす  $\theta$  の値を求めよ。

(1)  $\tan \theta = 1$

(2)  $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$

やや複雑な方程式を解いてみよう。

**例題**

三角関数を含むやや複雑な方程式

**5**  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、方程式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たす  $\theta$  の値を求めよ。

**解**

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

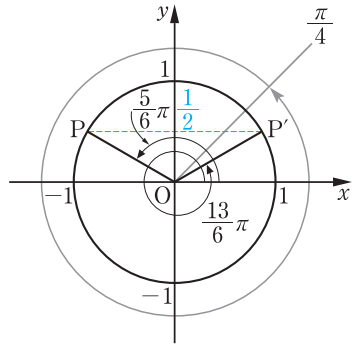
単位円の周上で、 $y$  座標が  $\frac{1}{2}$  となる点は、右の図の P, P' で、動径 OP, OP' の表す角  $\theta + \frac{\pi}{4}$  は、

① の範囲で

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに

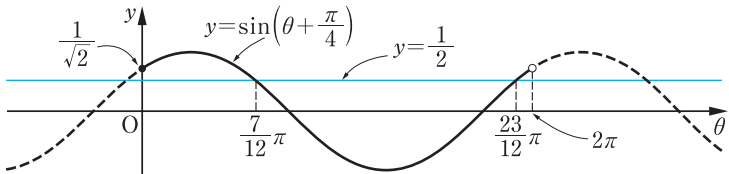
$$\theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$



15

**注意**

例題 5 の解は、関数  $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  のグラフが直線  $y = \frac{1}{2}$  と交わる  $\theta$  の値を求めても得られる。



**問25**

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の方程式を満たす  $\theta$  の値を求めよ。

(1)  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\sin\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

## 三角関数を含む不等式

例題

三角関数を含む不等式 [1]

6

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、不等式  $\cos \theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

解

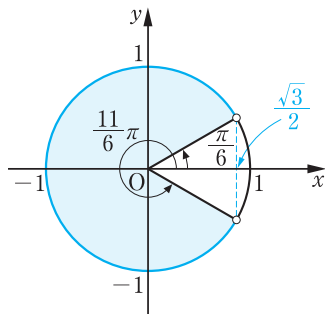
$0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で、

$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  となる  $\theta$  の値は

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$$

よって、右の図から不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲は

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$$



5

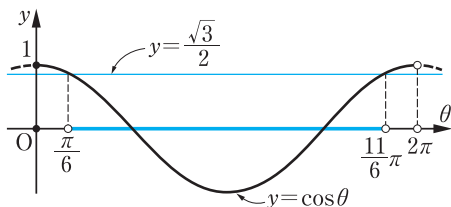
注意

例題6の解は、関数

$y = \cos \theta$  のグラフが直線

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  より下側にある

$\theta$  の値の範囲を求めても得られる。



15

問26

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

(1)  $\sin \theta > \frac{1}{2}$

(2)  $\cos \theta \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

問27

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

(1)  $\cos \theta > \frac{1}{2}$

(2)  $\sin \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)  $2\sin \theta - \sqrt{3} \leq 0$

20

## 例題

三角関数を含む不等式 [2]

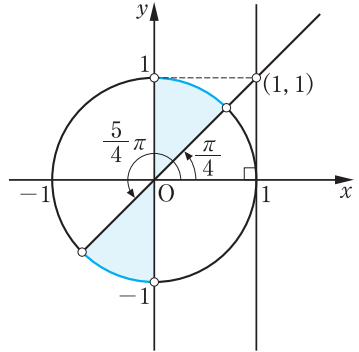
7  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、不等式  $\tan \theta > 1$  を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

5 解  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で、  
 $\tan \theta = 1$  となる  $\theta$  の値は

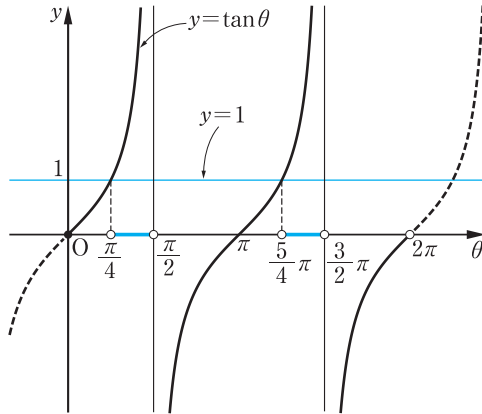
$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

よって、右の図から不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



10 注意 例題7の解は、関数  $y = \tan \theta$  のグラフが直線  $y = 1$  より上側にある  $\theta$  の値の範囲を求めても得られる。



問28  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

(1)  $\tan \theta > \sqrt{3}$

(2)  $\sqrt{3} \tan \theta + 1 \leq 0$

問29  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき、不等式  $-\sqrt{3} < \tan \theta < 1$  を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

## 三角関数を含む関数の最大・最小

やや複雑な三角関数を含む関数の最大値, 最小値を調べてみよう。

応用  
例題

三角関数を含む関数の最大・最小

8

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

また, そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

$$y = \sin^2\theta + \sin\theta$$

5

考え方

$\sin\theta = t$  とおくことによって, 与えられた関数を  $t$  の2次関数とみて考える。

解

$\sin\theta = t$  とおくと,  $0 \leq \theta < 2\pi$  より

$$-1 \leq t \leq 1$$

また,  $y$  を  $t$  で表すと

$$y = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

よって, この関数は

$$t = 1 \text{ のとき 最大値 } 2, \quad t = -\frac{1}{2} \text{ のとき 最小値 } -\frac{1}{4}$$

をとる。ここで,

$$\sin\theta = 1 \text{ となるのは } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

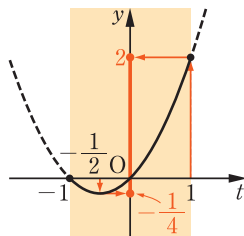
$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \text{ となるのは } \theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ のとき}$$

である。したがって, この関数は

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき 最大値 } 2$$

$$\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{ のとき 最小値 } -\frac{1}{4}$$

をとる。



10

15

20

問30

$0 \leq \theta < 2\pi$  のとき, 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

$$y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$$

→ p.131 問題7

## 問題

1  $\theta$  は第3象限の角で、 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$  であるとき、次の式の値を求めよ。

(1)  $\sin\theta + \cos\theta$  (2)  $\sin^3\theta + \cos^3\theta$  → p.146 練習問題2

2  $\sin\frac{5}{8}\pi = a$ ,  $\cos\frac{5}{8}\pi = b$  とおくとき、次の値を  $a$ ,  $b$  を用いて表せ。

5 (1)  $\sin\frac{9}{8}\pi$  (2)  $\cos\left(-\frac{3}{8}\pi\right)$  (3)  $\tan\frac{17}{8}\pi$  → p.146 練習問題1

3 次の等式を証明せよ。

(1)  $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$

(2)†  $\cos\theta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = 0$  → p.146 練習問題3

4 次の関数のグラフをかけ。また、その周期を求めよ。

10 (1)  $y = -\tan\theta$  (2)  $y = 4\sin\frac{\theta}{2}$

(3)  $y = \cos 3\theta + 1$

5  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の方程式を満たす  $\theta$  の値を求めよ。

(1)  $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$  (2)  $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$

(3)  $\tan\frac{\theta}{2} + 1 = 0$

15 6  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の不等式を満たす  $\theta$  の値の範囲を求めよ。

(1)  $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta < \frac{1}{2}$  (2)  $4\sin^2\theta - 1 > 0$

(3)  $3\tan^2\theta \leq 1$

7  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y = \cos^2\theta + \sin\theta$$