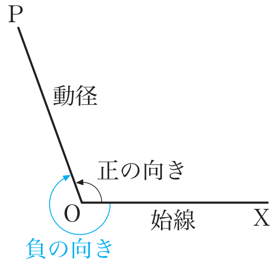
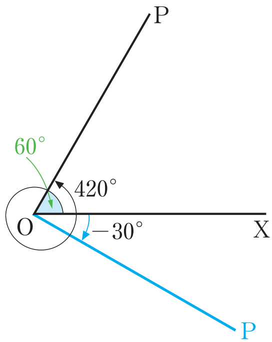
1節 三角関数

1 一般角



平面上で，点Oを中心として半直線 OP を回転させることを考える。このとき，半直線 OP を **動径** といい，動径の始めの位置を示す半直線 OX を **始線** という。

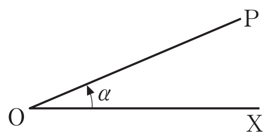
動径の回転には 2 つの向きがある。時計の針の回転と逆の向きを **正の向き**，時計の針の回転と同じ向きを **負の向き** という。また，OP を OX から正の向きに回転したときの角を **正の角**，負の向きに回転したときの角を **負の角** という。



たとえば，負の向きに 30° 回転したとき，この角を −30° と表す。また，正の向きに 1 回転とさらに 60° 回転したとき，この角を 420° と表す。

このように，負の角や 360° よりも大きい角にまで意味を広げて考えた角を **一般角** という。

また，α を一般角として，始線 OX の位置から点Oのまわりに α だけ回転した動径を，**角 α の動径** という。

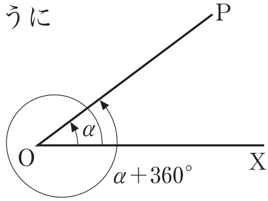


問 1 OX を始線として，次の角の動径 OP を図示せよ。

(1) 240°　　(2) −60°

(3) 765°　　(4) −570°

角 α の動径を OP とすると，右の図からわかるように



$\alpha+360^\circ$，$\alpha+360^\circ\times 2$，$\alpha+360^\circ\times 3$，$\cdots$

$\alpha-360^\circ$，$\alpha-360^\circ\times 2$，$\alpha-360^\circ\times 3$，$\cdots$

などの角の動径も角 α の動径と一致する。

これらの角を **動径 OP の表す角** という。

すなわち，動径 OP の表す一般角 θ は，次のように表される。

$$\boldsymbol{\theta=\alpha+360^\circ\times n} \qquad (n \text{ は整数})$$

例 1　420° の動径が表す一般角 θ は　$\theta=60^\circ+360^\circ\times n$　(n は整数)

問 2　次の角の動径が表す一般角を $\alpha+360^\circ\times n$ (n は整数) の形で表せ。ただし，$0^\circ\leqq\alpha<360^\circ$ とする。

(1)　500°　　(2)　1000°　　(3)　-290°　　(4)　-830°

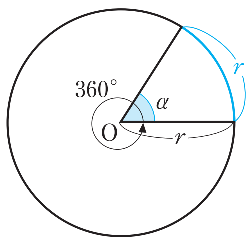
弧度法

角の大きさを表すのに，これまでは直角の $\dfrac{1}{90}$ を単位とする“度”を用いてきた。これに対して，1 つの円において

半径と同じ長さの弧に対する中心角

をとり，これを単位とする角の表し方がある。

この中心角を α とし，その大きさを“度”で表してみよう。



1 つの円において，弧の長さは中心角に比例するから，円の半径を r とすると

$$r:2\pi r=\alpha:360^\circ$$

よって　$\alpha=\dfrac{180^\circ}{\pi}\fallingdotseq 57.2958^\circ$

この α は円の半径に関係しない一定の角である。

この角を **1 ラジアン** または **1 弧度** といい，これを単位とする角の表し方を **弧度法** という。

$$\mathbf{1\ ラジアン}=\frac{\mathbf{180^\circ}}{\boldsymbol{\pi}}, \qquad \mathbf{180^\circ}=\boldsymbol{\pi}\ \mathbf{ラジアン}$$

いろいろな角の度と弧度の対応は，次の表のようになる。

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
弧度	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π

注意　弧度法では，ふつう単位名のラジアンを省略する。

問 3　120°，150°，-270°，405°，1° を弧度法で表せ。

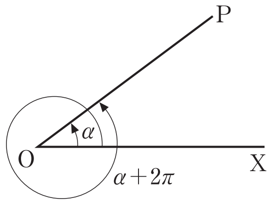
問 4　弧度法による角 $\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$-\dfrac{5}{2}\pi$，-3π を度で表せ。

弧度法を用いると，角 α の動径が表す一般角 θ は

$$\boldsymbol{\theta = \alpha + 2n\pi} \qquad (n \text{ は整数})$$

と表される。

これからは，角の大きさを表すのに主として弧度法を用いる。

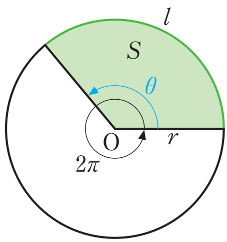


扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とする。１つの円において，扇形の弧の長さと面積は，ともに中心角に比例するから

$$l : 2\pi r = \theta : 2\pi, \quad S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

ゆえに　$$\boldsymbol{l = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr}$$



例 2　半径３，中心角 $\dfrac{\pi}{6}$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めてみよう。

$$l = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$$

問 5　半径６，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

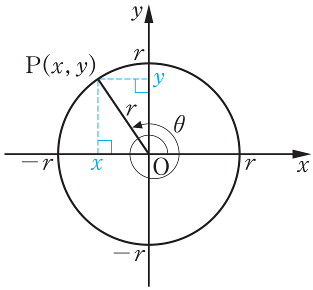
2 三角関数

数学Ⅰで学んだ正弦，余弦，正接を一般角について定義しよう。

座標平面上で，原点Oを中心とする半径 r の円をかく。x 軸の正の部分を始線として，角 θ の動径と円Oとの交点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，比

$$\frac{y}{r},\quad \frac{x}{r},\quad \frac{y}{x}$$

の値は円Oの半径 r の大きさに関係なく，角 θ だけによって定まる。したがって，これらを次のように表す。



三角関数の定義

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\qquad \cos\theta = \frac{x}{r},\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，θ の **三角関数** という。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の場合，これらは数学Ⅰで学んだ三角比の値と一致する。

注意　$\tan\theta$ は $x=0$ となるような θ に対しては定義されない。

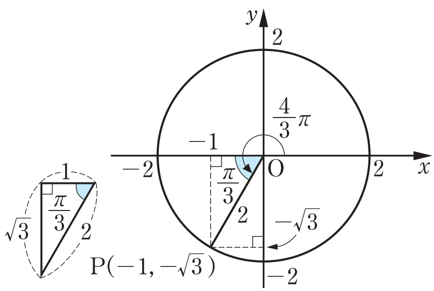
定義にもとづいて，いろいろな角の三角関数の値を求めてみよう。

例 3　右の図で，$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$\mathrm{OP}=2$ とすると，$\mathrm{P}(-1,\ -\sqrt{3})$ であるから

$$\sin\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4}{3}\pi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4}{3}\pi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$



問 6　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

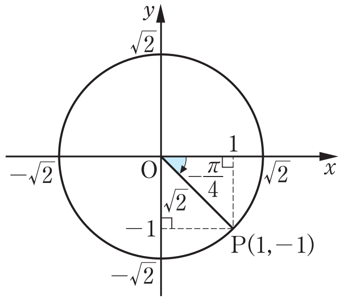
(1)　$\dfrac{5}{4}\pi$　　(2)　$\dfrac{11}{6}\pi$　　(3)　3π

例 4　右の図で，$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ とすると，P(1，-1) であるから

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{1}=-1$$



問 7　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

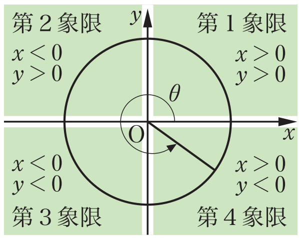
(1)　$-\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$-\dfrac{2}{3}\pi$　　(3)　$-\dfrac{5}{4}\pi$

例 4 のように，角 θ の動径が第 4 象限にあるとき，θ を **第 4 象限の角** という。

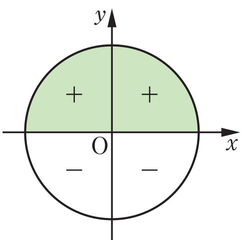
他の象限についても同様である。

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の正負は，θ がどの象限の角であるかによって定まる。

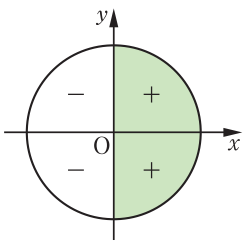
これを図に示すと，次のようになる。



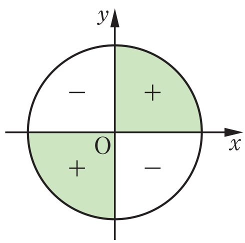
$\sin\theta$ の正負



$\cos\theta$ の正負



$\tan\theta$ の正負



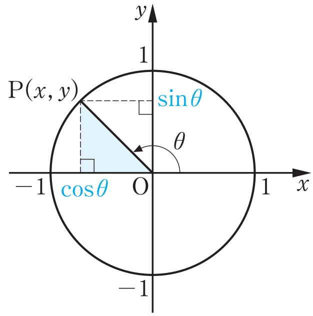
問 8　次の条件を満たす角 θ は第何象限の角か。

(1)　$\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$　　(2)　$\tan\theta<0$，$\cos\theta<0$

三角関数と単位円

原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という。単位円を用いて，三角関数の性質を調べてみよう。

右の図のように，単位円と角 θ の動径の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，三角関数の定義で $r=1$ として



$$\cos\theta = x, \qquad \sin\theta = y$$

が成り立つ。すなわち，P の座標は

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

点 P は単位円の周上にあるから，$\sin\theta$，$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は次のようになる。

$$\boldsymbol{-1 \leqq \sin\theta \leqq 1, \quad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1}$$

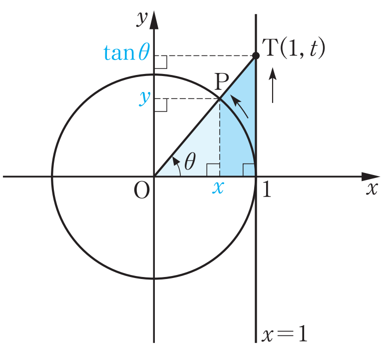
◀ $-1 \leqq y \leqq 1,\quad -1 \leqq x \leqq 1$

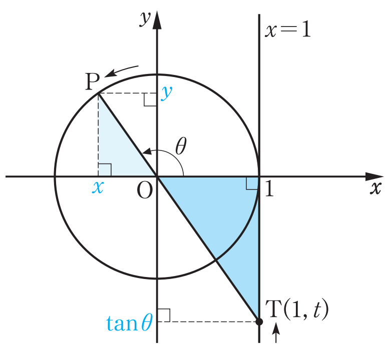
また，下の図の単位円において，直線 OP と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{T}(1,\ t)$ とすると，2 つの直角三角形が相似であることから

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

である。すなわち，T の座標は　$\mathrm{T}(1,\ \tan\theta)$

点 T は直線 $x=1$ 上をすべて動くことができるから，$\tan\theta$ は **すべての実数値** をとる。





3 三角関数の性質

三角関数の相互関係

右の図で，角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

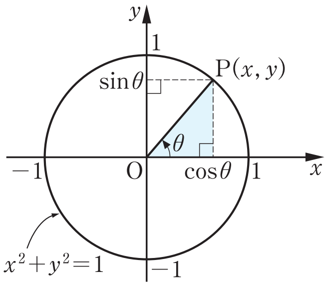
$$x=\cos\theta,\qquad y=\sin\theta$$

ここで，$x^2+y^2=1$ であるから

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

また，$\tan\theta$ の定義より

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



よって，三角関数についても，三角比と同様に次の公式が成り立つ。

三角関数の相互関係

$\boxed{1}$ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\boxed{2}$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　$\boxed{3}$ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

問 9 上の公式 $\boxed{3}$ を，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ を用いて証明せよ。

例題 1　三角関数の相互関係

θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

θ が第 3 象限の角であるから，$\sin\theta<0$ である。

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$ ……答

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{4}{5}\right)\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{3}$ ……答

問10　θ が第 4 象限の角で，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

問11　θ が第 2 象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

例題 2　相互関係による式の値

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ。

解　与えられた式の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから　　$2\sin\theta\cos\theta + 1 = \dfrac{1}{4}$

すなわち　　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} - 1\right) = -\dfrac{3}{8}$　…… 答

また　　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} = \frac{11}{16}$$　…… 答

問12　$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta - \cos^3\theta$ の値を求めよ。

→ p.131 問題1

例題 3　相互関係による式変形

等式 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta}$ を証明せよ。

証明

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta(1-\sin\theta) + \cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$$

問13　次の等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{1}{\sin^2\theta}\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$　　(2)　$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

三角関数の性質

n を整数とするとき，角 $\theta+2n\pi$ の動径は角 θ の動径と同じ位置にあるから，次の公式が成り立つ。

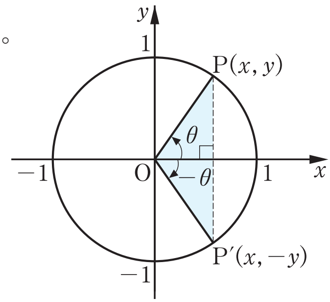
$\theta+2n\pi$ の三角関数

1 $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$
$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$
$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

例 5 $\cos\dfrac{14}{3}\pi=\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+4\pi\right)=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

問14 $\sin\dfrac{27}{4}\pi$，$\cos\dfrac{27}{4}\pi$，$\tan\dfrac{27}{4}\pi$ の値を求めよ。

次に，角 $-\theta$ の動径 OP′ は，角 θ の動径 OP と x 軸に関して対称の位置にあるから，次の公式が成り立つ。



$-\theta$ の三角関数

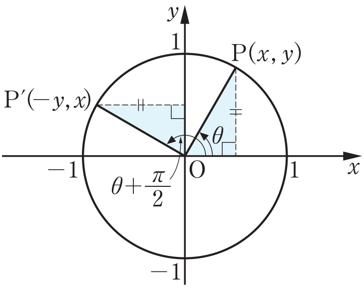
2 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

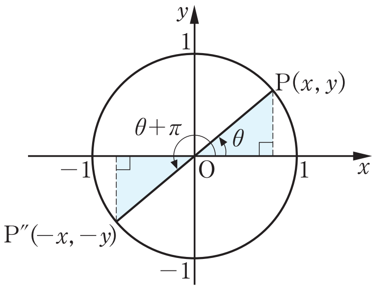
例 6 $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問15 $\sin\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)$，$\cos\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)$，$\tan\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)$ の値を求めよ。

また，角 $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の動径 OP′，角 $\theta+\pi$ の動径 OP″ は，角 θ の動径 OP を原点Oのまわりにそれぞれ $\dfrac{\pi}{2}$，π だけ回転したものである。

よって，次ページの図からもわかるように，点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，点 P′ の座標は $(-y,\ x)$，点 P″ の座標は $(-x,\ -y)$ となる。





したがって，次の公式が成り立つ。

$\boldsymbol{\theta+\frac{\pi}{2}}$，$\boldsymbol{\theta+\pi}$ の三角関数

$\boxed{3}$ $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$　　$\boxed{4}$ $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$　　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$

$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$　　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

例 7　$\sin\dfrac{5}{12}\pi=a$　とおくとき，$\cos\dfrac{11}{12}\pi$ の値を a を用いて表してみよう。

$$\cos\frac{11}{12}\pi=\cos\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{5}{12}\pi=-a$$

問16　$\cos\dfrac{\pi}{8}=a$　とおくとき，次の値を a を用いて表せ。

(1)　$\sin\dfrac{5}{8}\pi$　　(2)　$\cos\dfrac{9}{8}\pi$　　(3)　$\sin\dfrac{13}{8}\pi$

さらに，次の公式が成り立つ。

$\boxed{5}$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$　　$\boxed{6}$ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$　　$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

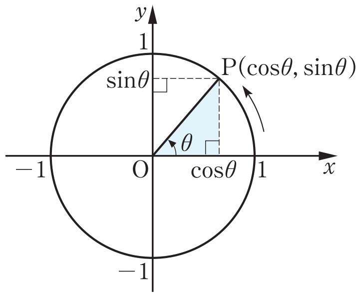
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$　　$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

問17　公式 $\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の θ を $-\theta$ で置き換えることにより，上の公式を確かめよ。

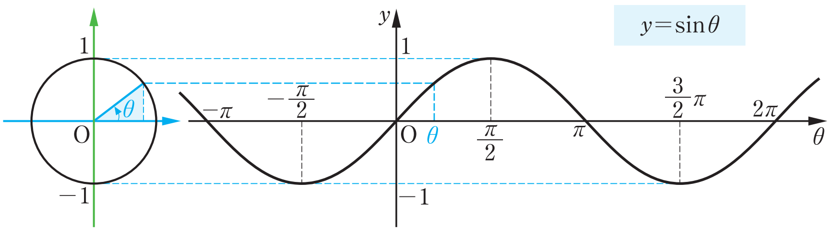
4 三角関数のグラフ

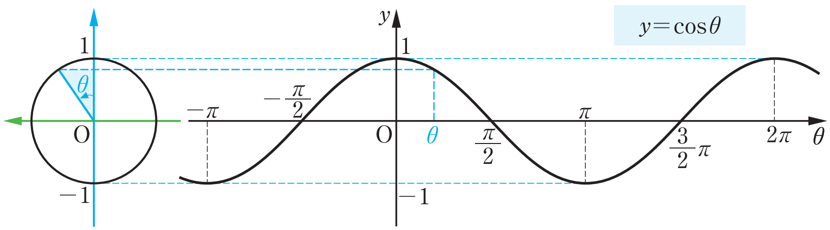
$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ のグラフ

角 θ の動径と単位円の交点をＰとすると，Ｐの y 座標が $\sin\theta$，Ｐの x 座標が $\cos\theta$ となる。



このことを利用すると，関数 $y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ のグラフを，下のようにかくことができる。

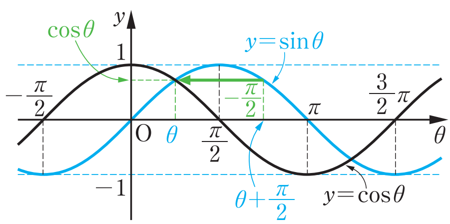




前ページの公式 $\boxed{3}$ から，$y = \cos\theta$ は

$$y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

と書ける。すなわち，$y = \cos\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。



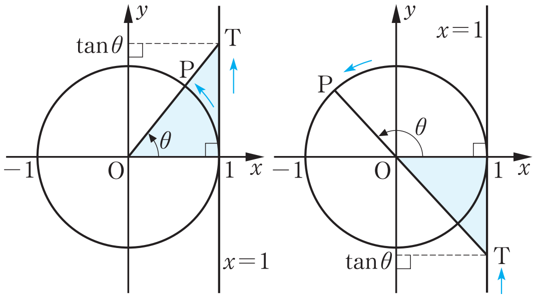
$y = \sin\theta$ や $y = \cos\theta$ のグラフの形の曲線を **正弦曲線** という。

$y = \tan\theta$ のグラフ

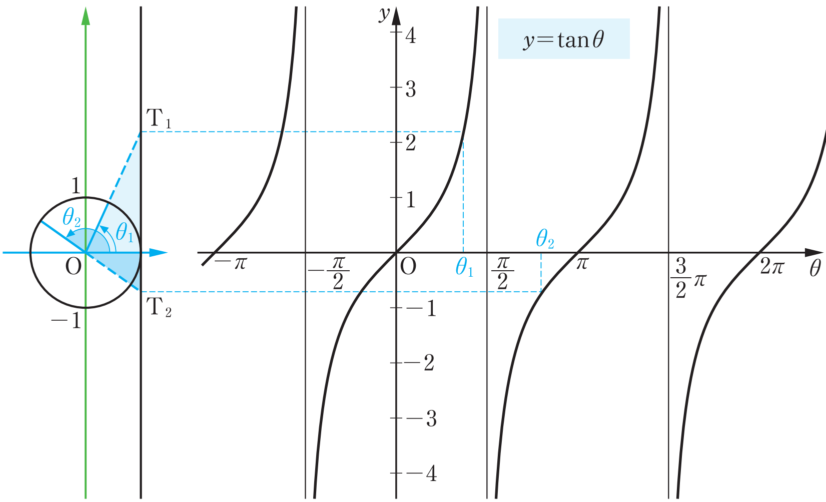
角 θ の動径を OP とし，直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を T とすると

$$\mathrm{T}(1,\ \tan\theta)$$

すなわち，T の y 座標が $\tan\theta$ に等しい。



このことを利用すると，関数 $y = \tan\theta$ のグラフを，下のようにかくことができる。



$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えると，θ が 0 から増加するにつれて，$\tan\theta$ の値も増加する。そして，θ が $\dfrac{\pi}{2}$ に近づけば，$\tan\theta$ の値は限りなく大きくなり，グラフは直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づいていく。

このように，グラフがある直線に限りなく近づくとき，その直線をグラフの **漸近線**（ぜんきんせん）という。同様に考えると，直線

$$\cdots,\quad \theta = -\frac{3}{2}\pi,\quad \theta = -\frac{\pi}{2},\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad \theta = \frac{3}{2}\pi,\quad \cdots$$

は，$y = \tan\theta$ のグラフの漸近線である。

周期関数

関数 $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは，ともに 2π ごとに同じ形がくり返される。このことは，次の公式からもわかる。

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

また，$y=\tan\theta$ のグラフは，π ごとに同じ形がくり返される。このことは，公式 $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ からもわかる。

一般に，関数 $y=f(x)$ について，0 でない定数 p があって，等式

$$\boldsymbol{f(x+p)=f(x)}$$

がすべての x に対して成り立つとき，$f(x)$ を，p を周期とする **周期関数** という。

p が $f(x)$ の周期であるとき，$2p$，$3p$，$-p$ なども $f(x)$ の周期となるから，$f(x)$ の周期は無数にある。しかし，ふつうは正の周期のうちで最小のものを $f(x)$ の **周期** という。

三角関数は周期関数で

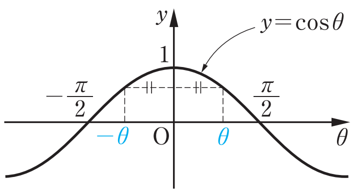
$\sin\theta$，$\cos\theta$ の 周期は 2π，$\tan\theta$ の 周期は π

偶関数・奇関数とそのグラフ

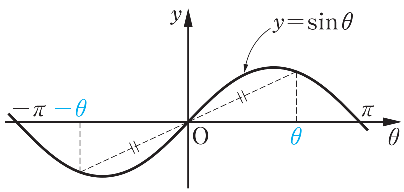
118 ページの公式 $\boxed{2}$ より

$$\cos(-\theta)=\cos\theta,\qquad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

このことから，関数 $y=\cos\theta$ のグラフは y 軸に関して対称であり，関数 $y=\sin\theta$ のグラフは原点に関して対称であることがわかる。



$\cos(-\theta)=\cos\theta$



$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

一般に，関数 $f(x)$ において

$$\boldsymbol{f(-x)=f(x)} \text{ が成り立つとき，} f(x) \text{ を } \textbf{偶関数}$$

$$\boldsymbol{f(-x)=-f(x)} \text{ が成り立つとき，} f(x) \text{ を } \textbf{奇関数}$$

という。$y=\cos\theta$ は偶関数，$y=\sin\theta$ は奇関数である。

偶関数のグラフは y 軸に関して対称であり，奇関数のグラフは原点に関して対称である。

例 8　関数 $f(\theta)=\tan\theta$ において

$$f(-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta=-f(\theta)$$

関数 $g(x)=x^2$ において

$$g(-x)=(-x)^2=x^2=g(x)$$

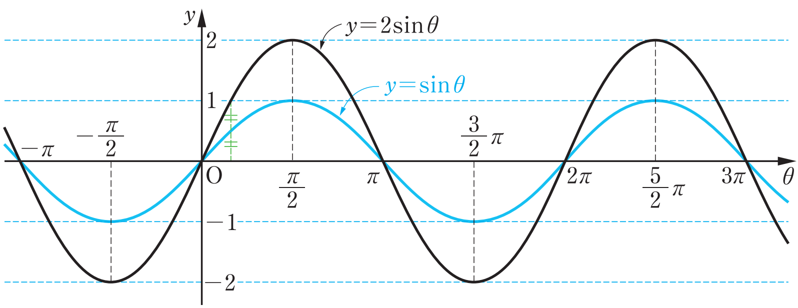
よって，$f(\theta)=\tan\theta$ は奇関数，$g(x)=x^2$ は偶関数である。

問18　関数 $f(x)=2x$ は偶関数であるか，奇関数であるか調べよ。

いろいろな三角関数のグラフ

例 9　関数 $y=2\sin\theta$ のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく 2π である。

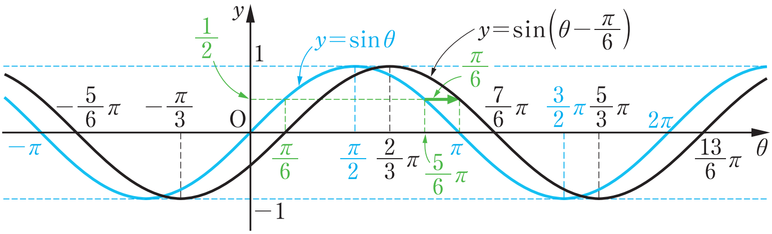


問19　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=2\cos\theta$　　　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

例 10　関数 $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフをかいてみよう。

この関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。その周期は $\sin\theta$ と同じく 2π である。

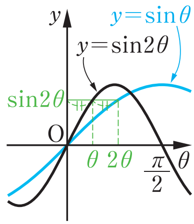


問20　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　　(2)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

例 11　関数 $y=\sin 2\theta$ のグラフをかいてみよう。

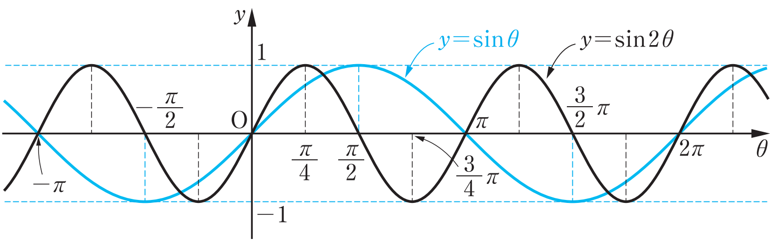
θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1			



上の表からもわかるように，$y=\sin 2\theta$ のグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。

したがって，関数 $y=\sin 2\theta$ の周期は $\sin\theta$ の周期の $\dfrac{1}{2}$ に等しく，

$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ である。



一般に，a を正の定数として，$f(\theta)=\sin a\theta$ とおくと

$$f\left(\theta+\frac{2\pi}{a}\right)=\sin a\left(\theta+\frac{2\pi}{a}\right)=\sin(a\theta+2\pi)$$
$$=\sin a\theta=f(\theta)$$

が成り立つから，$\sin a\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{a}$ である。

同様に，$\cos a\theta$ の周期は $\dfrac{2\pi}{a}$，$\tan a\theta$ の周期は $\dfrac{\pi}{a}$ である。

問21　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos 2\theta$　　(2)　$y=\tan\dfrac{\theta}{3}$

→ p.131 問題4

やや複雑な三角関数について，調べてみよう。

例題 4　三角関数のグラフ

関数 $y=\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

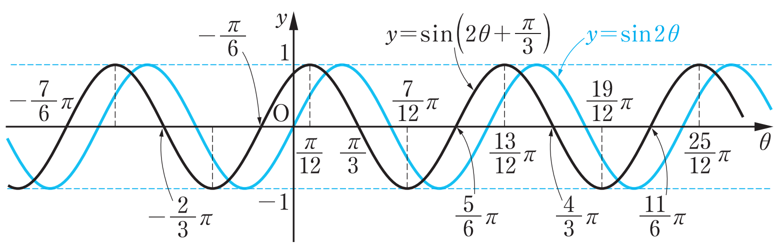
解

$$y=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

よって，$y=\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin 2\theta$ のグラフを

θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

また，その周期は $\sin 2\theta$ の周期に等しく，$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$ である。



問22　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\sin\left(2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(2)　$y=\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

→ p.146 練習問題8

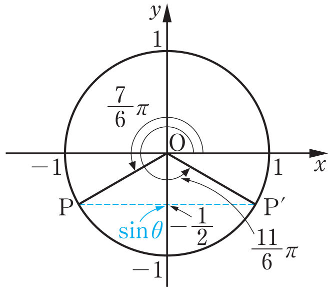
5　三角関数の応用

三角関数を含む方程式

例 12　方程式 $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めてみよう。

単位円の周上で，y 座標が $-\dfrac{1}{2}$ となる点は，右の図の P，P′ の 2 点であり，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\theta = \frac{7}{6}\pi,\quad \frac{11}{6}\pi$$



$\sin\theta$ の周期は 2π であるから

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi,\quad \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \qquad (n\text{ は整数})$$

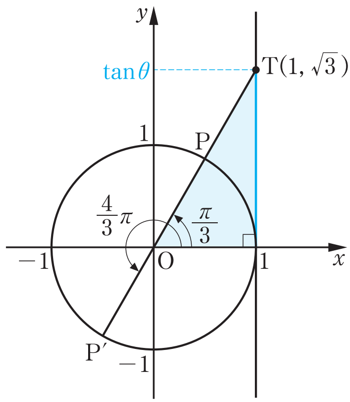
問23　次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(2)　$2\cos\theta = 1$

例 13　方程式 $\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ の値を求めてみよう。

$\mathrm{T}(1, \sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を右の図のように P，P′ とすると，動径 OP，OP′ の表す角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$\theta = \frac{\pi}{3},\quad \frac{4}{3}\pi$$



$\tan\theta$ の周期は π であるから

$$\theta = \frac{\pi}{3} + n\pi \qquad (n\text{ は整数})$$

問24　次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\tan\theta = 1$　　　　(2)　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$

やや複雑な方程式を解いてみよう。

例題 5　三角関数を含むやや複雑な方程式

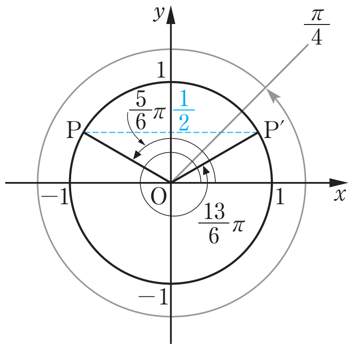
$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

を満たす θ の値を求めよ。

解　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \quad \cdots\cdots ①$$



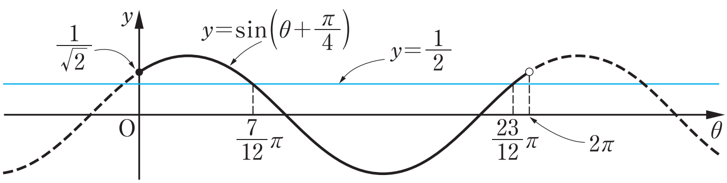
単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の P，P′ で，動径 OP，OP′ の表す角 $\theta+\frac{\pi}{4}$ は，① の範囲で

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$$

ゆえに

$$\theta=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$$

注意　例題 5 の解は，関数 $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフが直線 $y=\frac{1}{2}$ と交わる θ の値を求めても得られる。



問25　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{2}$

三角関数を含む不等式

例題 6 三角関数を含む不等式 [1]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

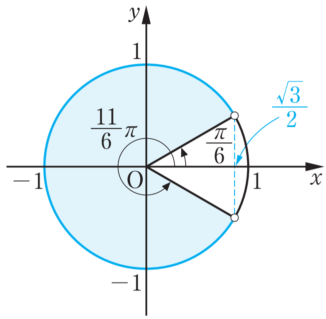
解 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の値は

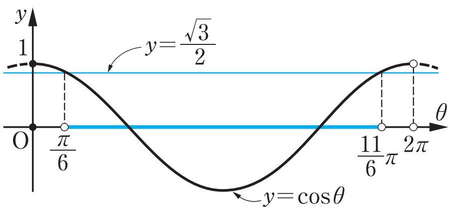
$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$$

よって，右の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{11}{6}\pi$$



注意 例題 6 の解は，関数 $y = \cos\theta$ のグラフが直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より下側にある θ の値の範囲を求めても得られる。



問26 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin\theta > \dfrac{1}{2}$ (2) $\cos\theta \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

問27 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\cos\theta > \dfrac{1}{2}$ (2) $\sin\theta \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $2\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$

例題 7　三角関数を含む不等式［2］

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $\tan\theta > 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

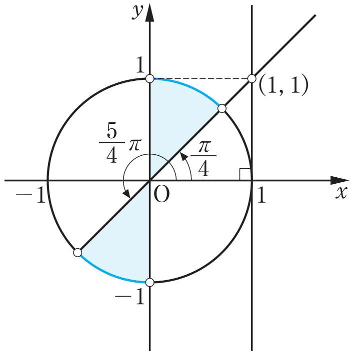
解　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，

$\tan\theta = 1$ となる θ の値は

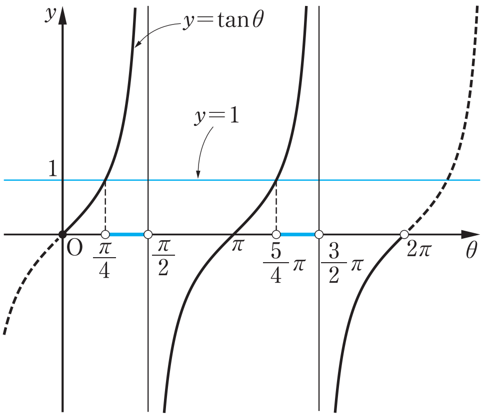
$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

よって，右の図から不等式を満たす θ の値の範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$



注意　例題 7 の解は，関数 $y = \tan\theta$ のグラフが直線 $y = 1$ より上側にある θ の値の範囲を求めても得られる。



問28　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\tan\theta > \sqrt{3}$　　(2)　$\sqrt{3}\tan\theta + 1 \leqq 0$

問29　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $-\sqrt{3} < \tan\theta < 1$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

三角関数を含む関数の最大・最小

やや複雑な三角関数を含む関数の最大値，最小値を調べてみよう。

応用 例題 8　　三角関数を含む関数の最大・最小

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y = \sin^2\theta + \sin\theta$$

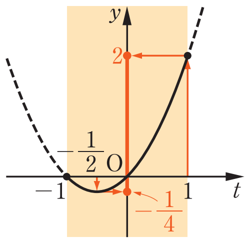
考え方　$\sin\theta = t$ とおくことによって，与えられた関数を t の2次関数とみて考える。

解　$\sin\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

また，y を t で表すと

$$y = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$



よって，この関数は

$t = 1$ のとき　最大値 2，$t = -\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\dfrac{1}{4}$

をとる。ここで，

$\sin\theta = 1$ となるのは　　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ となるのは　　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき

である。したがって，この関数は

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　最大値 2

$\theta = \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき　　最小値 $-\dfrac{1}{4}$

をとる。

問30　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$$y = -\cos^2\theta + \cos\theta + 2$$

→ p.131 問題7

問 題

1　θ は第 3 象限の角で，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ であるとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　→ p.146 練習問題2

2　$\sin\dfrac{5}{8}\pi=a$，$\cos\dfrac{5}{8}\pi=b$ とおくとき，次の値を a，b を用いて表せ。

(1)　$\sin\dfrac{9}{8}\pi$　　(2)　$\cos\left(-\dfrac{3}{8}\pi\right)$　　(3)　$\tan\dfrac{17}{8}\pi$　→ p.146 練習問題1

3　次の等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

(2)†　$\cos\theta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi-\theta)+\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)=0$　→ p.146 練習問題3

4　次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=-\tan\theta$　　(2)　$y=4\sin\dfrac{\theta}{2}$

(3)　$y=\cos3\theta+1$

5　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$　　(2)　$2\sin2\theta=\sqrt{3}$

(3)　$\tan\dfrac{\theta}{2}+1=0$

6　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<\dfrac{1}{2}$　　(2)　$4\sin^2\theta-1>0$

(3)　$3\tan^2\theta\leqq1$

7　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=\cos^2\theta+\sin\theta$$