1節 点と直線

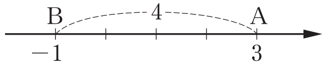
1　2点間の距離

数直線上の2点間の距離

数直線上の点には実数が対応し，2点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて $\mathbf{AB}=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|$ と表される。

例 1　2点 A(3)，B(-1) に対し

$$\mathrm{AB}=|-1-3|=4$$



問 1　次の2点間の距離を求めよ。

(1)　O(0)，A(3)　　(2)　A(-1)，B(5)　　(3)　A(7)，B(3)

座標平面上の2点間の距離

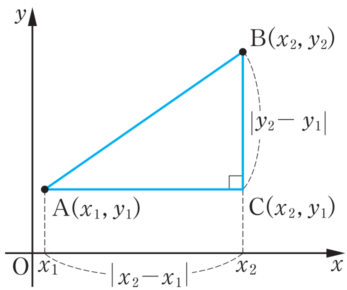
座標平面上の2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離を求めてみよう。

線分 AB が座標軸に平行でないとして，図のような直角三角形 ABC をつくると

$$\mathrm{AC}=|x_2-x_1|,\quad \mathrm{BC}=|y_2-y_1|$$

三平方の定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}\\&=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\end{aligned}$$



2点間の距離

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2}$$

とくに，原点Oと点 P$(x,\ y)$ の距離は　$\mathbf{OP}=\sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$

この公式は，線分 AB が x 軸または y 軸に平行な場合でも成り立つ。

例 2　2点 A$(-2,\ 4)$，B$(2,\ 3)$ 間の距離は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-4)^2}=\sqrt{17}$$

原点Oと点 P$(5,\ 12)$ の距離は

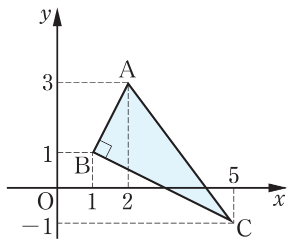
$$\mathrm{OP}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

問 2　次の2点間の距離を求めよ。

(1)　A$(2,\ 1)$，B$(5,\ 7)$　　(2)　A$(-3,\ 5)$，B$(-2,\ -2)$

(3)　O$(0,\ 0)$，P$(-4,\ 3)$　　(4)　A$(8,\ -2)$，B$(8,\ -19)$

例 3　3点 A$(2,\ 3)$，B$(1,\ 1)$，C$(5,\ -1)$ を頂点とする△ABCは，どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の3辺の長さは



$$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$$

$$=2\sqrt{5}$$

$$\mathrm{CA}=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5$$

であるから　　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$

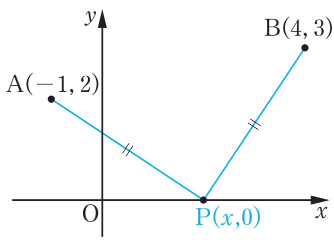
よって，△ABCは∠Bを直角とする直角三角形である。

問 3　次の3点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1)　A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 2)$，C$(3,\ -1)$

(2)　A$(2,\ \sqrt{3})$，B$(-1,\ 2\sqrt{3})$，C$(-1,\ 0)$

例 4　2点 A$(-1,\ 2)$，B$(4,\ 3)$ から等距離にある x 軸上の点Pの座標を求めてみよう。点Pの座標を $(x,\ 0)$ とする。



AP＝BP より　　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって

$$(x+1)^2+(-2)^2=(x-4)^2+(-3)^2$$

これを解くと　　$x=2$

すなわち　　P$(2,\ 0)$

問 4　2点 A$(1,\ 1)$，B$(4,\ 4)$ から等距離にある y 軸上の点Qの座標を求めよ。

2 内分点・外分点

数直線上の内分点・外分点

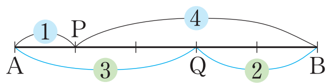
m, n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に **内分** するという。

例 5　右の図において



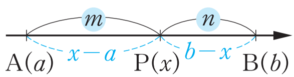
点 P は線分 AB を 1：4 に内分し，

点 Q は線分 AB を 3：2 に内分する。

問 5　2点 A(3)，B(7) に対して，線分 AB を 3：1 に内分する点 P，1：3 に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。

2点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。$a < b$ のとき，$a < x < b$ となるから

$$\mathrm{AP} = x - a, \qquad \mathrm{PB} = b - x$$

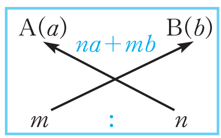


である。AP：PB $= m : n$ であるから

$$(x-a) : (b-x) = m : n$$

すなわち　　$m(b-x) = n(x-a)$

ゆえに　　$$\boldsymbol{x = \frac{na+mb}{m+n}}$$



$a > b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

とくに，線分 AB の **中点** の座標は $\dfrac{a+b}{2}$ である。

問 6　2点 A(-4)，B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M　　(2)　線分 AB を 3：2 に内分する点 P

(3)　線分 AB を 1：4 に内分する点 Q

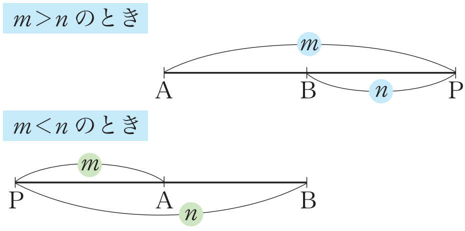
(4)　線分 BA を 1：4 に内分する点 R

m，n を異なる正の数とする。

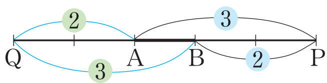
線分 AB の延長上に点 P があり

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に **外分** するという。



例 6　右の図の点 P は線分 AB を 3：2 に外分し，点 Q は 2：3 に外分する。



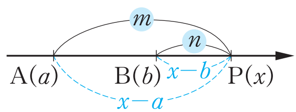
問 7　例 6 の線分 AB を 1：2 に外分する点 R を図示せよ。

2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a < b$，$m > n$ とすると，点 P は線分 AB の右側にあるから

$$a < b < x$$

となる。



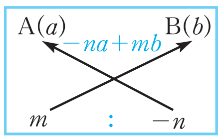
よって　　$\mathrm{AP} = x - a$，　　$\mathrm{PB} = x - b$

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = m : n$ であるから

$$(x-a) : (x-b) = m : n$$

すなわち　　$m(x-b) = n(x-a)$

ゆえに　　$$\boldsymbol{x = \dfrac{-na+mb}{m-n}}$$



この式は a と b，m と n の大小に関係なく成り立つ。

外分の公式は，内分の公式で n を $-n$ に置き換えたものである。

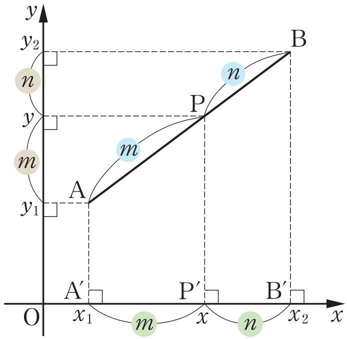
問 8　2 点 A(-5)，B(7) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2：1 に外分する点 P

(2)　線分 AB を 1：3 に外分する点 Q

座標平面上の内分点・外分点

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点Pの座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう。



点 A，B，P から x 軸に垂線 AA′，BB′，PP′ を下ろすと，点 P′ は線分 A′B′ を $m:n$ に内分する点である。

数直線上の内分点の公式により

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

である。

また，点 A，B，P から y 軸に垂線を下ろして考えると，点Pの y 座標は

$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

である。

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標

2点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に **内分** する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

$m:n$ に **外分** する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

とくに，線分 AB の **中点** の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

この公式を用いて，内分点，外分点の座標を求めてみよう。

例 7　2点 A$(-2,\ 1)$，B$(4,\ 4)$ がある。

線分 AB を $2:1$ に内分する点Pの座標を求めてみよう。

P$(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 4}{2+1}=2,\qquad y=\frac{1\cdot 1+2\cdot 4}{2+1}=3$$

したがって，求める点Pの座標は $(2,\ 3)$ である。

線分 AB を $2:1$ に外分する点Qの座標を求めてみよう。

Q$(x',\ y')$ とすると

$$x'=\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot 4}{2-1}=10,\qquad y'=\frac{-1\cdot 1+2\cdot 4}{2-1}=7$$

したがって，求める点Qの座標は $(10,\ 7)$ である。

問 9　次の2点A，Bを結ぶ線分 AB を，$3:2$ に内分する点P，$3:2$ に外分する点Q，および線分 AB の中点Mの座標を求めよ。

(1)　A$(1,\ 3)$，B$(6,\ 5)$　　　(2)　A$(-2,\ 3)$，B$(4,\ -1)$

例題 1　　ある点に関して対称な点

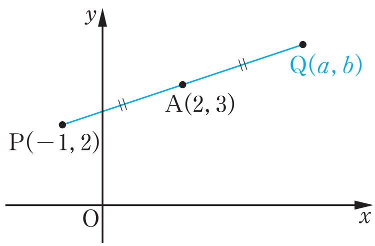
点 A$(2,\ 3)$ に関して，点 P$(-1,\ 2)$ と対称な点Qの座標を求めよ。

解　点Qの座標を $(a,\ b)$ とすると，線分 PQ の中点が点Aであるから

$$\frac{-1+a}{2}=2,\qquad \frac{2+b}{2}=3$$

したがって　　$a=5,\ b=4$

求める点Qの座標は　$(5,\ 4)$



問10　4点 A$(-1,\ -1)$，B$(5,\ -2)$，C$(3,\ 3)$，Dを頂点とする平行四辺形 ABCD について，次の点の座標を求めよ。

(1)　対角線 AC の中点M　　　(2)　頂点D

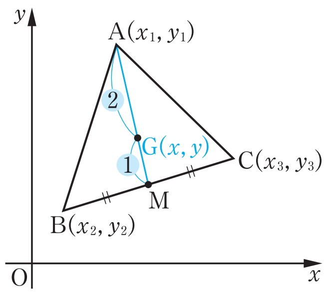
三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を **中線** という。三角形の3本の中線は1点で交わり，この点をその三角形の **重心** という。重心はそれぞれの中線を2：1に内分する点である。

3点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABC の重心Gの座標を求めてみよう。

辺BC の中点をMとすると，点Mの座標は $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$ である。

重心 G$(x,\ y)$ は線分 AM を2：1に内分する点であるから



$$x=\frac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{1\cdot y_1+2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

以上より，次のことがわかる。

三角形の重心

3点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABC の重心Gの座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8　3点 A(2，3)，B(5，−4)，C(−1，1) を頂点とする△ABC の重心Gの座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{2+5+(-1)}{3}=2,\qquad y=\frac{3+(-4)+1}{3}=0$$

すなわち　　G(2，0)

問11　3点 A(3，6)，B(−5，−1)，C(8，−7) を頂点とする△ABC の重心Gの座標を求めよ。

→ p.80 問題2

3　直線の方程式

1 次関数 $y=mx+n$ のグラフは，傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を，この直線の **y 切片** という。

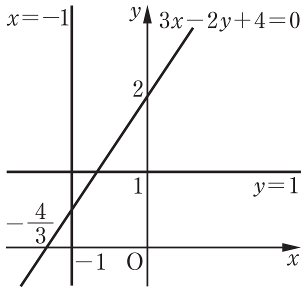
一般に，x，y についての方程式を成り立たせる点 $(x,\ y)$ のえがく図形を，その **方程式の表す図形** または **方程式のグラフ** という。また，その方程式を，その **図形の方程式** という。

x，y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形を考えてみよう。

例 9　(1)　方程式 $3x-2y+4=0$ は

$$y=\frac{3}{2}x+2$$

と変形できるから，傾きが $\dfrac{3}{2}$，y 切片が 2 の直線を表す。



(2)　方程式 $y-1=0$ は　$y=1$

と変形できるから，点 $(0,\ 1)$ を通り，x 軸に平行な直線を表す。

(3)　方程式 $x+1=0$ は　$x=-1$

と変形できるから，点 $(-1,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線を表す。

問12　次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

(1)　$2x-3y+6=0$　　(2)　$y-2=0$　　(3)　$x+3=0$

一般に，x，y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ の表す図形は，$a\neq 0$ または $b\neq 0$ のとき，直線である。実際

$b\neq 0$ のとき，傾きが $-\dfrac{a}{b}$ の直線 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ を表す。

とくに $a=0$ のときは，x 軸に平行な直線 $y=-\dfrac{c}{b}$ を表す。

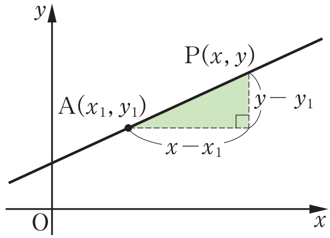
$b=0$ のとき，y 軸に平行な直線 $x=-\dfrac{c}{a}$ を表す。

逆に，すべての直線は，x，y の 1 次方程式 $ax+by+c=0$ で表される。

直線の方程式のいろいろな形

1　点 A$(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線

　この直線上の点A以外の任意の点 P$(x,\ y)$ に対して，傾き m は次の式で表される。



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

よって　　$y - y_1 = m(x - x_1)$

1 点を通り，傾き m の直線

> 点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式は
>
> $$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

例 10　点 $(2,\ -5)$ を通り，傾き -4 の直線の方程式は

$$y - (-5) = -4(x - 2)$$

すなわち　　$y = -4x + 3$

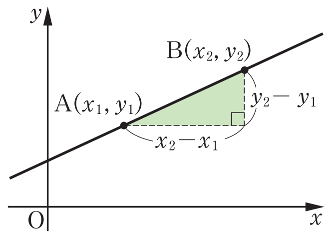
問13　点 $(-3,\ 4)$ を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが 2　　　(2)　傾きが $-\dfrac{1}{3}$

2　異なる 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を通る直線

(i)　$x_1 \neq x_2$ のとき

　直線 AB の傾き m は



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

　さらに点 $(x_1,\ y_1)$ を通るから，

　その方程式は

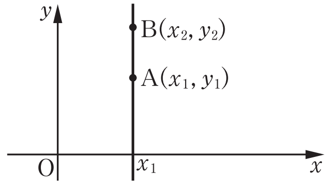
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(ii)　$x_1 = x_2$ のとき

直線 AB は y 軸に平行であるから，

その方程式は

$$x = x_1$$



2点を通る直線

> 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は
>
> $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$ のとき　$\boldsymbol{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$
>
> $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ のとき　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 11　2 点 A$(-3,\ 2)$，B$(6,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)}\{x-(-3)\}　　すなわち　y = \frac{2}{3}x + 4$$

問14　次の 2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(2,\ -3)$，B$(4,\ 3)$　　(2)　A$(6,\ -1)$，B$(-3,\ 5)$

(3)　A$(-2,\ 0)$，B$(-2,\ -6)$　　(4)　A$(4,\ 7)$，B$(-3,\ 7)$

問15　3 点 A$(-2,\ 6)$，B$(7,\ 3)$，C$(a,\ a+4)$ があるとき，次の問に答えよ。

(1)　2 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

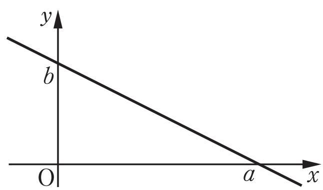
(2)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

例 12　2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線の方程式は，$a \neq 0$，$b \neq 0$ のとき

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

である。これを変形すると

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

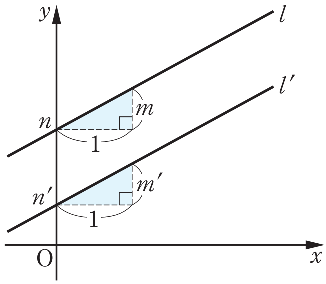


注意　直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の **x 切片** という。例 12 の直線では x 切片が a，y 切片が b である。

問16　x 切片が 3，y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

4　2 直線の関係

2 直線の平行と垂直



2 直線　l:　$y=mx+n$

l':　$y=m'x+n'$

が平行あるいは垂直となる条件を調べてみよう。

2 直線が平行ならば傾きは等しく，傾きが等しければ 2 直線は平行である。

すなわち　　2 直線 l，l' が平行　$\Longleftrightarrow$　$m=m'$

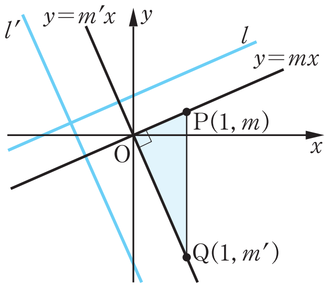
なお，$m=m'$，$n=n'$ のとき，2 直線は一致するが，このときも平行と考えることにする。

次に，l，l' が座標軸に平行でないとして，l と l' の垂直条件を考える。

l と l' が垂直であることは，これらと平行で原点Oを通る 2 直線

$y=mx$，　$y=m'x$

が垂直であることと同じである。



この 2 直線上にそれぞれ

点 P$(1,\ m)$，Q$(1,\ m')$ をとると

$$\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$$

であるから，$\triangle$OPQ について三平方の定理により　　$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2$

すなわち　　$(m-m')^2=(1+m^2)+\{1+(m')^2\}$

これを整理すると　　$mm'=-1$

逆に，2 直線の傾きの積が -1 のとき，それらは垂直である。

よって

$$2\text{ 直線 } l,\ l' \text{ が垂直} \Longleftrightarrow mm'=-1$$

2 直線の平行条件・垂直条件

2 直線　$y=mx+n$，　$y=m'x+n'$　について

平行条件は　$m=m'$　　　**垂直条件は**　$mm'=-1$

問17　次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

①　$y=-2x+5$　　②　$x-3y+7=0$

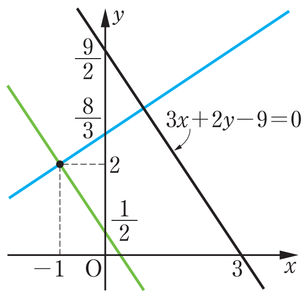
③　$6x+2y+3=0$　　④　$6x+3y=1$

例題 2　　2 直線の平行と垂直

点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x+2y-9=0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

解　直線 $3x+2y-9=0$ を l とすると，l の傾きは $-\dfrac{3}{2}$ である。

よって，l に平行な直線の傾きは $-\dfrac{3}{2}$ であるから，点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に平行な直線の方程式は



$$y-2=-\frac{3}{2}(x+1)$$

すなわち　　$3x+2y-1=0$　…… 答

また，l に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{2}m=-1 \qquad \text{すなわち} \qquad m=\frac{2}{3}$$

点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$y-2=\frac{2}{3}(x+1)$$

すなわち　　$2x-3y+8=0$　…… 答

問18　点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $2x-5y-1=0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

→ p.80 問題3

問19　直線 $ax-2y+5=0$ が直線 $2x+y-10=0$ に垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

→ p.80 問題5

垂直条件を用いて，次の問題を解いてみよう。

例題 3　　ある直線に関して対称な点

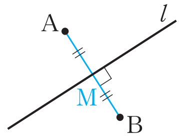
直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 A(1, 2) と対称な点Bの座標を求めよ。

考え方　2点 A，B が，ある直線 l に関して対称である条件は

［1］　直線 AB は直線 l に垂直である

［2］　線分 AB の中点Mは直線 l 上にある

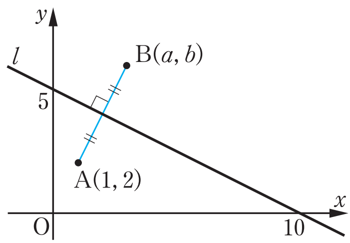
が成り立つことである。



解　直線 $x+2y-10=0$ を l とし，点Bの座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　$-\dfrac{1}{2}$

直線 AB の傾きは　$\dfrac{b-2}{a-1}$



$l \perp \mathrm{AB}$ であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-2}{a-1}=-1$$

すなわち

$$b=2a \qquad \cdots\cdots ①$$

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+2}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\frac{a+1}{2}+2\cdot\frac{b+2}{2}-10=0$$

すなわち　$a+2b-15=0 \qquad \cdots\cdots ②$

①，② より

$$a=3,\quad b=6$$

したがって，点Bの座標は　(3, 6)

問20　直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 A(4, -1) と対称な点Bの座標を求めよ。

→ p.80 問題7

2直線の交点

2 直線の交点の座標は，2 直線を表す方程式を連立させた連立 2 元 1 次方程式の解として得られる。

例題 4　3 直線が 1 点で交わる条件

2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ について，次の問に答えよ。

(1)　2 直線の交点の座標を求めよ。

(2)　この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解　(1)　連立方程式

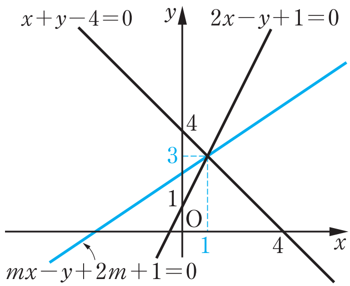
$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

を解くと

$$x=1,\quad y=3$$

よって，求める交点の座標は

$$(1,\ 3)$$



(2)　直線 $mx-y+2m+1=0$ が点 $(1,\ 3)$ を通るから

$$m-3+2m+1=0$$

したがって

$$m=\frac{2}{3}$$

問21　次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1)　$5x-4y+13=0,\qquad 3x+y+1=0$

(2)　$3x-y-6=0,\qquad 6x+5y+2=0$

問22　3 直線

$$x-2y+8=0,\qquad 2x+3y-5=0,\qquad mx-y-2m+8=0$$

が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ。

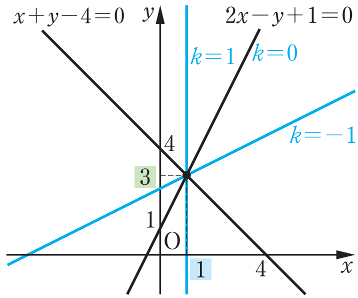
2直線の交点を通る直線

2直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ に対して，方程式

$$\boldsymbol{k(x+y-4)+(2x-y+1)=0} \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える。ただし，k は定数とする。

方程式①が2直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。



$$x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$$

を同時に満たす x, y の値の組 $x=1$, $y=3$ は k の値に関係なく①を満たす。

よって，①で表される図形は2直線の交点 $(1,\ 3)$ を通る。

また，①を変形すると

$$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$k+2$ と $k-1$ は同時には0にならないから，②の表す図形は直線である。

よって，①は2直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ の交点 $(1,\ 3)$ を通る直線を表す。

例題 5　　2直線の交点を通る直線

2直線 $3x+4y-17=0$, $x-2y+1=0$ の交点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解　k を定数として，2直線の交点を通る直線の方程式を

$$k(3x+4y-17)+(x-2y+1)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく。①に点 $(2,\ 3)$ の座標 $x=2$, $y=3$ を代入すると

$k(3\cdot2+4\cdot3-17)+(2-2\cdot3+1)=0$ より　　$k=3$

これを①に代入して整理すると，求める直線の方程式は

$$x+y-5=0$$

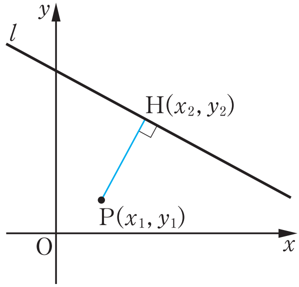
問23　2直線 $4x-5y+5=0$, $x+2y-6=0$ の交点と点 $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

➡ p.106 練習問題2

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ を l とし，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を l 上にない点とする。

直線 l と点Pの距離は，点Pから直線 l に下ろした垂線PHの長さである。これを求めてみよう。$a \neq 0$，$b \neq 0$ とし，点Hの座標を $(x_2,\ y_2)$ とすると，垂直条件から



$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

よって　$$\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}$$

この値を k とおくと

$$x_2-x_1=ak,\qquad y_2-y_1=bk \qquad \cdots\cdots ①$$

すなわち　$$x_2=x_1+ak,\qquad y_2=y_1+bk \qquad \cdots\cdots ②$$

また，$\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$ は直線 l 上の点であるから　$ax_2+by_2+c=0$

これと ② より

$$a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$$

$$(a^2+b^2)k+(ax_1+by_1+c)=0$$

これより　$$k=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \qquad \cdots\cdots ③$$

①，③ より　$$\mathrm{PH}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(a^2+b^2)k^2$$

$$=(a^2+b^2)\cdot\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$$

ゆえに　$$\mathrm{PH}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

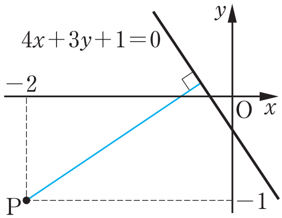
上の公式は，a，b の一方が0の場合も成り立つ。

例13　点 P$(-2,\ -1)$ と直線

$$4x+3y+1=0$$

の距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$



問24　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線　$x+2y+2=0$

(2)　点 $(3,\ 4)$ と直線　$2x-3y+1=0$

(3)　点 $(7,\ -1)$ と直線　$y=-3x+6$

→ p.80 問題8

座標を用いた図形の性質の証明

座標を利用して，図形の性質を証明してみよう。

応用例題 6　　中線定理

△ABC の辺 BC の中点をMとすると

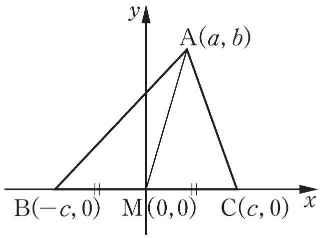
$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

であることを証明せよ。

証明　Mを原点とし，直線 BC を x 軸にとると，三角形の頂点 A，B，C の座標はそれぞれ

$$A(a,\ b),\ B(-c,\ 0),\ C(c,\ 0)$$

とおける。このとき



$$AB^2+AC^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$AM^2+BM^2=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$$

ゆえに　　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

問25　△ABC の辺 BC を $1:2$ に内分する点をDとすると

$$2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)$$

であることを証明せよ。

→ p.106 練習問題4

2直線の垂直条件を利用して，三角形の頂点から対辺に下ろした3本の垂線が1点で交わることを証明してみよう。

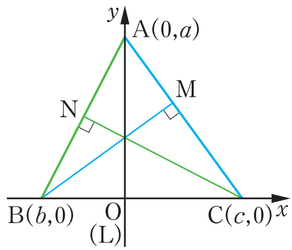
応用 例題 7　　3本の垂線の交点

△ABC の3つの頂点から，それぞれの対辺に下ろした垂線 AL，BM，CN は1点で交わることを証明せよ。

証明　△ABC が直角三角形ならば，明らかに3本の垂線は直角の頂点で交わる。

次に，△ABC が直角三角形でないならば，直線 BC を x 軸，垂線 AL を y 軸にとると，A$(0,\ a)$，B$(b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ とおける。

ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ である。



直線 AC の傾きは $-\dfrac{a}{c}$ であるから，

垂線 BM の方程式は

$$y=\frac{c}{a}(x-b)$$

また，直線 AB の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，垂線 CN の方程式は

$$y=\frac{b}{a}(x-c)$$

直線 BM，CN はともに y 軸上の点 $\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ を通る。

したがって，3本の垂線 AL，BM，CN は1点で交わる。

例題7における3本の垂線の交点を △ABC の **垂心** という。

問26　△ABC において，各辺の垂直二等分線は，1点で交わることを証明せよ。

図形の性質を証明するには，座標を用いて次のようにするとよい。

1　座標軸を適当に設定し，図形の関係を数式で表す。

2　得られた数式を用いて計算する。

3　計算結果を図形的に解釈する。

問 題

1 2点 A(-2)，B(5) を結ぶ線分 AB を $3:4$ に内分する点をC，$3:4$ に外分する点をDとするとき，線分 CD の長さを求めよ。 → p.106 練習問題1

2 △ABC の2つの頂点 A, B および重心Gの座標が A$(-7,\ -5)$, B$(2,\ -2)$, G$(-2,\ -1)$ であるとき，頂点Cの座標を求めよ。

3 2点 A$(3,\ 4)$，B$(-2,\ 7)$ を通る直線を l とするとき，次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に平行な直線

(2) 点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 l に垂直な直線

4 2点 A$(1,\ -1)$，B$(3,\ -7)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

5 2直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。ただし，$b_1 \neq 0$，$b_2 \neq 0$ とする。

(1) 2直線が **平行** $\iff$ $\boldsymbol{a_1b_2-b_1a_2=0}$

(2) 2直線が **垂直** $\iff$ $\boldsymbol{a_1a_2+b_1b_2=0}$

6† 2直線

$$ax+4y-1=0$$
$$x+(a-3)y-2=0$$

が平行になるような定数 a の値を求めよ。また，垂直になるような定数 a の値を求めよ。

7 直線 $y=x$ に関して，点 A$(p,\ q)$ と対称な点Bの座標を p，q で表せ。ただし，$p \neq q$ とする。

8 点 A$(2,\ 1)$ と直線 $5x+12y+4=0$ 上を動く点Pがある。線分 AP の長さの最小値を求めよ。 → p.106 練習問題3