

1 節 点と直線

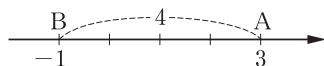
1 2点間の距離

数直線上の2点間の距離

数直線上の点には実数に対応し、2点 $A(a)$, $B(b)$ 間の距離 AB は、 a , b の大小に関係なく、絶対値の記号を用いて $AB = |b - a|$ と表される。 5

例 1 2点 $A(3)$, $B(-1)$ に対し

$$AB = |-1 - 3| = 4$$



問 1 次の2点間の距離を求めよ。

- (1) $O(0)$, $A(3)$ (2) $A(-1)$, $B(5)$ (3) $A(7)$, $B(3)$

座標平面上の2点間の距離

10

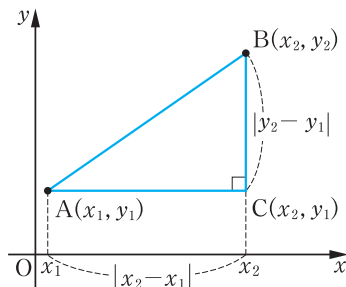
座標平面上の2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離を求めてみよう。

線分 AB が座標軸に平行でないとして、図のような直角三角形 ABC をつくと

$$AC = |x_2 - x_1|, \quad BC = |y_2 - y_1|$$

三平方の定理により

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



15

2点間の距離

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに、原点 O と点 $P(x, y)$ の距離は $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

20

この公式は、線分 AB が x 軸または y 軸に平行な場合でも成り立つ。

例 2 2点 $A(-2, 4)$, $B(2, 3)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{17}$$

原点 O と点 $P(5, 12)$ の距離は

$$OP = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

問 2 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $A(2, 1)$, $B(5, 7)$

(2) $A(-3, 5)$, $B(-2, -2)$

(3) $O(0, 0)$, $P(-4, 3)$

(4) $A(8, -2)$, $B(8, -19)$

例 3 3点 $A(2, 3)$, $B(1, 1)$, $C(5, -1)$ を頂点とする $\triangle ABC$ は、どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の 3 辺の長さは

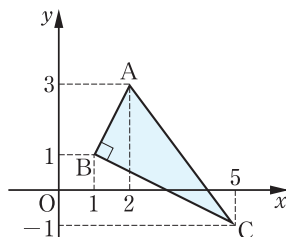
$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$CA = \sqrt{(2-5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{であるから} \quad AB^2 + BC^2 = CA^2$$

よって、 $\triangle ABC$ は $\angle B$ を直角とする直角三角形である。



問 3 次の 3 点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1) $A(-1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(3, -1)$

(2) $A(2, \sqrt{3})$, $B(-1, 2\sqrt{3})$, $C(-1, 0)$

例 4 2点 $A(-1, 2)$, $B(4, 3)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めてみよう。点 P の座標を $(x, 0)$ とする。

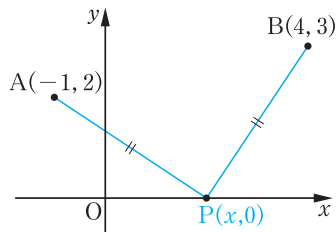
$$AP = BP \text{ より } AP^2 = BP^2$$

よって

$$(x+1)^2 + (-2)^2 = (x-4)^2 + (-3)^2$$

$$\text{これを解くと } x = 2$$

$$\text{すなわち } P(2, 0)$$



問 4 2点 $A(1, 1)$, $B(4, 4)$ から等距離にある y 軸上の点 Q の座標を求めよ。

2 内分点・外分点

数直線上の内分点・外分点

m, n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

$$AP : PB = m : n$$



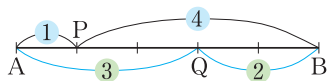
5

が成り立つとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に **内分** するという。

例 5 右の図において

点 P は線分 AB を $1 : 4$ に内分し、

点 Q は線分 AB を $3 : 2$ に内分する。



問 5 2点 A(3), B(7) に対して、線分 AB を $3 : 1$ に内分する点 P, $1 : 3$ に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。

10

2点 A(a), B(b) に対して、線分 AB を $m : n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。 $a < b$ のとき、 $a < x < b$ となるから

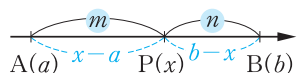
$$AP = x - a, \quad PB = b - x$$

である。AP : PB = $m : n$ であるから

$$(x - a) : (b - x) = m : n$$

すなわち $m(b - x) = n(x - a)$

ゆえに
$$x = \frac{na + mb}{m + n}$$



15

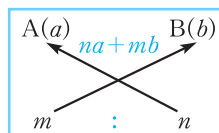
$a > b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

とくに、線分 AB の **中点** の座標は $\frac{a+b}{2}$ である。

20

問 6 2点 A(-4), B(6) に対して、次の点の座標を求めよ。

- (1) 線分 AB の中点 M
- (2) 線分 AB を $3 : 2$ に内分する点 P
- (3) 線分 AB を $1 : 4$ に内分する点 Q
- (4) 線分 BA を $1 : 4$ に内分する点 R



m, n を異なる正の数とする。

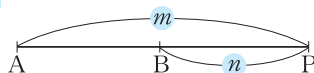
線分 AB の延長上に点 P が

あり

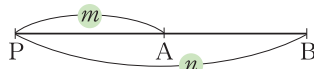
$$AP : PB = m : n$$

が成り立つとき、点 P は線分 AB を $m : n$ に **外分** するという。

$m > n$ のとき



$m < n$ のとき



例 6 右の図の点 P は線分 AB を 3 : 2 に外分し、点 Q は 2 : 3 に外分する。



問 7 例 6 の線分 AB を 1 : 2 に外分する点 R を図示せよ。

2 点 $A(a), B(b)$ に対して、線分 AB を $m : n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a < b, m > n$ とすると、点 P は線分 AB の右側にあるから

$$a < b < x$$

となる。

$$\text{よって} \quad AP = x - a, \quad PB = x - b$$

$AP : PB = m : n$ であるから

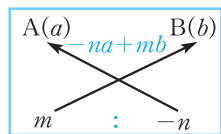
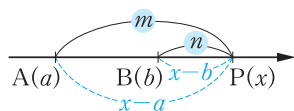
$$(x - a) : (x - b) = m : n$$

すなわち

$$m(x - b) = n(x - a)$$

ゆえに

$$x = \frac{-na + mb}{m - n}$$



この式は a と b , m と n の大小に関係なく成り立つ。

外分の公式は、内分の公式で n を $-n$ に置き換えたものである。

問 8 2 点 $A(-5), B(7)$ に対して、次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P

(2) 線分 AB を 1 : 3 に外分する点 Q

座標平面上の内分点・外分点

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 (x, y) を求めてみよう。

点 A, B, P から x 軸に垂線 AA', BB', PP' を下ろすと、点 P' は線分 $A'B'$ を $m:n$ に内分する点である。

数直線上の内分点の公式により

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

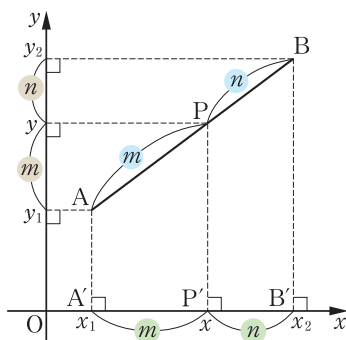
である。

また、点 A, B, P から y 軸に垂線を下ろして考えると、点 P の y 座標は

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

である。

外分点の座標も、内分点の場合と同様に求めることができる。



内分点・外分点の座標

2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$

$m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

とくに、線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

この公式を用いて、内分点、外分点の座標を求めてみよう。

例 7 2点 $A(-2, 1)$, $B(4, 4)$ がある。

線分 AB を $2:1$ に内分する点 P の座標を求めてみよう。

$P(x, y)$ とすると

$$x = \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{2+1} = 2, \quad y = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2+1} = 3$$

したがって、求める点 P の座標は $(2, 3)$ である。

線分 AB を $2:1$ に外分する点 Q の座標を求めてみよう。

$Q(x', y')$ とすると

$$x' = \frac{-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{2-1} = 10, \quad y' = \frac{-1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{2-1} = 7$$

したがって、求める点 Q の座標は $(10, 7)$ である。

問 9 次の2点 A , B を結ぶ線分 AB を、 $3:2$ に内分する点 P , $3:2$ に外分する点 Q , および線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(1) $A(1, 3)$, $B(6, 5)$

(2) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

例題

ある点に関して対称な点

1

点 $A(2, 3)$ に関して、点 $P(-1, 2)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

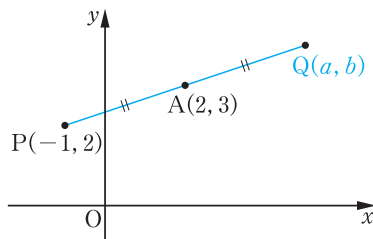
解

点 Q の座標を (a, b) とすると、線分 PQ の中点が点 A であるから

$$\frac{-1+a}{2} = 2, \quad \frac{2+b}{2} = 3$$

したがって $a = 5$, $b = 4$

求める点 Q の座標は $(5, 4)$



問10

4点 $A(-1, -1)$, $B(5, -2)$, $C(3, 3)$, D を頂点とする平行四辺形 $ABCD$ について、次の点の座標を求めよ。

(1) 対角線 AC の中点 M

(2) 頂点 D

三角形の重心

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を **中線** という。三角形の3本の中線は1点で交わり、この点をその三角形の **重心** という。重心はそれぞれの中線を2:1に内分する点である。

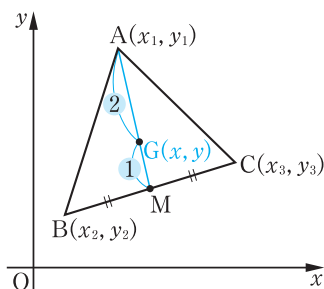
3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めてみよう。

辺 BC の中点を M とすると、点 M の座標は $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$ である。

重心 $G(x, y)$ は線分 AM を2:1に内分する点であるから

$$x = \frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{1 \cdot y_1 + 2 \cdot \frac{y_2+y_3}{2}}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$



以上より、次のことがわかる。

三角形の重心

3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の座標は $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8 3点 $A(2, 3)$, $B(5, -4)$, $C(-1, 1)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の座標 (x, y) は

$$x = \frac{2+5+(-1)}{3} = 2, \quad y = \frac{3+(-4)+1}{3} = 0$$

すなわち $G(2, 0)$

問11 3点 $A(3, 6)$, $B(-5, -1)$, $C(8, -7)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めよ。

3 直線の方程式

1 次関数 $y = mx + n$ のグラフは、傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を、この直線の y ^{せつぺん}切片 という。

一般に、 x, y についての方程式を成り立たせる点 (x, y) のえがく図形を、その **方程式の表す図形** または **方程式のグラフ** という。また、その方程式を、その **図形の方程式** という。

x, y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形を考えてみよう。

例 9 (1) 方程式 $3x - 2y + 4 = 0$ は

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

と変形できるから、傾きが $\frac{3}{2}$,

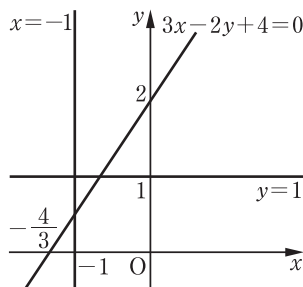
y 切片が 2 の直線を表す。

(2) 方程式 $y - 1 = 0$ は $y = 1$

と変形できるから、点 $(0, 1)$ を通り、 x 軸に平行な直線を表す。

(3) 方程式 $x + 1 = 0$ は $x = -1$

と変形できるから、点 $(-1, 0)$ を通り、 y 軸に平行な直線を表す。



問 12 次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

(1) $2x - 3y + 6 = 0$

(2) $y - 2 = 0$

(3) $x + 3 = 0$

一般に、 x, y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形は、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき、直線である。実際

$b \neq 0$ のとき、傾きが $-\frac{a}{b}$ の直線 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ を表す。

とくに $a = 0$ のときは、 x 軸に平行な直線 $y = -\frac{c}{b}$ を表す。

$b = 0$ のとき、 y 軸に平行な直線 $x = -\frac{c}{a}$ を表す。

逆に、すべての直線は、 x, y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ で表される。

直線の方程式のいろいろな形

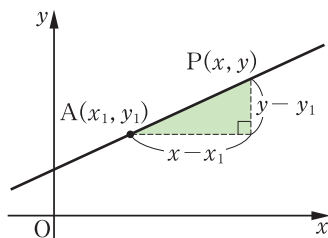
1 点 $A(x_1, y_1)$ を通り、傾き m の直線

この直線上の点 A 以外の任意の点

$P(x, y)$ に対して、傾き m は次の式で表される。

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

よって $y - y_1 = m(x - x_1)$



5

1 点を通り、傾き m の直線

点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

10

例 10 点 $(2, -5)$ を通り、傾き -4 の直線の方程式は

$$y - (-5) = -4(x - 2)$$

すなわち $y = -4x + 3$

問 13 点 $(-3, 4)$ を通り、次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 2

(2) 傾きが $-\frac{1}{3}$

15

2 異なる 2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を通る直線

(i) $x_1 \neq x_2$ のとき

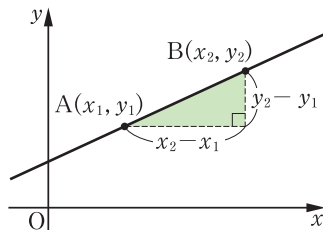
直線 AB の傾き m は

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

さらに点 (x_1, y_1) を通るから、

その方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



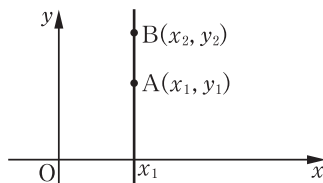
20

(ii) $x_1 = x_2$ のとき

直線 AB は y 軸に平行であるから、

その方程式は

$$x = x_1$$



5

2 点を通る直線

2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通る直線の方程式は

$$x_1 \neq x_2 \text{ のとき} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ のとき} \quad x = x_1$$

例 11 2 点 $A(-3, 2)$, $B(6, 8)$ を通る直線の方程式は

10

$$y - 2 = \frac{8 - 2}{6 - (-3)}\{x - (-3)\} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2}{3}x + 4$$

問 14 次の 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $A(2, -3)$, $B(4, 3)$ (2) $A(6, -1)$, $B(-3, 5)$

(3) $A(-2, 0)$, $B(-2, -6)$ (4) $A(4, 7)$, $B(-3, 7)$

問 15 3 点 $A(-2, 6)$, $B(7, 3)$, $C(a, a+4)$ があるとき、次の問に答えよ。

15

(1) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

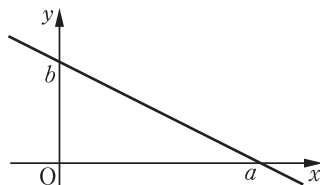
(2) 3 点 A, B, C が一直線上にあるように、定数 a の値を定めよ。

例 12 2 点 $(a, 0)$, $(0, b)$ を通る直線の方程式は、 $a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

である。これを変形すると

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



20

注意 直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の **x 切片** という。例 12 の直線では x 切片が a , y 切片が b である。

問 16 x 切片が 3, y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

4 2直線の関係

2直線の平行と垂直

2直線 $l: y = mx + n$

$l': y = m'x + n'$

が平行あるいは垂直となる条件を調べてみよう。

2直線が平行ならば傾きは等しく、傾きが等しければ2直線は平行である。

すなわち 2直線 l, l' が平行 $\iff m = m'$

なお、 $m = m', n = n'$ のとき、2直線は一致するが、このときも平行と考えることにする。

次に、 l, l' が座標軸に平行でないとして、 l と l' の垂直条件を考える。

l と l' が垂直であることは、これらと平行で原点 O を通る2直線

$y = mx, y = m'x$

が垂直であることと同じである。

この2直線上にそれぞれ点 $P(1, m), Q(1, m')$ をとると

$OP \perp OQ$

であるから、 $\triangle OPQ$ について三平方の定理により

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$$

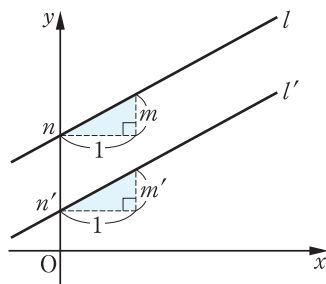
すなわち $(m - m')^2 = (1 + m^2) + \{1 + (m')^2\}$

これを整理すると $mm' = -1$

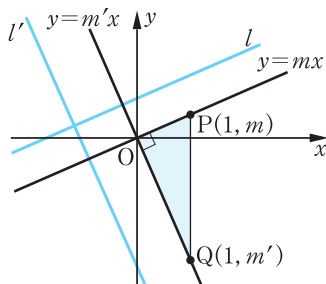
逆に、2直線の傾きの積が -1 のとき、それらは垂直である。

よって

2直線 l, l' が垂直 $\iff mm' = -1$



5



15

20

25

2 直線の平行条件・垂直条件

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について平行条件は $m = m'$ 垂直条件は $mm' = -1$

問17 次の直線のうち、互いに平行なもの、互いに垂直なものを選べ。

① $y = -2x + 5$

② $x - 3y + 7 = 0$

③ $6x + 2y + 3 = 0$

④ $6x + 3y = 1$

例題

2 直線の平行と垂直

2

点 $(-1, 2)$ を通り、直線 $3x + 2y - 9 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また、垂直な直線の方程式を求めよ。

解

直線 $3x + 2y - 9 = 0$ を l とすると、 l の傾きは $-\frac{3}{2}$ である。よって、 l に平行な直線の傾きは $-\frac{3}{2}$ であるから、点 $(-1, 2)$ を通り、 l に平行な直線の方程式は

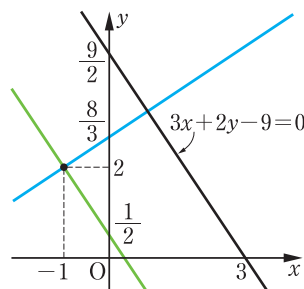
$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

すなわち $3x + 2y - 1 = 0$ …… 答また、 l に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{2}m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{2}{3}$$

点 $(-1, 2)$ を通り、 l に垂直な直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$$

すなわち $2x - 3y + 8 = 0$ …… 答問18 点 $(3, -1)$ を通り、直線 $2x - 5y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また、垂直な直線の方程式を求めよ。 → p.80 問題3問19 直線 $ax - 2y + 5 = 0$ が直線 $2x + y - 10 = 0$ に垂直であるとき、定数 a の値を求めよ。 → p.80 問題5

垂直条件を用いて、次の問題を解いてみよう。

例題

ある直線に関して対称な点

3

直線 $x + 2y - 10 = 0$ に関して、点 $A(1, 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

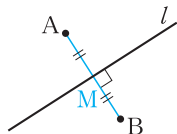
考え方

2点 A, B が、ある直線 l に関して対称である条件は

[1] 直線 AB は直線 l に垂直である

[2] 線分 AB の中点 M は直線 l 上にある

が成り立つことである。



解

直線 $x + 2y - 10 = 0$ を l とし、点 B の座標を (a, b) とする。

直線 l の傾きは $-\frac{1}{2}$

直線 AB の傾きは $\frac{b-2}{a-1}$

$l \perp AB$ であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-2}{a-1} = -1$$

すなわち

$$b = 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、線分 AB の中点 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ は l 上にあるから

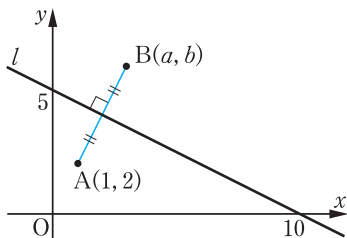
$$\frac{a+1}{2} + 2 \cdot \frac{b+2}{2} - 10 = 0$$

すなわち $a + 2b - 15 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

①, ② より

$$a = 3, b = 6$$

したがって、点 B の座標は $(3, 6)$



5

10

15

20

問20

直線 $4x - 2y - 3 = 0$ に関して、点 $A(4, -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

→ p.80 問題7

2 直線の交点

2 直線の交点の座標は、2 直線を表す方程式を連立させた連立 2 元 1 次方程式の解として得られる。

例題

3 直線が 1 点で交わる条件

4

2 直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ について、次の間に答えよ。

- (1) 2 直線の交点の座標を求めよ。
 (2) この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

を解くと

$$x=1, y=3$$

よって、求める交点の座標は

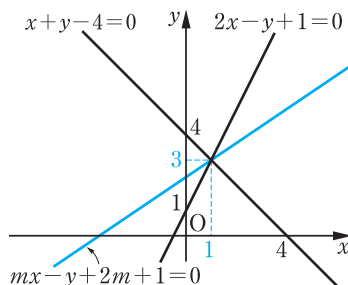
$$(1, 3)$$

(2) 直線 $mx-y+2m+1=0$ が点 $(1, 3)$ を通るから

$$m-3+2m+1=0$$

したがって

$$m=\frac{2}{3}$$



問21

次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1) $5x-4y+13=0$, $3x+y+1=0$

(2) $3x-y-6=0$, $6x+5y+2=0$

問22

3 直線

$$x-2y+8=0, \quad 2x+3y-5=0, \quad mx-y-2m+8=0$$

が 1 点で交わる時、定数 m の値を求めよ。

2直線の交点を通る直線

2直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ に対して, 方程式

$$k(x+y-4)+(2x-y+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。ただし, k は定数とする。

方程式 $\textcircled{1}$ が2直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。

$$x+y-4=0, 2x-y+1=0$$

を同時に満たす x, y の値の組 $x=1$, $y=3$ は k の値に関係なく $\textcircled{1}$ を満たす。

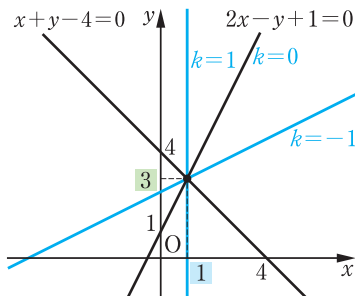
よって, $\textcircled{1}$ で表される図形は2直線の交点 $(1, 3)$ を通る。

また, $\textcircled{1}$ を変形すると

$$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$k+2$ と $k-1$ は同時には0にならないから, $\textcircled{2}$ の表す図形は直線である。

よって, $\textcircled{1}$ は2直線 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$ の交点 $(1, 3)$ を通る直線を表す。



例題

2直線の交点を通る直線

5

2直線 $3x+4y-17=0$, $x-2y+1=0$ の交点と点 $(2, 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解

k を定数として, 2直線の交点を通る直線の方程式を

$$k(3x+4y-17)+(x-2y+1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおく。①に点 $(2, 3)$ の座標 $x=2$, $y=3$ を代入すると

$$k(3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 17) + (2 - 2 \cdot 3 + 1) = 0 \quad \text{より} \quad k = 3$$

これを①に代入して整理すると, 求める直線の方程式は

$$x+y-5=0$$

問23

2直線 $4x-5y+5=0$, $x+2y-6=0$ の交点と点 $(1, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

点と直線の距離

直線 $ax + by + c = 0$ を l とし, $P(x_1, y_1)$ を l 上にない点とする。

直線 l と点 P の距離は, 点 P から直線 l に下ろした垂線 PH の長さである。これを求めてみよう。 $a \neq 0, b \neq 0$ とし,

5 点 H の座標を (x_2, y_2) とすると, 垂直条件から

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

よって
$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b}$$

この値を k とおくと

$$x_2 - x_1 = ak, \quad y_2 - y_1 = bk \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

10 すなわち $x_2 = x_1 + ak, \quad y_2 = y_1 + bk \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

また, $H(x_2, y_2)$ は直線 l 上の点であるから $ax_2 + by_2 + c = 0$
これと $\textcircled{2}$ より

$$a(x_1 + ak) + b(y_1 + bk) + c = 0$$

$$(a^2 + b^2)k + (ax_1 + by_1 + c) = 0$$

15 これより $k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より } PH^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (a^2 + b^2)k^2 \\ &= (a^2 + b^2) \cdot \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

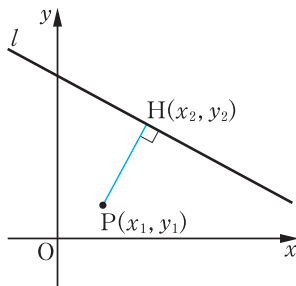
ゆえに
$$PH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

点と直線の距離

20 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

上の公式は, a, b の一方が 0 の場合も成り立つ。

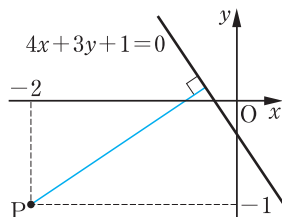


例 13 点 $P(-2, -1)$ と直線

$$4x + 3y + 1 = 0$$

の距離 d は

$$d = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$



5

問 24 次の点と直線の距離を求めよ。

- (1) 原点と直線 $x + 2y + 2 = 0$
- (2) 点 $(3, 4)$ と直線 $2x - 3y + 1 = 0$
- (3) 点 $(7, -1)$ と直線 $y = -3x + 6$

→ p.80 問題8

座標を用いた図形の性質の証明

座標を利用して、図形の性質を証明してみよう。

10

**応用
例題**

中線定理

6 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とすると

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

であることを証明せよ。

証明

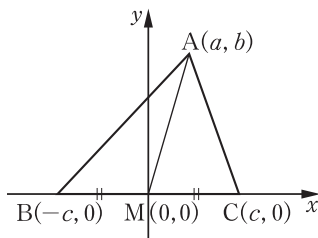
M を原点とし、直線 BC を x 軸にと
ると、三角形の頂点 A, B, C の座
標はそれぞれ

$$A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$$

とおける。このとき

$$AB^2 + AC^2 = \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\} = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$AM^2 + BM^2 = (a^2 + b^2) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ゆえに $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ 

15

問 25 $\triangle ABC$ の辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とすると

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

であることを証明せよ。

→ p.106 練習問題4

25

2 直線の垂直条件を利用して、三角形の頂点から対辺に下ろした 3 本の垂線が 1 点で交わることを証明してみよう。

応用
例題

3 本の垂線の交点

7

△ABC の 3 つの頂点から、それぞれの対辺に下ろした垂線 AL, BM, CN は 1 点で交わることを証明せよ。

証明

△ABC が直角三角形ならば、明らかに 3 本の垂線は直角の頂点で交わる。

次に、△ABC が直角三角形でないならば、直線 BC を x 軸、垂線 AL を y 軸にとると、 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ とおける。

ただし、 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ である。

直線 AC の傾きは $-\frac{a}{c}$ であるから、

垂線 BM の方程式は

$$y = \frac{c}{a}(x - b)$$

また、直線 AB の傾きは $-\frac{a}{b}$ であるから、垂線 CN の方程式は

$$y = \frac{b}{a}(x - c)$$

直線 BM, CN はともに y 軸上の点 $\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$ を通る。

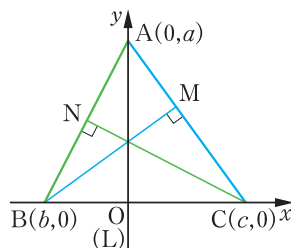
したがって、3 本の垂線 AL, BM, CN は 1 点で交わる。

例題 7 における 3 本の垂線の交点を △ABC の **垂心** という。

問 26 △ABC において、各辺の垂直二等分線は、1 点で交わることを証明せよ。

図形の性質を証明するには、座標を用いて次のようにするとよい。

- 1 座標軸を適当に設定し、図形の関係を数式で表す。
- 2 得られた数式を用いて計算する。
- 3 計算結果を図形的に解釈する。



問題

- 1 2点 $A(-2)$, $B(5)$ を結ぶ線分 AB を $3:4$ に内分する点を C , $3:4$ に外分する点を D とするとき, 線分 CD の長さを求めよ。 → p.106 練習問題1
- 2 $\triangle ABC$ の2つの頂点 A, B および重心 G の座標が $A(-7, -5)$, $B(2, -2)$, $G(-2, -1)$ であるとき, 頂点 C の座標を求めよ。 5
- 3 2点 $A(3, 4)$, $B(-2, 7)$ を通る直線を l とするとき, 次の直線の方程式を求めよ。
 (1) 点 $(1, 1)$ を通り, 直線 l に平行な直線
 (2) 点 $(1, 1)$ を通り, 直線 l に垂直な直線
- 4 2点 $A(1, -1)$, $B(3, -7)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。 10
- 5 2直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について, 次のことが成り立つことを証明せよ。ただし, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ とする。
 (1) 2直線が **平行** $\iff a_1b_2 - b_1a_2 = 0$
 (2) 2直線が **垂直** $\iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ 15
- 6[†] 2直線 $ax + 4y - 1 = 0$
 $x + (a - 3)y - 2 = 0$
 が平行になるような定数 a の値を求めよ。また, 垂直になるような定数 a の値を求めよ。
- 7 直線 $y = x$ に関して, 点 $A(p, q)$ と対称な点 B の座標を p, q で表せ。 20
 ただし, $p \neq q$ とする。
- 8 点 $A(2, 1)$ と直線 $5x + 12y + 4 = 0$ 上を動く点 P がある。線分 AP の長さの最小値を求めよ。 → p.106 練習問題3