1章　方程式・式と証明

1節　整式の乗法・除法と分数式

1　整式の乗法と因数分解

教科書 P.6

問 1　$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$
$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$
$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$
$=\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

問 2　(1)　$(x+1)^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$
$=\boldsymbol{x^3+3x^2+3x+1}$

(2)　$(3x-1)^3$
$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2-1^3$
$=\boldsymbol{27x^3-27x^2+9x-1}$

(3)　$(x+10y)^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 10y+3\cdot x\cdot(10y)^2+(10y)^3$
$=\boldsymbol{x^3+30x^2y+300xy^2+1000y^3}$

(4)　$(2x-5y)^3$
$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 5y+3\cdot 2x\cdot(5y)^2-(5y)^3$
$=\boldsymbol{8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3}$

教科書 P.7

問 3　$\boxed{3}$ の証明
$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$
$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$

$\boxed{4}$ の証明
公式 $\boxed{3}$ の b を $-b$ に置き換えて
$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=\{a+(-b)\}\{a^2-a(-b)+(-b)^2\}$
$=a^3+(-b)^3$
$=a^3-b^3$

問 4　(1)　$(x+7)(x^2-7x+49)$
$=(x+7)(x^2-x\cdot 7+7^2)$
$=x^3+7^3$
$=\boldsymbol{x^3+343}$

(2)　$(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$
$=(5x-3y)\{(5x)^2+5x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=(5x)^3-(3y)^3$
$=\boldsymbol{125x^3-27y^3}$

問 5　(1)　x^3+1
$=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$
$=\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}$

(2)　x^3-8
$=x^3-2^3$
$=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)$
$=\boldsymbol{(x-2)(x^2+2x+4)}$

(3)　$64x^3-125y^3$
$=(4x)^3-(5y)^3$
$=(4x-5y)\{(4x)^2+4x\cdot 5y+(5y)^2\}$
$=\boldsymbol{(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)}$

問 6　(1)　x^6-64y^6
$=(x^3)^2-(8y^3)^2$
$=(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$
$=\{x^3+(2y)^3\}\{x^3-(2y)^3\}$
$=(x+2y)\{x^2-x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$\times(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$
$=\boldsymbol{(x+2y)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)}$
$\boldsymbol{\times(x^2-2xy+4y^2)}$

(2)　x^6+7x^3-8
$=(x^3)^2+7x^3-8$
$=(x^3+8)(x^3-1)$
$=(x^3+2^3)(x^3-1^3)$
$=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$
$\times(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$
$=\boldsymbol{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)}$

2　二項定理

教科書 P.8

問 7　$(a+b)^5$
$=(a+b)(a+b)^4$
$=(a+b)(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$
$=a^5+4a^4b+\ 6a^3b^2+\ 4a^2b^3+\ ab^4$
$\quad+\ a^4b+\ 4a^3b^2+\ 6a^2b^3+4ab^4+b^5$
$=\boldsymbol{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

また，$(a+b)^4$ の展開式の係数から

1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1

となり，先に求めた $(a+b)^5$ の展開式の係数と一致する。

問 8

1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
$n=5$　1　5　10　10　5　1
$n=6$　1　6　15　20　15　6　1

よって，$(a+b)^6$ の展開式は
$\boldsymbol{a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3}$
$\boldsymbol{+15a^2b^4+6ab^5+b^6}$

教科書 P.10

問 9　公式 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$
に注意して，
(1)　$(3a+b)^4$

$= {}_4\mathrm{C}_0(3a)^4 + {}_4\mathrm{C}_1(3a)^3b^1 + {}_4\mathrm{C}_2(3a)^2b^2$
$\qquad + {}_4\mathrm{C}_3(3a)^1b^3 + {}_4\mathrm{C}_4b^4$
$\boldsymbol{= 81a^4 + 108a^3b + 54a^2b^2 + 12ab^3 + b^4}$

(2) $(2x-3y)^4$
$= {}_4\mathrm{C}_0(2x)^4 + {}_4\mathrm{C}_1(2x)^3(-3y)^1 + {}_4\mathrm{C}_2(2x)^2(-3y)^2$
$\qquad + {}_4\mathrm{C}_3(2x)^1(-3y)^3 + {}_4\mathrm{C}_4(-3y)^4$
$\boldsymbol{= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4}$

(3) $(2x^2+1)^5$
$= {}_5\mathrm{C}_0(2x^2)^5 + {}_5\mathrm{C}_1(2x^2)^4 + {}_5\mathrm{C}_2(2x^2)^3$
$\qquad + {}_5\mathrm{C}_3(2x^2)^2 + {}_5\mathrm{C}_4(2x^2)^1 + {}_5\mathrm{C}_5$
$\boldsymbol{= 32x^{10} + 80x^8 + 80x^6 + 40x^4 + 10x^2 + 1}$

問10 (1) $(3x^2+2)^6$ の展開式における一般項は
$${}_6\mathrm{C}_r(3x^2)^{6-r}\cdot 2^r$$
$$= {}_6\mathrm{C}_r3^{6-r}(x^2)^{6-r}\cdot 2^r$$
$$= {}_6\mathrm{C}_r3^{6-r}x^{2(6-r)}\cdot 2^r$$
$$= {}_6\mathrm{C}_r2^r\cdot 3^{6-r}x^{12-2r}$$
ここで，$12-2r=2$ となるのは，$r=5$ のときであるから，求める係数は
$${}_6\mathrm{C}_52^5\cdot 3^{6-5} = {}_6\mathrm{C}_12^5\cdot 3 = 6\cdot 2^5\cdot 3 = \mathbf{576}$$

(2) $(x-3y)^7$ の展開式における一般項は
$${}_7\mathrm{C}_rx^{7-r}(-3y)^r$$
$$= {}_7\mathrm{C}_rx^{7-r}(-3)^ry^r$$
$$= {}_7\mathrm{C}_r(-3)^rx^{7-r}y^r$$
ここで，$x^{7-r}y^r = x^2y^5$ となるのは，$r=5$ のときであるから，求める係数は
$${}_7\mathrm{C}_5(-3)^5 = {}_7\mathrm{C}_2(-3)^5$$
$$= 21\cdot(-243) = \mathbf{-5103}$$

教科書 P.11

問11 $\{(x+2y)+3z\}^5$ の展開式の一般項は
$${}_5\mathrm{C}_r(x+2y)^{5-r}(3z)^r$$
$$= {}_5\mathrm{C}_r3^r(x+2y)^{5-r}z^r \quad \cdots\cdots ①$$
z の次数に着目すると，x^2y^2z が現れるのは $r=1$ のときだけである。
このとき，① は ${}_5\mathrm{C}_13(x+2y)^4z$ となり，
$(x+2y)^4$ を展開したときの x^2y^2 の係数は
$${}_4\mathrm{C}_2x^2(2y)^2 = 6\cdot 2^2x^2y^2 = 24x^2y^2$$
より 24 である。
したがって，$\boldsymbol{x^2y^2z}$ **の係数は**
$${}_5\mathrm{C}_13\cdot 24 = 5\cdot 3\cdot 24 = \mathbf{360}$$
同様に，z の次数に着目すると，① で x^3y^2 になるのは $r=0$ のときだけである。
このとき，① は ${}_5\mathrm{C}_0(x+2y)^5$ となり，$(x+2y)^5$ を展開したときの x^3y^2 の係数は
$${}_5\mathrm{C}_2x^3(2y)^2 = 10\cdot 2^2x^3y^2 = 40x^3y^2$$
より 40 である。
したがって，$\boldsymbol{x^3y^2}$ **の係数は** ${}_5\mathrm{C}_0\cdot 40 = \mathbf{40}$

教科書 P.12

問12 展開式における $x^2y^3z^2$ の項は
$$\frac{7!}{2!3!2!}x^2(-y)^3(2z)^2$$
であるから，$x^2y^3z^2$ の係数は
$$\frac{7!}{2!3!2!}\cdot(-1)^3\cdot 2^2 = \mathbf{-840}$$

問13 $(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0a^n + {}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b$
$\qquad + {}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_nb^n \quad \cdots\cdots ①$

(1) ① において $a=1$，$b=2$ とおくと
$(1+2)^n = {}_n\mathrm{C}_01^n + {}_n\mathrm{C}_11^{n-1}\cdot 2^1$
$\qquad + {}_n\mathrm{C}_21^{n-2}\cdot 2^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n2^n$
よって
$$3^n = {}_n\mathrm{C}_0 + 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + 2^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

(2) ① において $a=1$，$b=-1$ とおくと
$(1-1)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1(-1) + {}_n\mathrm{C}_2(-1)^2$
$\qquad + {}_n\mathrm{C}_3(-1)^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n(-1)^n$
よって
$$0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-1)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$$

3 整式の除法

教科書 P.13

問14
$$\begin{array}{rr}
 & x+2 \\ \cline{2-2}
3x-4 \big) & 3x^2+2x+1 \\
 & 3x^2-4x \\ \cline{2-2}
 & 6x+1 \\
 & 6x-8 \\ \cline{2-2}
 & 9
\end{array}$$
商 $\boldsymbol{x+2}$，　**余り** $\mathbf{9}$
$$\boldsymbol{3x^2+2x+1 = (3x-4)(x+2)+9}$$

教科書 P.14

問15 (1)
$$\begin{array}{rr}
 & 2x-5 \\ \cline{2-2}
x^2-x-3 \big) & 2x^3-7x^2+3x+8 \\
 & 2x^3-2x^2-6x \\ \cline{2-2}
 & -5x^2+9x+8 \\
 & -5x^2+5x+15 \\ \cline{2-2}
 & 4x-7
\end{array}$$
商 $\boldsymbol{2x-5}$，　**余り** $\boldsymbol{4x-7}$

(2)
$$\begin{array}{rr}
 & 2x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
3x-2 \big) & 6x^3-x^2-5x+2 \\
 & 6x^3-4x^2 \\ \cline{2-2}
 & 3x^2-5x \\
 & 3x^2-2x \\ \cline{2-2}
 & -3x+2 \\
 & -3x+2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$
商 $\boldsymbol{2x^2+x-1}$，　**余り** $\mathbf{0}$

(3)
$$\begin{array}{rr}
 & 3x-2 \\ \cline{2-2}
x^2+3x-1 \big) & 3x^3+7x^2\qquad+5 \\
 & 3x^3+9x^2-3x \\ \cline{2-2}
 & -2x^2+3x+5 \\
 & -2x^2-6x+2 \\ \cline{2-2}
 & 9x+3
\end{array}$$
商 $\boldsymbol{3x-2}$，　**余り** $\boldsymbol{9x+3}$

(4)
$$\begin{array}{rr}
 & x^2+2x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+1 \big) & x^4+2x^3\qquad+3x+2 \\
 & x^4\qquad+x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^3-x^2+3x \\
 & 2x^3\qquad+2x \\ \cline{2-2}
 & -x^2+x+2 \\
 & -x^2\qquad-1 \\ \cline{2-2}
 & x+3
\end{array}$$

商　x^2+2x-1,　余り　$x+3$

教科書 P.15

問16　$3x^3+14x^2-4x+5$

$=B(3x-1)+(7x+3)$

が成り立つから

$$B(3x-1)=(3x^3+14x^2-4x+5)-(7x+3)$$
$$=3x^3+14x^2-11x+2$$

よって，$3x^3+14x^2-11x+2$ を $3x-1$ で割って

$$\begin{array}{r} x^2+5x-2 \\ 3x-1\,\big)\overline{3x^3+14x^2-11x+2} \\ \underline{3x^3-x^2} \\ 15x^2-11x \\ \underline{15x^2-5x} \\ -6x+2 \\ \underline{-6x+2} \\ 0 \end{array}$$

したがって　$\boldsymbol{B=x^2+5x-2}$

問17

$$\begin{array}{r} x^2-xy-2y^2 \\ x-y\,\big)\overline{x^3-2x^2y-xy^2+2y^3} \\ \underline{x^3-x^2y} \\ -x^2y-xy^2 \\ \underline{-x^2y+xy^2} \\ -2xy^2+2y^3 \\ \underline{-2xy^2+2y^3} \\ 0 \end{array}$$

商　$\boldsymbol{x^2-xy-2y^2}$,　余り　$\boldsymbol{0}$

4 分数式とその計算

教科書 P.16

問18 (1)　$\dfrac{12a^4bc^2}{15a^3b^3c}=\boldsymbol{\dfrac{4ac}{5b^2}}$

(2)　$\dfrac{2x^2+3x-2}{4x^2-1}=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(2x+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{2x+1}}$

(3)　$\dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x^2-x+1}{x+3}}$

教科書 P.17

問19 (1)　$\dfrac{x^2-3x}{x^2+x-2}\times\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

$=\dfrac{x(x-3)}{(x+2)(x-1)}\times\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x-3}{(x+2)^2}}$

(2)　$\dfrac{x^3-8}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

$=\dfrac{x^3-8}{x^2+4x+4}\times\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)^2}\times\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{(x+1)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-1)}}$

問20 (1)　$\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+5x+6}-\dfrac{x^2+x-3}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{(x^2+3x+1)-(x^2+x-3)}{x^2+5x+6}$

$=\dfrac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{x+3}}$

(2)　$\dfrac{x-1}{x^2-x}+\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}$

$=\dfrac{(x-1)+(x^2-x+1)}{x^2-x}$

$=\dfrac{x^2}{x(x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-1}}$

教科書 P.18

問21 (1)　$\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-4}$

$=\dfrac{x-4}{(x+3)(x-4)}+\dfrac{3(x+3)}{(x+3)(x-4)}$

$=\dfrac{(x-4)+3(x+3)}{(x+3)(x-4)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4x+5}{(x+3)(x-4)}}$

(2)　$\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{3x}{2x^2+x-1}$

$=\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{3x}{(x+1)(2x-1)}$

$=\dfrac{2x(2x-1)-3x(x-1)}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\dfrac{x^2+x}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)(2x-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{x}{(x-1)(2x-1)}}$

問22 (1)　$\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$

$=(a+2)\div\left(a-\dfrac{2}{a+1}\right)$

$=(a+2)\div\dfrac{a(a+1)-2}{a+1}$

$=(a+2)\div\dfrac{a^2+a-2}{a+1}$

$=(a+2)\times\dfrac{a+1}{(a+2)(a-1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{a+1}{a-1}}$

〔別解〕　$\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$

$=\dfrac{(a+2)\times(a+1)}{\left(a-\dfrac{2}{a+1}\right)\times(a+1)}$

$=\dfrac{(a+2)(a+1)}{a(a+1)-2}$

$$= \frac{(a+2)(a+1)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1}$$

(2) $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}$

$$= \left(1-\frac{x+y}{x-y}\right) \div \left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$= \frac{(x-y)-(x+y)}{x-y} \div \frac{(x-y)+(x+y)}{x-y}$$

$$= \frac{-2y}{x-y} \times \frac{x-y}{2x}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{y}{x}}$$

〔別解〕 $\dfrac{1-\dfrac{x+y}{x-y}}{1+\dfrac{x+y}{x-y}}$

$$= \frac{\left(1-\dfrac{x+y}{x-y}\right)\times(x-y)}{\left(1+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\times(x-y)}$$

$$= \frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)+(x+y)}$$

$$= \frac{-2y}{2x} = -\frac{y}{x}$$

問題

教科書 P.19

1 (1) $(2a-3b)^3$

$= (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot 3b + 3\cdot 2a\cdot(3b)^2 - (3b)^3$

$= \boldsymbol{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3}$

(2) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$

$= (4a-3b)\{(4a)^2 + 4a\cdot 3b + (3b)^2\}$

$= (4a)^3 - (3b)^3$

$= \boldsymbol{64a^3 - 27b^3}$

2 (1) $x^3y^3 - 27z^3$

$= (xy)^3 - (3z)^3$

$= (xy-3z)\{(xy)^2 + xy\cdot 3z + (3z)^2\}$

$= \boldsymbol{(xy-3z)(x^2y^2+3xyz+9z^2)}$

(2) $x^3+y^3+3y^2+3y+1$

$= x^3 + (y+1)^3$

$= \{x+(y+1)\}\{x^2 - x(y+1) + (y+1)^2\}$

$= \boldsymbol{(x+y+1)(x^2-xy-x+y^2+2y+1)}$

3 (1) 展開式の一般項は

$${}_{12}\mathrm{C}_r (ax)^{12-r}(-b)^r$$

$$= {}_{12}\mathrm{C}_r a^{12-r}(-b)^r x^{12-r}$$

x^{11} が現れるのは $12-r=11$ より，$r=1$ のときである。

よって，$\boldsymbol{x^{11}}$ **の係数は**

$${}_{12}\mathrm{C}_1 a^{11}(-b)^1 = \boldsymbol{-12a^{11}b}$$

x^2 が現れるのは $12-r=2$ より，$r=10$ のときである。

よって，$\boldsymbol{x^2}$ **の係数は**

$${}_{12}\mathrm{C}_{10} a^2(-b)^{10} = {}_{12}\mathrm{C}_2 a^2b^{10} = \boldsymbol{66a^2b^{10}}$$

(2) $\{(x-2y)+z^2\}^7$ の展開式の一般項は

$${}_7\mathrm{C}_r (x-2y)^{7-r}(z^2)^r$$

$x^2y^3z^4$ が現れるのは $r=2$ のときだけで

$${}_7\mathrm{C}_2 (x-2y)^5(z^2)^2$$

$(x-2y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の係数は

$${}_5\mathrm{C}_3 x^2(-2y)^3 = {}_5\mathrm{C}_2(-2)^3x^2y^3 = -80x^2y^3$$

より -80 である。

したがって，$x^2y^3z^4$ の係数は

$${}_7\mathrm{C}_2\cdot(-80) = \boldsymbol{-1680}$$

〔別解〕展開式における $x^2y^3z^4$ の項は

$$\frac{7!}{2!3!2!}x^2(-2y)^3(z^2)^2$$

であるから，$x^2y^3z^4$ の係数は

$$\frac{7!}{2!3!2!}\cdot(-2)^3 = -1680$$

4 (1)

$$
\begin{array}{r}
4x + 1 \\
3x^2-x-1\,\big)\; 12x^3 - x^2 + 2 \\
12x^3 - 4x^2 - 4x \\
\hline
3x^2 + 4x + 2 \\
3x^2 - x - 1 \\
\hline
5x + 3
\end{array}
$$

商　$4x+1$，　余り　$5x+3$

(2)

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + x - \frac{1}{3} \\
3x-1\,\big)\; 6x^3 + x^2 - 2x + 1 \\
6x^3 - 2x^2 \\
\hline
3x^2 - 2x \\
3x^2 - x \\
\hline
-x + 1 \\
-x + \frac{1}{3} \\
\hline
\frac{2}{3}
\end{array}
$$

商　$2x^2+x-\dfrac{1}{3}$，　余り　$\dfrac{2}{3}$

(3)

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\
2x-6\,\big)\; x^3 - 5x^2 + 8x + 1 \\
x^3 - 3x^2 \\
\hline
-2x^2 + 8x \\
-2x^2 + 6x \\
\hline
2x + 1 \\
2x - 6 \\
\hline
7
\end{array}
$$

商　$\dfrac{1}{2}x^2-x+1$，　余り　7

5 $A = (2x^2+4x-3)(x-2)+(3x+1)$

$= \boldsymbol{2x^3-8x+7}$

〔注意〕

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x^2 + 4x - 3 \\
\times) & x - 2 \\
\hline
 & 2x^3 + 4x^2 - 3x \\
 & -4x^2 - 8x + 6 \\
\hline
 & 2x^3 - 11x + 6
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rr} & 2x^3 \quad -11x+6 \\ +) & 3x+1 \\ \hline & 2x^3 \quad -\ \ 8x+7 \end{array}$$

6 (1) $\dfrac{6x^2+13xy-5y^2}{2x^2-xy-3y^2} \div \dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$

$= \dfrac{(3x-y)(2x+5y)}{(2x-3y)(x+y)} \div \dfrac{(3x-y)(x+y)}{(2x-3y)(x-y)}$

$= \dfrac{(3x-y)(2x+5y)}{(2x-3y)(x+y)} \times \dfrac{(2x-3y)(x-y)}{(3x-y)(x+y)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{(2x+5y)(x-y)}{(x+y)^2}}$

(2) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+3x+9} \times \dfrac{x^3-27}{3x+9} \div \dfrac{x^2-9}{3x}$

$= \dfrac{(x+3)^2}{x^2+3x+9} \times \dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3(x+3)} \times \dfrac{3x}{(x+3)(x-3)}$

$= \boldsymbol{x}$

(3) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2+1}$

$= \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2+1}$

$= \dfrac{2}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2+1}$

$= \dfrac{2(x^2+1)-2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$= \dfrac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{4}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x+2}\right) \div \left(\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+3}\right)$

$= \dfrac{(x+2)-2(x+1)}{(x+1)(x+2)} \div \dfrac{2(x+3)-3(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$= \dfrac{-x}{(x+1)(x+2)} \times \dfrac{(x+2)(x+3)}{-x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x+3}{x+1}}$

(5) $1+\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{(a+1)+1}{a+1} = \dfrac{a+2}{a+1}$

よって

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{a+2}}$

$= 1 \div \left(1+\dfrac{a+1}{a+2}\right)$

$= 1 \div \dfrac{a+2+a+1}{a+2}$

$= 1 \div \dfrac{2a+3}{a+2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{a+2}{2a+3}}$

〔別解〕 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a+1}}}$

$= \dfrac{1}{1+\dfrac{1\times(a+1)}{\left(1+\dfrac{1}{a+1}\right)\times(a+1)}}$

$= \dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{(a+1)+1}}$

$= \dfrac{1\times(a+2)}{\left(1+\dfrac{a+1}{a+2}\right)\times(a+2)}$

$= \dfrac{a+2}{(a+2)+(a+1)} = \dfrac{a+2}{2a+3}$

2節 2次方程式

1 複素数とその演算

教科書 P.20

問1 (1) **実部 -1, 虚部 $\sqrt{3}$**

(2) **実部 2, 虚部 -1**

(3) **実部 0, 虚部 $\sqrt{7}$**

(4) **実部 -5, 虚部 0**

教科書 P.21

問2 (1) x, y が実数であるから, $3x+2y$, $-3y$ も実数である。

したがって $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 9=-3y \end{cases}$

これを解いて $\boldsymbol{x=4,\ y=-3}$

(2) x, y が実数であるから, $3x-y-3$, $7x-2y-8$ も実数である。

したがって $\begin{cases} 3x-y-3=0 \\ 7x-2y-8=0 \end{cases}$

これを解いて $\boldsymbol{x=2,\ y=3}$

問3 (1) $8i-7i=\boldsymbol{i}$

(2) $-5i\cdot(-4i)=20i^2=20\cdot(-1)=\boldsymbol{-20}$

(3) $(-\sqrt{2}\,i)^2=2i^2=2\cdot(-1)=\boldsymbol{-2}$

(4) $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=\boldsymbol{1}$

教科書 P.22

問4 (1) $(4+5i)+(3-2i)=\boldsymbol{7+3i}$

(2) $(2-4i)-(1-i)=\boldsymbol{1-3i}$

(3) $(5+3i)(2-7i)=10-35i+6i-21i^2$

$=10-29i-21\cdot(-1)$

$=\boldsymbol{31-29i}$

(4) $(4+3i)(4-3i)=16-9i^2$

$=16-9\cdot(-1)=\boldsymbol{25}$

問5 (1) $\boldsymbol{3-2i}$ (2) $\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}\,i}$ (3) $\boldsymbol{-4}$

(4) $\boldsymbol{-3i}$

問6 (1) $\dfrac{1}{3-i}=\dfrac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i}{9-i^2}$

$=\dfrac{3+i}{9+1}=\dfrac{3+i}{10}=\boldsymbol{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}i}$

(2) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-2i-1}{1+1}$

$=\dfrac{-2i}{2}=\boldsymbol{-i}$

(3) $\dfrac{2+i}{1+2i}=\dfrac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\dfrac{2-4i+i-2i^2}{1-4i^2}=\dfrac{2-3i+2}{1+4}$

$=\dfrac{4-3i}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i}$

(4) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=\boldsymbol{-i}$

教科書 P.23

問 7 $i^2=-1$ より　　$x^2=5i^2$

$x^2-5i^2=0$

$(x-\sqrt{5}\,i)(x+\sqrt{5}\,i)=0$

よって

$x-\sqrt{5}\,i=0$　または　$x+\sqrt{5}\,i=0$

したがって　　$x=\pm\sqrt{5}\,i$

すなわち，-5 の平方根は $\boldsymbol{\sqrt{5}\,i}$ **と** $\boldsymbol{-\sqrt{5}\,i}$

である。

教科書 P.24

問 8 (1) $\sqrt{-8}=\sqrt{8}\,i=\boldsymbol{2\sqrt{2}\,i}$

(2) $-\sqrt{-50}=-\sqrt{50}\,i=\boldsymbol{-5\sqrt{2}\,i}$

(3) $\sqrt{-\dfrac{7}{16}}=\sqrt{\dfrac{7}{16}}\,i=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{4}i}$

問 9 $\sqrt{-18}=\sqrt{18}\,i=3\sqrt{2}\,i$

$-\sqrt{-18}=-\sqrt{18}\,i=-3\sqrt{2}\,i$

よって　　$\boldsymbol{3\sqrt{2}\,i}$ **と** $\boldsymbol{-3\sqrt{2}\,i}$

問10 (1) $\sqrt{-48}-\sqrt{-12}=\sqrt{48}\,i-\sqrt{12}\,i$

$=4\sqrt{3}\,i-2\sqrt{3}\,i=\boldsymbol{2\sqrt{3}\,i}$

(2) $\sqrt{-28}\times\sqrt{-35}=2\sqrt{7}\,i\times\sqrt{35}\,i$

$=14\sqrt{5}\,i^2=\boldsymbol{-14\sqrt{5}}$

(3) $\dfrac{6}{\sqrt{-4}}=\dfrac{6}{2i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=\dfrac{3i}{-1}=\boldsymbol{-3i}$

2 解の公式

教科書 P.25

問11 (1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}}$

(2) $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5}$

$=\dfrac{6\pm\sqrt{-44}}{10}=\dfrac{6\pm2\sqrt{11}\,i}{10}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3\pm\sqrt{11}\,i}{5}}$

〔別解〕$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-5\cdot4}}{5}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{-11}}{5}=\dfrac{3\pm\sqrt{11}\,i}{5}$

(3) $x=\dfrac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}}$

(4) 整理して　　$4x^2-4x+1=0$

$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

〔別解〕$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1}}{4}=\dfrac{1}{2}$

教科書 P.27

問12 (1) $D=(-11)^2-4\cdot2\cdot10=41>0$

であるから，**異なる 2 つの実数解をもつ。**

(2) $\dfrac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot4=-3<0$

であるから，**異なる 2 つの虚数解をもつ。**

(3) $\dfrac{D}{4}=14^2-49\cdot4=0$

であるから，**重解をもつ。**

問13 この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(3k-1)^2-4\cdot1\cdot(2k^2-1)$

$=k^2-6k+5$

$=(k-1)(k-5)$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$　すなわち　$\boldsymbol{k<1,\ 5<k}$ **のとき**
異なる 2 つの実数解

$D=0$　すなわち　$\boldsymbol{k=1,\ 5}$ **のとき**
重解

$D<0$　すなわち　$\boldsymbol{1<k<5}$ **のとき**
異なる 2 つの虚数解

問14 2 次方程式 $x^2+2kx+2k+3=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-1\cdot(2k+3)$

$=k^2-2k-3$

$=(k+1)(k-3)$

重解をもつ条件は $D=0$ であるから

$(k+1)(k-3)=0$

よって　　$\boldsymbol{k=-1,\ 3}$

また，解の公式により，$D=0$ のとき重解は

$x=\dfrac{-k}{1}=-k$

であるから，

$\boldsymbol{k=-1}$ **のとき**　　$\boldsymbol{x=-(-1)=1}$

$\boldsymbol{k=3}$ **のとき**　　$\boldsymbol{x=-3}$

3 解と係数の関係

教科書 P.28

問15 (1)　2つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\ \alpha\beta=-2$$

よって　**和 $-\frac{3}{2}$, 積 -2**

(2)　2つの解を α, β とすると

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=2$

よって　**和 1, 積 2**

教科書 P.29

問16 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$ であるから

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4^2-2\cdot5=\mathbf{6}$

(2)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=4^2-4\cdot5=\mathbf{-4}$

(3)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=4^3-3\cdot5\cdot4=\mathbf{4}$

(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\mathbf{\dfrac{6}{5}}$

問17 2つの解を α, $\alpha+1$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+(\alpha+1)=-\frac{m}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha\cdot(\alpha+1)=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

② より　$4\alpha^2+4\alpha-3=0$
$(2\alpha-1)(2\alpha+3)=0$

よって　$\alpha=\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}$

したがって，① より

$m=-4(2\alpha+1)=\mathbf{-8,\ 8}$

教科書 P.30

問18 (1)　$x^2-x-1=0$ の解は　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって

x^2-x-1

$$=\left(\boldsymbol{x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(\boldsymbol{x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

(2)　$3x^2-2x+1=0$ の解は　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}i}{3}$

よって

$3x^2-2x+1$

$$=3\left(\boldsymbol{x-\frac{1+\sqrt{2}i}{3}}\right)\left(\boldsymbol{x-\frac{1-\sqrt{2}i}{3}}\right)$$

(3)　$x^2-5=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{5}$

よって　$x^2-5=\mathbf{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}$

(4)　$x^2+4=0$ の解は　$x=\pm2i$

よって　$x^2+4=\mathbf{(x-2i)(x+2i)}$

教科書 P.31

問19 (1)　$\mathbf{(x^2+2)(x^2-3)}$

(2)　$\mathbf{(x^2+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$

(3)　$\mathbf{(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$

問20 (1)　$1+(-2)=-1$, $1\cdot(-2)=-2$ より

$\mathbf{x^2+x-2=0}$

(2)　$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$ より

$\mathbf{x^2-4x-1=0}$

(3)　$(-5+i)+(-5-i)=-10$

$(-5+i)(-5-i)=26$ より

$\mathbf{x^2+10x+26=0}$

教科書 P.32

問21 (1)　2数は2次方程式 $x^2-x+1=0$ の2つの解であるから

$$\mathbf{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}\ \text{と}\ \mathbf{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}$$

(2)　2数は2次方程式 $x^2+8x+11=0$ の2つの解であるから

$$\mathbf{-4+\sqrt{5}}\ \text{と}\ \mathbf{-4-\sqrt{5}}$$

問22 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

(1)　$(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2$
$=2\cdot(-2)-2=-6$

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$
$=4\cdot3-2\cdot(-2)+1=17$

よって，求める2次方程式の1つは

$\mathbf{x^2+6x+17=0}$

(2)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{3}$

よって，求める2次方程式の1つは

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

両辺に3を掛けて

$\mathbf{3x^2+2x+1=0}$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=-2$

$\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=3^2=9$

よって，求める2次方程式の1つは

$\mathbf{x^2+2x+9=0}$

教科書 P.34

問23 2つの解を α, β，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1\cdot(-2k+6)$$
$$=k^2+4k-5=(k+5)(k-1)$$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-2(k+1)$, $\alpha\beta=-2k+6$

(1)　$\dfrac{D}{4}>0$ より　$k<-5,\ 1<k$　$\cdots\cdots$ ①

$\alpha+\beta<0$ より　$k>-1$　$\cdots\cdots$ ②

$\alpha\beta>0$ より　$k<3$　$\cdots\cdots$ ③

①, ②, ③ より　$\mathbf{1<k<3}$

(2)　$\alpha\beta<0$ より　$\mathbf{k>3}$

問題

教科書 P.35

7 $(2+3i)a+(3-i)b=7+5i$ より

$$(2a+3b)+(3a-b)i=7+5i$$

a，b は実数であるから

$$\begin{cases}2a+3b=7\\3a-b=5\end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

8 (1) $\sqrt{-98}-\sqrt{-72}+\sqrt{-50}$

$=7\sqrt{2}\,i-6\sqrt{2}\,i+5\sqrt{2}\,i=\boldsymbol{6\sqrt{2}\,i}$

(2) $(5-2i)^2=25-20i+4i^2$

$=\boldsymbol{21-20i}$

(3) $\dfrac{2+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{2+i}=\dfrac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}$

$=\dfrac{(3+4i)+(3-4i)}{5}=\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$

(4) $\dfrac{(2-i)^2}{2+3i}=\dfrac{3-4i}{2+3i}$

$=\dfrac{(3-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\dfrac{-6-17i}{13}=\boldsymbol{-\dfrac{6}{13}-\dfrac{17}{13}i}$

9 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$　(a，b，c，d は実数) とおくと

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$

$=\overline{(a+c)+(b+d)i}$

$=(a+c)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)$

$=(a+c)-(b+d)i$

よって　　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{(a+bi)\cdot(c+di)}$

$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\ \overline{\beta}=(a-bi)(c-di)$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

よって　　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$

(参考) (1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ の他に

(3) a が実数のとき　　$\overline{a\alpha}=a\overline{\alpha}$

(2) において，$\beta=\alpha$ とすると

(2)′ $\overline{\alpha^2}=\overline{\alpha}\ \overline{\alpha}$

一般に　$\overline{\alpha^n}=\underbrace{\overline{\alpha}\ \overline{\alpha}\cdots\overline{\alpha}}_{n\text{ 個}}=(\overline{\alpha})^n$

が成り立つ。

これを用いると，教科書 p.42 の「係数が実数である高次方程式が虚数解 α をもつならば，それと共役な $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である」ことを証明することができる。

3 次方程式について証明してみよう。

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ が虚数解 α を解にもつとすると

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$

複素数 z が $z=0$ のとき，$\overline{z}=0$ であるから

$$\overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=0$$

(1) の性質を用いて

$$\overline{a\alpha^3}+\overline{b\alpha^2}+\overline{c\alpha}+\overline{d}=0$$

(3) の性質を用いて

$$a\overline{\alpha^3}+b\overline{\alpha^2}+c\overline{\alpha}+d=0$$

(2)′ の性質を用いて

$$a\overline{\alpha}\ \overline{\alpha}\ \overline{\alpha}+b\overline{\alpha}\ \overline{\alpha}+c\overline{\alpha}+d=0$$

すなわち

$$a(\overline{\alpha})^3+b(\overline{\alpha})^2+c\overline{\alpha}+d=0$$

これは α と共役な虚数 $\overline{\alpha}$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解であることを示している。

10 (1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\,i=6i$

$\sqrt{ab}=\sqrt{-36}=6i$

よって　　$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$

また　　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,i}=\dfrac{1}{2i}=-\dfrac{i}{2}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{i}{2}$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{2}\,i\cdot\sqrt{5}\,i=-\sqrt{10}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{10}$

よって　　$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}}$

また　　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

11 (1) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{14}\,i}{4}}$

(2) $(x^2-10x+25)+(x^2+4x+4)=x^2+6x+9$

整理して　　$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=2,\ 10}$

12 判別式を D とすると，虚数解をもつ条件は $D<0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-3k-8)$

$=-k^2+6k+16=-(k+2)(k-8)$

よって　　$-(k+2)(k-8)<0$

1章

$(k+2)(k-8)>0$

ゆえに　$\boldsymbol{k<-2,\ 8<k}$

13 解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$$=2^2-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(2) $$\frac{\beta}{\alpha-2}+\frac{\alpha}{\beta-2}=\frac{\beta(\beta-2)+\alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\beta-2)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4}$$

$$=\frac{2^2-2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot2}{\frac{1}{2}-2\cdot2+4}=\boldsymbol{-2}$$

(3) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2$$

$$=\left(2^2-2\cdot\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{17}{2}}$$

14 (1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-m,\ \alpha\beta=1$

よって

$(\alpha-3)+(\beta-3)=(\alpha+\beta)-6$

$=-m-6$

$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=3m+10$

したがって，$\alpha-3,\ \beta-3$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$\boldsymbol{x^2+(m+6)x+3m+10=0}$

(2) (1) で求めた 2 次方程式の 2 つの解を $\alpha',\ \beta'$，すなわち

$\alpha'=\alpha-3,\ \beta'=\beta-3$

とおくと，$\alpha,\ \beta$ がともに 3 より小さくなるためには，$\alpha',\ \beta'$ がともに負の実数であればよいから，2 次方程式 $x^2+(m+6)x+3m+10=0$ の判別式を D とすると

$D\geqq0$

$\alpha'+\beta'<0$

$\alpha'\beta'>0$

となればよい。

$D=(m+6)^2-4(3m+10)$

$=m^2-4\geqq0$

よって　$m\leqq-2,\ 2\leqq m$　……①

$\alpha'+\beta'=-(m+6)<0$ より

$m>-6$　……②

$\alpha'\beta'=3m+10>0$ より

$m>-\dfrac{10}{3}$　……③

①，②，③ より

$$\boldsymbol{-\frac{10}{3}<m\leqq-2,\ 2\leqq m}$$

3節 高次方程式

1 因数定理

教科書 P.36

問 1 (1) $P(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)+1=\boldsymbol{-1}$

(2) $P(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-3\cdot\sqrt{3}+1=\boldsymbol{1}$

(3) $P\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)+1=\boldsymbol{\dfrac{1}{27}}$

問 2 第 1 式を $P(x)$ とする。

(1) $x-2$ で割った余りは

$P(2)=2\cdot2^3-2^2+3=\boldsymbol{15}$

(2) $x+4$ で割った余りは

$P(-4)=(-4)^3+2\cdot(-4)^2-6\cdot(-4)+1$

$=\boldsymbol{-7}$

教科書 P.37

問 3 (1) 整式 $P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$x=-\dfrac{b}{a}$ を代入すると

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=0\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=R$$

よって　$R=P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

(2) $P(x)=4x^3-2x^2-7$ とおくと，$2x-3$ で割った余りは

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-7=\boldsymbol{2}$$

問 4 剰余の定理により，$P(-3)=-5$ であるから

$(-3)^3-3a\cdot(-3)+4=-5$

よって　$\boldsymbol{a=2}$

問 5 $P(x)$ を $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x-4)(x+3)Q(x)+ax+b$

剰余の定理により

$P(4)=4a+b=1$

$P(-3)=-3a+b=8$

これを解いて　$a=-1,\ b=5$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{-x+5}$

教科書 P.38

問 6 (1) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とする。

$P(3)=3^3-2\cdot3^2-5\cdot3+6=0$

$P(-3)=(-3)^3-2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+6$

$=-24\neq0$

よって，$x-3$ を因数にもつが，$x+3$ を因数にもたない。

(2) $P(x)=2x^3+x^2-18x-9$ とする。

$P(3)=2\cdot3^3+3^2-18\cdot3-9=0$

$P(-3)=2\cdot(-3)^3+(-3)^2-18\cdot(-3)-9$

$=0$

よって，$x-3$ も $x+3$ も因数にもつ。

問7 (1) $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ とおくと,
$P(1)=0$ より, $x-1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2}
x-1 \big) & x^3-6x^2+11x-6 \\
 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
 & -5x^2+11x \\
 & -5x^2+5x \\ \cline{2-2}
 & 6x-6 \\
 & 6x-6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕教科書 p.56 の組立除法を用いると

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
+) & & 1 & -5 & 6 \\ \hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より
$x^3-6x^2+11x-6$
$=(x-1)(x^2-5x+6)$
$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) $P(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと,
$P(1)=0$ より, $x-1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+4x+4 \\ \cline{2-2}
x-1 \big) & x^3+3x^2 \qquad -4 \\
 & x^3-x^2 \\ \cline{2-2}
 & 4x^2 \\
 & 4x^2-4x \\ \cline{2-2}
 & 4x-4 \\
 & 4x-4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕組立除法を用いると

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
+) & & 1 & 4 & 4 \\ \hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より
x^3+3x^2-4
$=(x-1)(x^2+4x+4)$
$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2}$

(3) $P(x)=3x^3+4x^2-17x-6$ とおくと,
$P(2)=0$ より, $x-2$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 3x^2+10x+3 \\ \cline{2-2}
x-2 \big) & 3x^3+4x^2-17x-6 \\
 & 3x^3-6x^2 \\ \cline{2-2}
 & 10x^2-17x \\
 & 10x^2-20x \\ \cline{2-2}
 & 3x-6 \\
 & 3x-6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕組立除法を用いると

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 3 & 4 & -17 & -6 \\
+) & & 6 & 20 & 6 \\ \hline
 & 3 & 10 & 3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より
$3x^3+4x^2-17x-6$
$=(x-2)(3x^2+10x+3)$
$=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(3x+1)}$

2 簡単な高次方程式

教科書 P.39

問8 (1) $x^3-8=0$ より
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$
これを解くと
$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i}$

(2) $x^3+1=0$ より
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
これを解くと
$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

(3) $x^4+8x=0$ より
$x(x+2)(x^2-2x+4)=0$
これを解くと
$\boldsymbol{x=0,\ -2,\ 1\pm\sqrt{3}i}$

問9 (1) 1 の 3 乗根は 1, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

(i) $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると
$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
となり, ω^2 はもう 1 つの 1 の虚数の 3 乗根となる。

(ii) $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とすると
$\omega^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ となり, ω^2 はもう 1 つの 1 の虚数の 3 乗根となる。

(i), (ii) より, ω を $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ としても,
$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ としても, 1 の 3 乗根は 1, ω, ω^2 の 3 つである。

(2) ω は $x^2+x+1=0$ の解であるから
$\omega^2+\omega+1=0$

〔別解〕(1) より, ω が $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ にしろ
$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ にしろ
$\omega^2+\omega+1$
$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1=0$

教科書 P.40

問10 (1) $(x^2)^2-3x^2+2=0$
$(x^2-1)(x^2-2)=0$
よって　$x^2=1,\ 2$
ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm\sqrt{2}}$

(2) $(x^2)^2+3x^2-28=0$
$(x^2-4)(x^2+7)=0$

よって　$x^2=4,\ -7$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \pm\sqrt{7}\,i}$

問11 (1)　$P(x)=x^3-8x+8$ とおくと，

$P(2)=0$ より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rr}
 & x^2+2x-4 \\ \cline{2-2}
x-2\,) & x^3\qquad\;\; -8x+8 \\
 & x^3-2x^2\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & 2x^2-8x\quad \\
 & 2x^2-4x\quad \\ \cline{2-2}
 & -4x+8 \\
 & -4x+8 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 0 & -8 & 8 \\
+) & & 2 & 4 & -8 \\ \hline
 & 1 & 2 & -4 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$P(x)=(x-2)(x^2+2x-4)$

よって

$(x-2)(x^2+2x-4)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{5}}$

(2)　$P(x)=6x^3+4x^2-x+1$ とおくと，

$P(-1)=0$ より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rr}
 & 6x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
x+1\,) & 6x^3+4x^2-x+1 \\
 & 6x^3+6x^2\qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & -2x^2-x\qquad \\
 & -2x^2-2x\qquad \\ \cline{2-2}
 & x+1 \\
 & x+1 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 6 & 4 & -1 & 1 \\
+) & & -6 & 2 & -1 \\ \hline
 & 6 & -2 & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$P(x)=(x+1)(6x^2-2x+1)$

よって

$(x+1)(6x^2-2x+1)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{5}\,i}{6}}$

教科書 P.41

問12 (1)　$P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ とおく。

$P(2)=2^4-2\cdot2^3-7\cdot2^2+8\cdot2+12=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rr}
 & x^3\qquad -7x-6 \\ \cline{2-2}
x-2\,) & x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \\
 & x^4-2x^3\qquad\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -7x^2+8x\qquad \\
 & -7x^2+14x\qquad \\ \cline{2-2}
 & -6x+12 \\
 & -6x+12 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\
+) & & 2 & 0 & -14 & -12 \\ \hline
 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$P(x)=(x-2)(x^3-7x-6)$

ここで，$Q(x)=x^3-7x-6$ とおくと

$Q(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6=0$

であるから，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rr}
 & x^2-x-6 \\ \cline{2-2}
x+1\,) & x^3\qquad -7x-6 \\
 & x^3+x^2\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -x^2-7x\quad \\
 & -x^2-x\quad \\ \cline{2-2}
 & -6x-6 \\
 & -6x-6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
+) & & -1 & 1 & 6 \\ \hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$Q(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

このとき

$P(x)=(x-2)(x+1)(x^2-x-6)$

$\qquad=(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)$

よって　$(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-2,\ -1,\ 2,\ 3}$

(2)　$P(x)=2x^4+x^3-6x^2+x+2$

とおく。

$P(1)=2\cdot1^4+1^3-6\cdot1^2+1+2=0$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rr}
 & 2x^3+3x^2-3x-2 \\ \cline{2-2}
x-1\,) & 2x^4+x^3-6x^2+x+2 \\
 & 2x^4-2x^3\qquad\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & 3x^3-6x^2\qquad\quad \\
 & 3x^3-3x^2\qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & -3x^2+x\quad \\
 & -3x^2+3x\quad \\ \cline{2-2}
 & -2x+2 \\
 & -2x+2 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 2 & 1 & -6 & 1 & 2 \\
+) & & 2 & 3 & -3 & -2 \\ \hline
 & 2 & 3 & -3 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

上の計算より

$P(x)=(x-1)(2x^3+3x^2-3x-2)$

ここで，$Q(x)=2x^3+3x^2-3x-2$ とおくと

$Q(1)=2\cdot1^3+3\cdot1^2-3\cdot1-2=0$

であるから，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2+5x+2 \\
x-1 & \overline{)\,2x^3+3x^2-3x-2} \\
 & \underline{2x^3-2x^2} \\
 & \phantom{)\,2x^3+{}}5x^2-3x \\
 & \phantom{)\,2x^3+{}}\underline{5x^2-5x} \\
 & \phantom{)\,2x^3+3x^2-{}}2x-2 \\
 & \phantom{)\,2x^3+3x^2-{}}\underline{2x-2} \\
 & \phantom{)\,2x^3+3x^2-3x-{}}0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & 3 & -3 & -2 \\
+) & & 2 & 5 & 2 \\
\hline
 & 2 & 5 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$Q(x)=(x-1)(2x^2+5x+2)$

このとき

$P(x)=(x-1)^2(2x^2+5x+2)$

$\quad=(x-1)^2(2x+1)(x+2)$

よって　$(x-1)^2(2x+1)(x+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ -2}$

〔別解〕（偶数次数（この場合は 4 次）の相反方程式（$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$）は両辺を x^2 で割って解くことができる。）

$x=0$ はこの方程式の解ではないので，両辺を x^2 で割ると

$$2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$$\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}=0$$

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2},\quad x+\frac{1}{x}=2$$

$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$ の両辺に $2x$ を掛けて整理すると

$2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$

$x=-\dfrac{1}{2},\ -2$

$x+\dfrac{1}{x}=2$ の両辺に x を掛けて整理すると

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

以上より，求める解は　$x=1,\ -\dfrac{1}{2},\ -2$

問13 (1)　$P(x)=x^3-x^2-8x+12$ とおく。

$P(2)=2^3-2^2-8\cdot2+12=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+x-6 \\
x-2 & \overline{)\,x^3-x^2-8x+12} \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \phantom{)\,x^3-{}}x^2-8x \\
 & \phantom{)\,x^3-{}}\underline{x^2-2x} \\
 & \phantom{)\,x^3-x^2{}}-6x+12 \\
 & \phantom{)\,x^3-x^2{}}\underline{-6x+12} \\
 & \phantom{)\,x^3-x^2-6x+1{}}0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\
+) & & 2 & 2 & -12 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$P(x)=(x-2)(x^2+x-6)$

よって　$(x-2)(x^2+x-6)=0$

$\qquad(x-2)^2(x+3)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=2,\ -3}$

(2)　$P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ とおく。

$P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1$

$\qquad=0$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2+2x+1 \\
x+1 & \overline{)\,x^3+3x^2+3x+1} \\
 & \underline{x^3+x^2} \\
 & \phantom{)\,x^3+{}}2x^2+3x \\
 & \phantom{)\,x^3+{}}\underline{2x^2+2x} \\
 & \phantom{)\,x^3+3x^2+{}}x+1 \\
 & \phantom{)\,x^3+3x^2+{}}\underline{x+1} \\
 & \phantom{)\,x^3+3x^2+3x+{}}0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
+) & & -1 & -2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$P(x)=(x+1)(x^2+2x+1)$

よって　$(x+1)(x^2+2x+1)=0$

$\qquad(x+1)^3=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1}$

〔注意〕 左辺を $(x+1)^3$ と因数分解して解いてもよい。

教科書 P.42

問14　$x=2-i$ が方程式の解であるから

$(2-i)^3+a(2-i)^2+b(2-i)-5=0$

$2-11i+a(3-4i)+b(2-i)-5=0$

$(3a+2b-3)-(4a+b+11)i=0$

a，b は実数であるから

$$\begin{cases}3a+2b-3=0\\4a+b+11=0\end{cases}$$

これを解いて

$\boldsymbol{a=-5,\ b=9}$

このとき，もとの方程式は

$x^3-5x^2+9x-5=0$

$(x-1)(x^2-4x+5)=0$

よって　$x=1,\ 2\pm i$

ゆえに，他の解は　$\boldsymbol{x=1,\ 2+i}$

〔別解 1〕教科書 p.42 の「係数が実数である高次方程式が虚数解 $a+bi$ をもつならば，それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である」ことを用いると，$x=2+i$ も解であることがわかる。

$x=2\pm i$ を解とする 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 のものは

$(2+i)+(2-i)=4$

$(2+i)(2-i)=5$

であるから　$x^2-4x+5=0$

残りの解を γ とすると，$x=2\pm i$，γ を解とする 3 次方程式で，x^3 の係数が 1 のものは

$(x-\gamma)(x^2-4x+5)=0$

すなわち

$x^3-(\gamma+4)x^2+(4\gamma+5)x-5\gamma=0$

係数を比較して

$-(\gamma+4)=a$　…… ①

$4\gamma+5=b$　…… ②

$-5\gamma=-5$　…… ③

③ より　$\gamma=1$

①，② に代入して　$a=-5,\ b=9$

〔別解 2〕さらに，教科書 p.57 の「発展　3 次方程式の解と係数の関係」を用いると，残りの解を γ として

$(2+i)+(2-i)+\gamma=-a$　…… ①

$(2+i)(2-i)+(2-i)\gamma+\gamma(2+i)=b$　…… ②

$(2+i)(2-i)\gamma=5$　…… ③

が成り立つ。

③ より　$\gamma=1$

①，② に代入して　$a=-5,\ b=9$

問題

教科書 P.43

15 (1)　$P(x)=x^3-ax^2-5x-6$ とおくと，

$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるから

$P(-2)=-4a-4=0$

よって　$\boldsymbol{a=-1}$

(2)　$P(x)=x^3+ax+a+1$ とおくと，

$P(x)$ が $x-4$ で割り切れるから

$P(4)=5a+65=0$

よって　$\boldsymbol{a=-13}$

(3)　$P(x)=ax^3-2x^2-12x+8$ とおくと，

$P(x)$ が $3x-2$ で割り切れるから

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}a-\frac{8}{9}=0$$

よって　$\boldsymbol{a=3}$

16 $P(x)=ax^3+bx^2-8x-7$ が

$x+1$ で割り切れるから　$P(-1)=0$

$x-2$ で割った余りが -3 より　$P(2)=-3$

よって

$$\begin{cases}-a+b+1=0\\ 8a+4b-23=-3\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

17 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+5x+7$

よって，$P(x)$ を $x+1$ で割った余りは

$P(-1)=(-1+1)(-1-2)Q(-1)+5\cdot(-1)+7$

$=\boldsymbol{2}$

18 $\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$ である。

(1)　$\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1$

$=\omega^2+\omega+1=\boldsymbol{0}$

(2)　$\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2}{\omega^3}=\omega^2,\ \dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega}{\omega^3}=\omega$ であるから

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=(\omega^2+\omega+1)-1$$

$=\boldsymbol{-1}$

19 (1)　$(x^2)^2-2x^2-8=0$

$(x^2-4)(x^2+2)=0$

$x^2=4,\ -2$

よって　$\boldsymbol{x=\pm2,\ \pm\sqrt{2}\,i}$

(2)　$\{(x^2-x)-6\}\{(x^2-x)+2\}=0$

$(x^2-x-6)(x^2-x+2)=0$

$(x+2)(x-3)(x^2-x+2)=0$

よって　$\boldsymbol{x=-2,\ 3,\ \dfrac{1\pm\sqrt{7}\,i}{2}}$

(3)　$P(x)=x^3-2x^2-2x+4$ とおく。

$P(2)=2^3-2\cdot2^2-2\cdot2+4=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(x^2-2)$

$(x-2)(x^2-2)=0$

よって　$\boldsymbol{x=2,\ \pm\sqrt{2}}$

〔別解〕x^3-2x^2-2x+4

$=x^2(x-2)-2(x-2)$

$=(x-2)(x^2-2)$

と因数分解してもよい。

(4)　$P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ とおく。

$P(-2)=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-11\cdot(-2)+6=0$

であるから，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x+2)(2x^2-7x+3)$

よって　$(x+2)(2x^2-7x+3)=0$

$(x+2)(2x-1)(x-3)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-2,\ \dfrac{1}{2},\ 3}$

(5)　$P(x)=12x^4-16x^3+x^2+4x-1$ とおく。

$P(1)=12\cdot1^4-16\cdot1^3+1^2+4\cdot1-1=0$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-1)(12x^3-4x^2-3x+1)$

ここで，$Q(x)=12x^3-4x^2-3x+1$ とおくと

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

$$= 0$$

であるから，$Q(x)$ は $2x-1$ を因数にもつ。

$$Q(x) = (2x-1)(6x^2+x-1)$$

このとき

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(2x-1)(6x^2+x-1) \\ &= (x-1)(2x-1)(2x+1)(3x-1) \end{aligned}$$

よって　$(x-1)(2x-1)(2x+1)(3x-1) = 0$

ゆえに　$\boldsymbol{x = 1,\ \pm\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}}$

〔注意〕$\begin{aligned}[t] Q(x) &= 4x^2(3x-1)-(3x-1) \\ &= (4x^2-1)(3x-1) \\ &= (2x+1)(2x-1)(3x-1) \end{aligned}$

と因数分解することもできる。

20　$x = 1+\sqrt{2}\,i$ が方程式の解であるから

$$\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^3 + a\left(1+\sqrt{2}\,i\right) + b = 0$$

すなわち　$-5+\sqrt{2}\,i+a+\sqrt{2}\,ai+b = 0$

実部と虚部に整理すると

$$(a+b-5)+\sqrt{2}\,(a+1)i = 0$$

a，b は実数であるから

$$a+b-5 = 0,\ a+1 = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -1,\ b = 6}$

このとき，もとの方程式は　$x^3-x+6 = 0$

左辺を因数分解して　$(x+2)(x^2-2x+3) = 0$

ゆえに　$x = -2,\ 1\pm\sqrt{2}\,i$

よって，他の解は　$\boldsymbol{x = -2,\ 1-\sqrt{2}\,i}$

〔別解〕問 14 と同様にして解くこともできる。

21　$P(x) = x^3+ax^2+bx-6$ とおく。

(1)　方程式 $P(x) = 0$ が 1 と -2 を解にもつから

$$P(1) = 0,\ P(-2) = 0$$

よって

$$P(1) = a+b-5 = 0$$
$$P(-2) = 4a-2b-14 = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = 4,\ b = 1}$

このとき，もとの方程式は

$$x^3+4x^2+x-6 = 0$$

左辺は $(x-1)(x+2)$，すなわち

$$x^2+x-2$$

を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2+x-2 & x^3+4x^2+x-6 \\ & \underline{x^3+x^2-2x} \\ & 3x^2+3x-6 \\ & \underline{3x^2+3x-6} \\ & 0 \end{array}$$

上の計算より，もとの方程式の左辺は

$$(x-1)(x+2)(x+3) = 0$$

と，因数分解される。

よって，他の解は　$\boldsymbol{x = -3}$

〔別解〕（教科書 p.57「発展　3 次方程式の解と係数の関係」を用いると）

他の解を γ として

$$\begin{cases} 1+(-2)+\gamma = -a & \cdots\cdots ① \\ 1\cdot(-2)+(-2)\gamma+\gamma\cdot 1 = b & \cdots\cdots ② \\ 1\cdot(-2)\cdot\gamma = 6 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

③ より　$\gamma = -3$

これを ①，② に代入して

$$a = 4,\ b = 1$$

(2)　方程式 $P(x) = 0$ の他の解を γ とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-\gamma)(x+1)^2 \\ &= x^3+(2-\gamma)x^2+(1-2\gamma)x-\gamma \end{aligned}$$

係数を比較して

$$2-\gamma = a,\ 1-2\gamma = b,\ -\gamma = -6$$

これを解いて

$\boldsymbol{a = -4,\ b = -11}$　他の解は　$\boldsymbol{x = 6}$

〔別解１〕$P(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから

$$\begin{array}{r|l} & x+(a-2) \\ \hline x^2+2x+1 & x^3+ax^2+bx-6 \\ & \underline{x^3+2x^2+x} \\ & (a-2)x^2+(b-1)x-6 \\ & \underline{(a-2)x^2+(2a-4)x+a-2} \\ & (-2a+b+3)x-a-4 \end{array}$$

$$\begin{cases} -2a+b+3 = 0 \\ -a-4 = 0 \end{cases}$$

これを解いて　$a = -4,\ b = -11$

このとき

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x+a-2) \\ &= (x+1)^2(x-6) \end{aligned}$$

よって，他の解は　$x = 6$

〔別解２〕方程式 $P(x) = 0$ が $x = -1$ を解にもつから　$P(-1) = 0$

よって

$$P(-1) = a-b-7 = 0$$

これより，$b = a-7$ であるから

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3+ax^2+(a-7)x-6 \\ &= a(x^2+x)+x^3-7x-6 \\ &= ax(x+1)+(x+1)(x^2-x-6) \\ &= (x+1)\{ax+(x^2-x-6)\} \\ &= (x+1)\{x^2+(a-1)x-6\} \end{aligned}$$

$Q(x) = x^2+(a-1)x-6$ とおくと，$Q(x)$ は $x = -1$ を解にもつから

$$Q(-1) = 0$$

よって

$$Q(-1) = -a-4 = 0$$

したがって　$a = -4$

$$b = a-7 = -11$$

このとき

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2-5x-6 \\ &= (x+1)(x-6) \end{aligned}$$

であるから

$$P(x) = (x+1)Q(x) = (x+1)^2(x-6)$$

ゆえに，他の解は　$x = 6$

4節 式と証明

1 恒等式

教科書 P.45

問 1 左辺を整理すると

$(a+b+c)x^2+(-3a-5b-4c)x+2a+6b+3c$

$=3x+5$

この等式が恒等式となるためには

$a+b+c=0$

$-3a-5b-4c=3$

$2a+6b+3c=5$

これを解いて　$\boldsymbol{a=7,\ b=4,\ c=-11}$

〔別解〕$x=1,\ 2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$2b=8,\ -c=11,\ 2a=14$

よって　$a=7,\ b=4,\ c=-11$

逆に，これらを等式に代入すると，左辺 = 右辺となって，x についての恒等式となる。

したがって　$a=7,\ b=4,\ c=-11$

教科書 P.46

問 2 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ より

両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けると

$4x-13=a(x-2)+b(x+3)$

右辺を整理すると

$4x-13=(a+b)x+(-2a+3b)$

この等式が恒等式となるためには

$a+b=4,\ -2a+3b=-13$

これを解いて　$\boldsymbol{a=5,\ b=-1}$

教科書 P.47

問 3 (1) 両辺をそれぞれ変形すると

$(x^2-1)^2+3x(x-1)=x^4+x^2-3x+1$

$(x^2+1)^2-x(x+3)=x^4+x^2-3x+1$

ゆえに

$(x^2-1)^2+3x(x-1)=(x^2+1)^2-x(x+3)$

(2) 両辺をそれぞれ変形すると

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

ゆえに

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

（参考）$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

この等式を用いると

$(2^2+3^2)(4^2+5^2)=23^2+2^2=7^2+22^2$

問 4 $x+y=1$ より，$y=1-x$ を右辺に代入すると

$y^2-y=(1-x)^2-(1-x)$

$=1-2x+x^2-1+x$

$=x^2-x$

ゆえに　$x^2-x=y^2-y$

問 5 $a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ を左辺に代入すると

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+(a+b)^2+2ab-2b(a+b)-2a(a+b)$

$=a^2+b^2+a^2+2ab+b^2+2ab-2ab$

$-2b^2-2a^2-2ab$

$=0$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

〔別解〕

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)^2=0$

教科書 P.48

問 6 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

よって

$$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{bk+2b}{2bk+b}=\frac{b(k+2)}{b(2k+1)}=\frac{k+2}{2k+1}$$

$$\frac{c+2d}{2c+d}=\frac{dk+2d}{2dk+d}=\frac{d(k+2)}{d(2k+1)}=\frac{k+2}{2k+1}$$

ゆえに　$\dfrac{a+2b}{2a+b}=\dfrac{c+2d}{2c+d}$

（参考）比例式の性質

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき

(1) $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d},\ \dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$

(2) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d},\ \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$

(3) $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

(4) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$（加比の理）

$\left(\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}\right.$ のとき

$\left.\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}\right)$

問 7 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k\ (k\neq 0)$ とおくと

$x=2k,\ y=3k,\ z=4k$

2 乗すると

$x^2=4k^2,\ y^2=9k^2,\ z^2=16k^2$

ゆえに

$x^2:y^2:z^2=4k^2:9k^2:16k^2=4:9:16$

2 不等式の証明

教科書 P.49

問 8 (1) $a>0$ の両辺に $b\ (>0)$ を掛けて

$a\cdot b>0\cdot b$

$ab>0$

(2) $a<0$ の両辺に $b\ (<0)$ を掛けて

$a\cdot b>0\cdot b$

$ab > 0$

(3) $a > b$ の両辺に c を加えて

$a+c > b+c$ ……①

$c > d$ の両辺に b を加えて

$b+c > b+d$ ……②

①，② より

$a+c > b+d$

教科書 P.50

問 9 $(ab+cd)-(ad+bc)$

$= a(b-d)-c(b-d) = (a-c)(b-d)$

ここで，$a-c>0$，$b-d>0$ であるから

$(ab+cd)-(ad+bc)$

$= (a-c)(b-d) > 0$

ゆえに　$ab+cd > ad+bc$

問10 $5(x^2+y^2)-(2x-y)^2$

$= x^2+4xy+4y^2$

$= (x+2y)^2 \geqq 0$

ゆえに　$5(x^2+y^2) \geqq (2x-y)^2$

等号が成り立つのは　$x+2y=0$

すなわち $\boldsymbol{x=-2y}$ **のとき** である。

教科書 P.51

問11 $2x^2+5-4x = 2(x-1)^2+3 > 0$

ゆえに　$2x^2+5 > 4x$

問12 (1) a^2+2b^2-2ab

$= a^2-2ab+2b^2$

$= (a-b)^2+b^2$

$(a-b)^2 \geqq 0$，$b^2 \geqq 0$ であるから

$(a-b)^2+b^2 \geqq 0$

よって　$a^2+2b^2 \geqq 2ab$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b=0$

すなわち，$\boldsymbol{a=b=0}$ **のとき** である。

(2) $2x^2-(6xy-5y^2)$

$= 2x^2-6xy+5y^2$

$= 2\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{y^2}{2}$

$\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2 \geqq 0$，$\dfrac{y^2}{2} \geqq 0$ であるから

$2\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{y^2}{2} \geqq 0$

よって　$2x^2 \geqq 6xy-5y^2$

等号が成り立つのは，$x-\dfrac{3}{2}y=0$ かつ $y=0$

すなわち，$\boldsymbol{x=y=0}$ のときである。

教科書 P.53

問13 (1) $a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$a+\dfrac{9}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}} = 6$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{9}{a}$，すなわち $a^2=9$ のときで，$a>0$ より $\boldsymbol{a=3}$ **のとき** である。

(2) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2$

$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{a}{b}$ はともに正であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}} = 2$

ゆえに　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 2+2=4$

等号が成り立つのは　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$

すなわち $a^2=b^2$ のときで，$a>0$，$b>0$ より，$\boldsymbol{a=b}$ **のとき** である。

教科書 P.54

問14 両辺の平方の差を考えると

$\left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{1+a}\right)^2$

$= 1+a+\dfrac{a^2}{4}-(1+a) = \dfrac{a^2}{4} > 0$

したがって

$\left(\sqrt{1+a}\right)^2 < \left(1+\dfrac{a}{2}\right)^2$

$\sqrt{1+a}>0$，$1+\dfrac{a}{2}>0$ であるから

$\sqrt{1+a} < 1+\dfrac{a}{2}$

問15 両辺の平方の差を考えると

$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$

$= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$

$= a^2+2|a||b|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$= 2(|ab|+ab) \geqq 0$

したがって　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a-b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a-b| \geqq 0$ であるから

$|a|+|b| \geqq |a-b|$

等号が成り立つのは, $|ab|=-ab$, すなわち $\boldsymbol{ab \leqq 0}$ **のとき** である。

〔別解〕教科書 p.54 応用例題 13 の不等式において，b を $(-b)$ に置き換えると

$|a|+|-b| \geqq |a+(-b)|$

よって　$|a|+|b| \geqq |a-b|$

問題

教科書 P.55

22 (1) 左辺を整理すると

$(a+b+c)x^2+(-2a+b+4c)x+(a-2b+4c)=9$

この等式が恒等式となるためには

$a+b+c=0$

$-2a+b+4c=0$

$a-2b+4c=9$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=1}$

〔別解〕$a(x-1)^2+b(x-1)(x+2)+c(x+2)^2=9$ の両辺に，$x=1$，$x=0$，$x=-2$ をそれぞ

れ代入すると

$$9c=9,\ a-2b+4c=9,\ 9a=9$$

よって　$a=1,\ b=-2,\ c=1$

逆に，これらを等式に代入すると，左辺＝右辺 となって，x についての恒等式となる。

よって　$a=1,\ b=-2,\ c=1$

(2) 両辺に $x(x^2+2)$ を掛けると

$$3x+4=a(x^2+2)+(bx+c)x$$

この等式が恒等式であればよい。

右辺を整理すると

$$3x+4=(a+b)x^2+cx+2a$$

よって　$a+b=0,\ c=3,\ 2a=4$

ゆえに　$\boldsymbol{a=2,\ b=-2,\ c=3}$

23

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$-\{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\}$$
$$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$$
$$-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c$$
$$=0$$

よって

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$

24 $a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ を代入すると

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$
$$=a^2(-a)+b^2(-b)+(a+b)^3$$
$$=(a+b)^3-(a^3+b^3)=3a^2b+3ab^2$$
$$-3abc=-3ab\{-(a+b)\}=3a^2b+3ab^2$$

よって

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-3abc$$

25 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(bk+b)^2}{bk\cdot b}=\frac{b^2(k+1)^2}{b^2\cdot k}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{(c+d)^2}{cd}=\frac{(dk+d)^2}{dk\cdot d}=\frac{d^2(k+1)^2}{d^2\cdot k}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

よって　$\dfrac{(a+b)^2}{ab}=\dfrac{(c+d)^2}{cd}$

26 (1) $a,\ b,\ c,\ d$ は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$a+b\geqq 2\sqrt{ab},\ c+d\geqq 2\sqrt{cd}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから，辺々を掛け合わせて

$$(a+b)(c+d)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd}=4\sqrt{abcd}$$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a=b,\ c=d}$ のとき である。

(2) $a,\ b,\ c$ は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$a+b\geqq 2\sqrt{ab},\ b+c\geqq 2\sqrt{bc},$$
$$c+a\geqq 2\sqrt{ca}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから，辺々を掛け合わせて

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$$
$$=8abc$$

等号が成り立つのは　$a=b,\ b=c,\ c=a$

すなわち，**$\boldsymbol{a=b=c}$ のとき** である。

27 (1) $(a^2+b^2)-2(a+b-1)$

$$=(a-1)^2+(b-1)^2\geqq 0$$

よって　$a^2+b^2\geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a=b=1}$ のとき である。

(2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$$
$$-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$$
$$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$$
$$=(ay-bx)^2\geqq 0$$

よって

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

等号が成り立つのは　$ay-bx=0$

すなわち，**$\boldsymbol{ay=bx}$ のとき** である。

（参考）コーシー・シュワルツの不等式である。

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$$

も成り立つ。

28 両辺の平方の差をとって

$$\left(\sqrt{a-b}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$
$$=a-b-\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)$$
$$=2\sqrt{ab}-2b$$
$$=2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

$a\geqq b\geqq 0$ より　$\sqrt{a}\geqq\sqrt{b}$

すなわち　$2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\geqq 0$

よって　$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\leqq\left(\sqrt{a-b}\right)^2$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}\geqq 0,\ \sqrt{a-b}\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}\leqq\sqrt{a-b}$$

等号が成り立つのは

$$\sqrt{b}=0\quad\text{または}\quad\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$$

すなわち，**$\boldsymbol{b=0}$ または $\boldsymbol{a=b}$ のとき** である。

29 (i) $|a|-|b|<0$ のとき

$|a-b|\geqq 0$ より

$$|a|-|b|<|a-b|$$

(ii) $|a|-|b|\geqq 0$ のとき

両辺はいずれも負でないから

$$(|a|-|b|)^2\leqq|a-b|^2$$

を示せばよい。

$$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$$
$$=2(|ab|-ab)\geqq 0$$

(i), (ii) より　$|a|-|b|\leqq|a-b|$

等号が成り立つのは

$$|a|\geqq|b|\quad\text{かつ}\quad|ab|=ab$$

のときである。

すなわち，**$\boldsymbol{a\geqq b\geqq 0}$ または $\boldsymbol{a\leqq b\leqq 0}$ のとき** である。

〔別解〕

教科書 p.54 の応用例題 13 の不等式において，a を $a-b$ に置き換えると

$$|a-b|+|b| \geqq |(a-b)+b|$$

$$|a-b|+|b| \geqq |a|$$

ゆえに　$|a-b| \geqq |a|-|b|$

等号が成り立つのは　$(a-b)b \geqq 0$

すなわち，$a \geqq b \geqq 0$ または $a \leqq b \leqq 0$ のときである。

（参考）三角不等式

$$|a|-|b| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|$$

$$|a|-|b| \leqq |a-b| \leqq |a|+|b|$$

参考　組立除法

教科書 P.56

問 1　(1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -5 & 8 & -3 \\ +) & & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{3} \end{array}$$

商　x^2-2x+2，　余り　3

(2)

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ +) & & -2 & 4 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

商　x^3-2x^2+3x-3，　余り　0

発展　3次方程式の解と係数の関係

教科書 P.57

問 1　3 次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta+\gamma=2$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\alpha\beta\gamma=3$$

(1)　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=3-\dfrac{1}{2}+2-1=\dfrac{7}{2}$

(2)　$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{3}$

〔別解〕(1)　3 次方程式 $2x^3-4x^2+x-6=0$ の左辺は次のように因数分解できる。

$$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

よって

$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=2x^3-4x^2+x-6$

$x=1$ を代入して

$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=2\cdot1^3-4\cdot1^2+1-6$

$=-7$

したがって

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=\frac{7}{2}$$

練習問題A

教科書 P.58

1　二項定理から得られる等式

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_rx^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

において

$x=-2$ を代入すると

$(1-2)^n$

$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1(-2)+{}_n\mathrm{C}_2(-2)^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n(-2)^n$

よって

${}_n\mathrm{C}_0-2\cdot{}_n\mathrm{C}_1+2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2-\cdots+(-2)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n$

$=(-1)^n$

2　(1)　$(3+2i)(x+yi)$

$=(3x-2y)+(2x+3y)i$

$=16-11i$

x，y は実数であるから

$$\begin{cases}3x-2y=16\\2x+3y=-11\end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=2,\ y=-5}$

(2)　$x+yi=\dfrac{3+i}{1+i}=\dfrac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$

x，y は実数であるから　　$\boldsymbol{x=2,\ y=-1}$

3　$x^2-2x+a=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4}=1-a$$

$x^2+4x-2a=0$ の判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_2}{4}=4+2a$$

これらの一方が正，一方が負であるから

$$\frac{D_1}{4}\cdot\frac{D_2}{4}<0$$

$(1-a)(4+2a)<0$

$(a-1)(a+2)>0$

よって，求める a の値の範囲は

$\boldsymbol{a<-2,\ 1<a}$

4　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=-k-1$$

であるから

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-k)^2-2(-k-1)$

$=k^2+2k+2$

ゆえに　$k^2+2k+2=10$

$k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$

したがって　　$\boldsymbol{k=-4,\ 2}$

$\boldsymbol{k=-4}$ のとき

$x^2-4x+3=0$ の 2 解であるから

$\boldsymbol{\alpha=1,\ \beta=3}$ または $\boldsymbol{\alpha=3,\ \beta=1}$

$\boldsymbol{k=2}$ のとき

$x^2+2x-3=0$ の 2 解であるから

$\boldsymbol{\alpha = 1,\ \beta = -3}$ **または** $\boldsymbol{\alpha = -3,\ \beta = 1}$

〔別解〕 2 次方程式 $x^2 + kx - k - 1 = 0$

の左辺は次のように因数分解できる。

$$k(x-1) + x^2 - 1 = 0$$
$$k(x-1) + (x+1)(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x+k+1) = 0$$

よって　$x = 1,\ -k-1$

したがって

$$1^2 + (-k-1)^2 = 10$$
$$(k+1)^2 = 9$$
$$k+1 = \pm 3$$

ゆえに　$k = 2,\ -4$

$k = 2$ のとき　$-k-1 = -3$

であるから

$\alpha = 1,\ \beta = -3$ または $\alpha = -3,\ \beta = 1$

$k = -4$ のとき　$-k-1 = 3$

であるから

$\alpha = 1,\ \beta = 3$ または $\alpha = 3,\ \beta = 1$

5 $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ で割り切れるためには，$x+2,\ x-1$ の両方を因数にもてばよい。

$P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 6$ とおくと

$$P(-2) = 0,\ P(1) = 0$$

ゆえに　$\begin{cases} 4a - 2b - 30 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{a = 6,\ b = -3}$

〔別解〕実際に割り算を行うと

$$\begin{array}{r|l} & 3x + (a-3) \\ \hline x^2+x-2 & 3x^3 + ax^2 + \ bx - 6 \\ & 3x^3 + 3x^2 - \ 6x \\ \hline & (a-3)x^2 + (b+6)x - 6 \\ & (a-3)x^2 + (a-3)x - 2a + 6 \\ \hline & (-a+b+9)x + 2a - 12 \end{array}$$

割り切れるから

$$-a + b + 9 = 0,\ 2a - 12 = 0$$

よって　$a = 6,\ b = -3$

6 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = k$ とおくと

$$x = ak,\ y = bk,\ z = ck$$

このとき

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$= (a^2+b^2+c^2)(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)$$
$$= k^2(a^2+b^2+c^2)^2$$
$$(ax+by+cz)^2$$
$$= (a \cdot ak + b \cdot bk + c \cdot ck)^2$$
$$= k^2(a^2+b^2+c^2)^2$$

よって

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2$$

(参考) この等式は，教科書 p.55 の 27 の (2) の

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$
$$\left(等号は\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b}\ のとき成り立つ\right)$$

と同じ，コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$
$$\left(等号は\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\ のとき成り立つ\right)$$

の等号が成り立つときである。

7 (1) $(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)$

$$= \frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2) + (b^2-2bc+c^2) + (c^2-2ca+a^2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

が成り立つ。**等号が成り立つのは，**

$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$ のとき，

すなわち，$\boldsymbol{a = b = c}$ **のとき** である。

(2) $\dfrac{a}{b},\ \dfrac{c}{d},\ \dfrac{b}{a},\ \dfrac{d}{c}$ は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}$$
$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから，辺々を掛け合わせて

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right) \geqq 4\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}} = 4$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d},\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$　すなわち　$\boldsymbol{ad = bc}$ **のとき** である。

(3) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{4}{b}\right) = \dfrac{b}{a} + \dfrac{4a}{b} + 5$

ここで，$\dfrac{b}{a},\ \dfrac{4a}{b}$ は正の数であるから，

相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 4$$

よって

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geqq 4 + 5 = 9$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{b}{a} = \dfrac{4a}{b}$

すなわち，$\boldsymbol{2a = b}$ **のとき** である。

〔注意〕 (2) のように変形すると示せない。

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{4}{b}}$$

辺々を掛け合わせて

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geqq 4\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 8$$

これは等号が成り立たないためである。等号が

成り立つのは

$$a = b \text{ かつ } \frac{1}{a} = \frac{4}{b}$$

となるが，これらは同時には成り立たないからである。

このとき，不等式

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) > 8$$

は成り立つ。

練習問題B

教科書 P.59

8 2次方程式 $x^2+4kx+5k-1=0$ が異なる2つの実数解をもつから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2k)^2-(5k-1) = 4k^2-5k+1$$
$$= (k-1)(4k-1) > 0$$

よって　$k < \frac{1}{4}$，$1 < k$　…… ①

2つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = -4k,\ \alpha\beta = 5k-1$$

α，β がともに -2 より大きくなるための条件は $\alpha+2$，$\beta+2$ がともに正となることであるから

$(\alpha+2)+(\beta+2) > 0$　…… ②

$(\alpha+2)(\beta+2) > 0$　…… ③

② より　$(\alpha+\beta)+4 = -4k+4 > 0$

よって　$k < 1$　…… ④

③ より

$$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 = (5k-1)+2(-4k)+4$$
$$= -3k+3 > 0$$

よって　$k < 1$　…… ⑤

①，④，⑤ より　$\boldsymbol{k < \frac{1}{4}}$

9 (1)　$x = 1-\sqrt{3}i$ より　$x-1 = -\sqrt{3}i$

両辺を2乗して　$(x-1)^2 = -3$

ゆえに　$x^2-2x+4 = 0$

(2)　x^3-4x^2+8x+3 を x^2-2x+4 で割ると

$$\begin{array}{r}
x\ -2 \\
x^2-2x+4\,\overline{)\,x^3-4x^2+8x+\ 3} \\
\underline{x^3-2x^2+4x} \\
-2x^2+4x+\ 3 \\
\underline{-2x^2+4x-\ 8} \\
11
\end{array}$$

よって

$$x^3-4x^2+8x+3 = (x^2-2x+4)(x-2)+11$$

(1) の結果から，$x = 1-\sqrt{3}i$ のとき，

$x^2-2x+4 = 0$ であるから

$$x^3-4x^2+8x+3 = 0\cdot(x-2)+11 = \mathbf{11}$$

10 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = -\frac{3}{2},\ \alpha\beta = 1$$

よって

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$= -\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)\div 1$$
$$= -3$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2$$
$$= 1+1+2 = 4$$

ゆえに，$\alpha+\frac{1}{\beta}$，$\beta+\frac{1}{\alpha}$ を2つの解にもつ2次方程式の1つは

$$\boldsymbol{x^2+3x+4 = 0}$$

11 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とおくと

$P(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x)+3x-5$　…… ①

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とおくと

$P(x) = (x-1)(x+2)Q_2(x)-5x+3$　…… ②

$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$P(x) = (x-2)(x+2)Q(x)+ax+b$　…… ③

① に $x=2$ を代入すると　$P(2) = 1$

② に $x=-2$ を代入すると　$P(-2) = 13$

③ に $x=2$，$x=-2$ を代入すると

$$P(2) = 2a+b,\ P(-2) = -2a+b$$

したがって

$$\begin{cases} 2a+b = 1 \\ -2a+b = 13 \end{cases}$$

これを解いて　$a=-3$，$b=7$

ゆえに，求める余りは　$\boldsymbol{-3x+7}$

12 $\omega^3 = 1$，$\omega^2+\omega+1 = 0$ である。k は負でない整数とする。

(i)　**$n = 3k$（$k \neq 0$）のとき**

$$\omega^{2n} = (\omega^3)^{2k} = 1$$
$$\omega^n = (\omega^3)^k = 1$$

よって

$$\omega^{2n}+\omega^n = 1+1 = \mathbf{2}$$

(ii)　**$n = 3k+1$ のとき**

$$\omega^{2n} = \omega^{6k+2} = (\omega^3)^{2k}\cdot\omega^2 = \omega^2$$
$$\omega^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k\cdot\omega = \omega$$

よって

$$\omega^{2n}+\omega^n = \omega^2+\omega$$
$$= (\omega^2+\omega+1)-1$$
$$= 0-1 = \mathbf{-1}$$

(iii)　**$n = 3k+2$ のとき**

$$\omega^{2n} = \omega^{6k+4} = (\omega^3)^{2k+1}\cdot\omega = \omega$$
$$\omega^n = \omega^{3k+2} = (\omega^3)^k\cdot\omega^2 = \omega^2$$

よって

$$\omega^{2n}+\omega^n = \omega+\omega^2$$
$$= (\omega^2+\omega+1)-1$$
$$= 0-1 = \mathbf{-1}$$

13 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ とおくと

$$b = ck,\ a = bk = ck^2$$

このとき

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(a-b+c)\\
&= (a+c)^2 - b^2\\
&= (ck^2+c)^2 - (ck)^2\\
&= c^2\{(k^2+1)^2 - k^2\} = c^2(k^4+k^2+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2\\
&= (ck^2)^2 + (ck)^2 + c^2 = c^2(k^4+k^2+1)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$$

14 $2(ax+by)-(a+b)(x+y)$

$= ax-ay-bx+by$

$= a(x-y)-b(x-y)$

$= (a-b)(x-y)$

$a \geqq b$, $x \geqq y$ より　　$a-b \geqq 0$, $x-y \geqq 0$

よって　　$(a-b)(x-y) \geqq 0$

したがって

$$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは

$$a-b=0 \quad \text{または} \quad x-y=0$$

すなわち，$\boldsymbol{a=b}$　**または**　$\boldsymbol{x=y}$

のときである。

15 各辺の平方の差を考える。

$$\begin{aligned}
&2(a^2+b^2) - (|a|+|b|)^2\\
&= 2a^2+2b^2-(a^2+2|a||b|+b^2)\\
&= a^2-2|a||b|+b^2\\
&= (|a|-|b|)^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

（等号が成り立つのは $|a|=|b|$ のときである）

$$\begin{aligned}
&(|a|+|b|)^2-(a^2+b^2)\\
&= (a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2+b^2)\\
&= 2|ab| \geqq 0
\end{aligned}$$

（等号が成り立つのは $ab=0$ のときである）

以上から

$$a^2+b^2 \leqq (|a|+|b|)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$$

が成り立つ。

$\sqrt{a^2+b^2} \geqq 0$, $|a|+|b| \geqq 0$, $\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq 0$

であるから

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqq |a|+|b| \leqq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$