

1 章 方程式・式と証明

1 節 整式の乗法・除法と分数式

1 整式の乗法と因数分解

教科書 P.6

問 1 $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$
 $= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$
 $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

問 2 (1) $(x+1)^3$
 $= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3$
 $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
 (2) $(3x-1)^3$
 $= (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3x \cdot 1^2 - 1^3$
 $= 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$
 (3) $(x+10y)^3$
 $= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 10y + 3 \cdot x \cdot (10y)^2 + (10y)^3$
 $= x^3 + 30x^2y + 300xy^2 + 1000y^3$
 (4) $(2x-5y)^3$
 $= (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5y + 3 \cdot 2x \cdot (5y)^2 - (5y)^3$
 $= 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$

教科書 P.7

問 3 ③の証明
 $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$
 $= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$
 $= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$
 $= a^3 + b^3$
 ④の証明
 公式 ③の b を $-b$ に置き換えて
 $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$
 $= \{a + (-b)\}\{a^2 - a(-b) + (-b)^2\}$
 $= a^3 + (-b)^3$
 $= a^3 - b^3$

問 4 (1) $(x+7)(x^2 - 7x + 49)$
 $= (x+7)(x^2 - x \cdot 7 + 7^2)$
 $= x^3 + 7^3$
 $= x^3 + 343$
 (2) $(5x-3y)(25x^2 + 15xy + 9y^2)$
 $= (5x-3y)\{(5x)^2 + 5x \cdot 3y + (3y)^2\}$
 $= (5x)^3 - (3y)^3$
 $= 125x^3 - 27y^3$

問 5 (1) $x^3 + 1$
 $= (x+1)(x^2 - x \cdot 1 + 1^2)$
 $= (x+1)(x^2 - x + 1)$
 (2) $x^3 - 8$
 $= x^3 - 2^3$
 $= (x-2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2)$
 $= (x-2)(x^2 + 2x + 4)$
 (3) $64x^3 - 125y^3$

$$= (4x)^3 - (5y)^3$$

$$= (4x-5y)\{(4x)^2 + 4x \cdot 5y + (5y)^2\}$$

$$= (4x-5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)$$

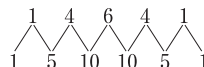
問 6 (1) $x^6 - 64y^6$
 $= (x^3)^2 - (8y^3)^2$
 $= (x^3 + 8y^3)(x^3 - 8y^3)$
 $= \{x^3 + (2y)^3\}\{x^3 - (2y)^3\}$
 $= (x+2y)\{x^2 - x \cdot 2y + (2y)^2\}$
 $\quad \times (x-2y)\{x^2 + x \cdot 2y + (2y)^2\}$
 $= (x+2y)(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$
 $\quad \times (x^2 - 2xy + 4y^2)$

(2) $x^6 + 7x^3 - 8$
 $= (x^3)^2 + 7x^3 - 8$
 $= (x^3 + 8)(x^3 - 1)$
 $= (x^3 + 2^3)(x^3 - 1^3)$
 $= (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2)$
 $\quad \times (x-1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2)$
 $= (x+2)(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 4)$

2 二項定理

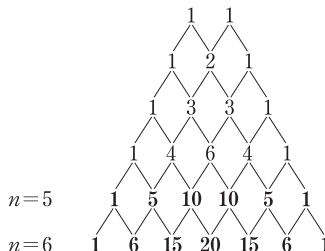
教科書 P.8

問 7 $(a+b)^5$
 $= (a+b)(a+b)^4$
 $= (a+b)(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)$
 $= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$
 $\quad + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$
 $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
 また、 $(a+b)^4$ の展開式の係数から



となり、先に求めた $(a+b)^5$ の展開式の係数と一致する。

問 8



よって、 $(a+b)^6$ の展開式は
 $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3$
 $\quad + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

教科書 P.10

問 9 公式 ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$
 に注意して、
 (1) $(3a+b)^4$

$$= {}_4C_0(3a)^4 + {}_4C_1(3a)^3b^1 + {}_4C_2(3a)^2b^2 \\ + {}_4C_3(3a)^1b^3 + {}_4C_4b^4$$

$$= 81a^4 + 108a^3b + 54a^2b^2 + 12ab^3 + b^4$$

$$(2) \quad (2x - 3y)^4 \\ = {}_4C_0(2x)^4 + {}_4C_1(2x)^3(-3y)^1 + {}_4C_2(2x)^2(-3y)^2 \\ + {}_4C_3(2x)^1(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4 \\ = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

$$(3) \quad (2x^2 + 1)^5 \\ = {}_5C_0(2x^2)^5 + {}_5C_1(2x^2)^4 + {}_5C_2(2x^2)^3 \\ + {}_5C_3(2x^2)^2 + {}_5C_4(2x^2)^1 + {}_5C_5 \\ = 32x^{10} + 80x^8 + 80x^6 + 40x^4 + 10x^2 + 1$$

問10 (1) $(3x^2 + 2)^6$ の展開式における一般項は

$${}_6C_r(3x^2)^{6-r} \cdot 2^r \\ = {}_6C_r 3^{6-r} (x^2)^{6-r} \cdot 2^r \\ = {}_6C_r 3^{6-r} x^{2(6-r)} \cdot 2^r \\ = {}_6C_r 2^r \cdot 3^{6-r} x^{12-2r}$$

ここで、 $12 - 2r = 2$ となるのは、 $r = 5$ のときであるから、求める係数は

$${}_6C_5 2^5 \cdot 3^{6-5} = {}_6C_1 2^5 \cdot 3 = 6 \cdot 2^5 \cdot 3 = 576$$

(2) $(x - 3y)^7$ の展開式における一般項は

$${}_7C_r x^{7-r} (-3y)^r \\ = {}_7C_r x^{7-r} (-3)^r y^r \\ = {}_7C_r (-3)^r x^{7-r} y^r$$

ここで、 $x^{7-r} y^r = x^2 y^5$ となるのは、 $r = 5$ のときであるから、求める係数は

$${}_7C_5 (-3)^5 = {}_7C_2 (-3)^5 \\ = 21 \cdot (-243) = -5103$$

教科書 P.11

問11 $\{(x+2y)+3z\}^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r (x+2y)^{5-r} (3z)^r \\ = {}_5C_r 3^r (x+2y)^{5-r} z^r \quad \dots\dots ①$$

z の次数に着目すると、 $x^2 y^2 z$ が現れるのは $r = 1$ のときだけである。

このとき、①は ${}_5C_1 3(x+2y)^4 z$ となり、 $(x+2y)^4$ を展開したときの $x^2 y^2$ の係数は

$${}_4C_2 x^2 (2y)^2 = 6 \cdot 2^2 x^2 y^2 = 24x^2 y^2$$

より 24 である。

したがって、 $x^2 y^2 z$ の係数は

$${}_5C_1 3 \cdot 24 = 5 \cdot 3 \cdot 24 = 360$$

同様に、 z の次数に着目すると、①で $x^3 y^2$ になるのは $r = 0$ のときだけである。

このとき、①は ${}_5C_0 (x+2y)^5$ となり、 $(x+2y)^5$ を展開したときの $x^3 y^2$ の係数は

$${}_5C_2 x^3 (2y)^2 = 10 \cdot 2^2 x^3 y^2 = 40x^3 y^2$$

より 40 である。

したがって、 $x^3 y^2$ の係数は ${}_5C_0 \cdot 40 = 40$

教科書 P.12

問12 展開式における $x^2 y^3 z^2$ の項は

$$\frac{7!}{2!3!2!} x^2 (-y)^3 (2z)^2$$

であるから、 $x^2 y^3 z^2$ の係数は

$$\frac{7!}{2!3!2!} \cdot (-1)^3 \cdot 2^2 = -840$$

$$\text{問13} \quad (a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b \\ + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n b^n \quad \dots\dots ①$$

(1) ①において $a = 1$, $b = 2$ とおくと

$$(1+2)^n = {}_nC_0 1^n + {}_nC_1 1^{n-1} \cdot 2^1 \\ + {}_nC_2 1^{n-2} \cdot 2^2 + \dots + {}_nC_n 2^n$$

よって

$$3^n = {}_nC_0 + 2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 + \dots + 2^n \cdot {}_nC_n$$

(2) ①において $a = 1$, $b = -1$ とおくと

$$(1-1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 (-1) + {}_nC_2 (-1)^2 \\ + {}_nC_3 (-1)^3 + \dots + {}_nC_n (-1)^n$$

よって

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \dots + (-1)^n \cdot {}_nC_n$$

3 整式の除法

教科書 P.13

問14

$$\begin{array}{r} x+2 \\ 3x-4 \overline{) 3x^2+2x+1} \\ \underline{3x^2-4x} \\ 6x+1 \\ \underline{6x-8} \\ 9 \end{array}$$

商 $x+2$, 余り 9

$$3x^2+2x+1 = (3x-4)(x+2)+9$$

教科書 P.14

問15 (1)

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ x^2-x-3 \overline{) 2x^3-7x^2+3x+8} \\ \underline{2x^3-2x^2-6x} \\ -5x^2+9x+8 \\ \underline{-5x^2+5x+15} \\ 4x-7 \end{array}$$

商 $2x-5$, 余り $4x-7$

$$(2) \quad \begin{array}{r} 2x^2+x-1 \\ 3x-2 \overline{) 6x^3-x^2-5x+2} \\ \underline{6x^3-4x^2} \\ 3x^2-5x \\ \underline{3x^2-2x} \\ -3x+2 \\ \underline{-3x+2} \\ 0 \end{array}$$

商 $2x^2+x-1$, 余り 0

$$(3) \quad \begin{array}{r} 3x-2 \\ x^2+3x-1 \overline{) 3x^3+7x^2+5} \\ \underline{3x^3+9x^2-3x} \\ -2x^2+3x+5 \\ \underline{-2x^2-6x+2} \\ 9x+3 \end{array}$$

商 $3x-2$, 余り $9x+3$

$$(4) \quad \begin{array}{r} x^2+2x-1 \\ x^2+1 \overline{) x^4+2x^3+3x+2} \\ \underline{x^4+x^2} \\ 2x^3-x^2+3x \\ \underline{2x^3+x^2+2} \\ -x^2-1 \\ \underline{-x^2-1} \\ x+3 \end{array}$$

商 $x^2 + 2x - 1$, 余り $x + 3$

教科書 P.15

問16 $3x^3 + 14x^2 - 4x + 5$

$= B(3x - 1) + (7x + 3)$

が成り立つから

$$B(3x - 1) = (3x^3 + 14x^2 - 4x + 5) - (7x + 3)$$

$$= 3x^3 + 14x^2 - 11x + 2$$

よって, $3x^3 + 14x^2 - 11x + 2$ を $3x - 1$ で割って

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 2 \\ 3x - 1 \overline{) 3x^3 + 14x^2 - 11x + 2} \\ \underline{3x^3 - x^2} \\ 15x^2 - 11x \\ \underline{15x^2 - 5x} \\ -6x + 2 \\ \underline{-6x + 2} \\ 0 \end{array}$$

したがって $B = x^2 + 5x - 2$

問17

$$\begin{array}{r} x^2 - xy - 2y^2 \\ x - y \overline{) x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3} \\ \underline{x^3 - x^2y} \\ -x^2y + xy^2 \\ \underline{-x^2y + xy^2} \\ -2xy^2 + 2y^3 \\ \underline{-2xy^2 + 2y^3} \\ 0 \end{array}$$

商 $x^2 - xy - 2y^2$, 余り 0

4 分数式とその計算

教科書 P.16

問18 (1) $\frac{12a^4bc^2}{15a^3b^3c} = \frac{4ac}{5b^2}$

(2) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{4x^2 - 1} = \frac{(2x - 1)(x + 2)}{(2x - 1)(2x + 1)}$

$$= \frac{x + 2}{2x + 1}$$

(3) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x + 3)}$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x + 3}$$

教科書 P.17

問19 (1) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + x - 2} \times \frac{x - 1}{x^2 + 2x}$

$$= \frac{x(x - 3)}{(x + 2)(x - 1)} \times \frac{x - 1}{x(x + 2)}$$

$$= \frac{x - 3}{(x + 2)^2}$$

(2) $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x + 4} \div \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

$$= \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4x + 4} \times \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)^2} \times \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)}$$

$$= \frac{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)(x - 1)}$$

問20 (1) $\frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 5x + 6} - \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 6}$

$$= \frac{(x^2 + 3x + 1) - (x^2 + x - 3)}{x^2 + 5x + 6}$$

$$= \frac{2(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)}$$

$$= \frac{2}{x + 3}$$

(2) $\frac{x - 1}{x^2 - x} + \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$

$$= \frac{(x - 1) + (x^2 - x + 1)}{x^2 - x}$$

$$= \frac{x^2}{x(x - 1)}$$

$$= \frac{x}{x - 1}$$

教科書 P.18

問21 (1) $\frac{1}{x + 3} + \frac{3}{x - 4}$

$$= \frac{x - 4}{(x + 3)(x - 4)} + \frac{3(x + 3)}{(x + 3)(x - 4)}$$

$$= \frac{(x - 4) + 3(x + 3)}{(x + 3)(x - 4)}$$

$$= \frac{4x + 5}{(x + 3)(x - 4)}$$

(2) $\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{3x}{2x^2 + x - 1}$

$$= \frac{2x}{(x + 1)(x - 1)} - \frac{3x}{(x + 1)(2x - 1)}$$

$$= \frac{2x(2x - 1) - 3x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)(2x - 1)}$$

$$= \frac{x^2 + x}{(x + 1)(x - 1)(2x - 1)}$$

$$= \frac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)(2x - 1)}$$

$$= \frac{x}{(x - 1)(2x - 1)}$$

問22 (1) $\frac{a + 2}{a - \frac{2}{a + 1}}$

$$= (a + 2) \div \left(a - \frac{2}{a + 1} \right)$$

$$= (a + 2) \div \frac{a(a + 1) - 2}{a + 1}$$

$$= (a + 2) \div \frac{a^2 + a - 2}{a + 1}$$

$$= (a + 2) \times \frac{a + 1}{(a + 2)(a - 1)}$$

$$= \frac{a + 1}{a - 1}$$

(別解) $\frac{a + 2}{a - \frac{2}{a + 1}}$

$$= \frac{(a + 2) \times (a + 1)}{\left(a - \frac{2}{a + 1} \right) \times (a + 1)}$$

$$= \frac{(a + 2)(a + 1)}{a(a + 1) - 2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(a+2)(a+1)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a-1} \\
 (2) \quad &\frac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}} \\
 &= \left(1 - \frac{x+y}{x-y}\right) \div \left(1 + \frac{x+y}{x-y}\right) \\
 &= \frac{(x-y) - (x+y)}{x-y} \div \frac{(x-y) + (x+y)}{x-y} \\
 &= \frac{-2y}{x-y} \times \frac{x-y}{2x} \\
 &= -\frac{y}{x} \\
 \text{〔別解〕} \quad &\frac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}} \\
 &= \frac{\left(1 - \frac{x+y}{x-y}\right) \times (x-y)}{\left(1 + \frac{x+y}{x-y}\right) \times (x-y)} \\
 &= \frac{(x-y) - (x+y)}{(x-y) + (x+y)} \\
 &= \frac{-2y}{2x} = -\frac{y}{x}
 \end{aligned}$$

問題

教科書 P.19

- 1 (1) $(2a-3b)^3$
 $= (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot (3b)^2 - (3b)^3$
 $= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- (2) $(4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)$
 $= (4a-3b)\{(4a)^2+4a \cdot 3b+(3b)^2\}$
 $= (4a)^3 - (3b)^3$
 $= 64a^3 - 27b^3$
- 2 (1) $x^3y^3 - 27z^3$
 $= (xy)^3 - (3z)^3$
 $= (xy-3z)\{(xy)^2+xy \cdot 3z+(3z)^2\}$
 $= (xy-3z)(x^2y^2+3xyz+9z^2)$
- (2) $x^3+y^3+3y^2+3y+1$
 $= x^3+(y+1)^3$
 $= \{x+(y+1)\}\{x^2-x(y+1)+(y+1)^2\}$
 $= (x+y+1)(x^2-xy-x+y^2+2y+1)$
- 3 (1) 展開式の一般項は
 ${}_{12}C_r(ax)^{12-r}(-b)^r$
 $= {}_{12}C_r a^{12-r}(-b)^r x^{12-r}$
 x^{11} が現れるのは $12-r=11$ より, $r=1$ のときである。
よって, x^{11} の係数は
 ${}_{12}C_1 a^{11}(-b)^1 = -12a^{11}b$
 x^2 が現れるのは $12-r=2$ より, $r=10$ のときである。
よって, x^2 の係数は

- ${}_{12}C_{10}a^2(-b)^{10} = {}_{12}C_2a^2b^{10} = 66a^2b^{10}$
- (2) $\{(x-2y)+z^2\}^7$ の展開式の一般項は
 ${}_7C_r(x-2y)^{7-r}(z^2)^r$
 $x^2y^3z^4$ が現れるのは $r=2$ のときだけで
 ${}_7C_2(x-2y)^5(z^2)^2$
 $(x-2y)^5$ を展開したときの x^2y^3 の係数は
 ${}_5C_3x^2(-2y)^3 = {}_5C_2(-2)^3x^2y^3 = -80x^2y^3$
より -80 である。
したがって, $x^2y^3z^4$ の係数は
 ${}_7C_2 \cdot (-80) = -1680$
- 〔別解〕 展開式における $x^2y^3z^4$ の項は

$$\frac{7!}{2!3!2!} x^2(-2y)^3(z^2)^2$$

であるから, $x^2y^3z^4$ の係数は

$$\frac{7!}{2!3!2!} \cdot (-2)^3 = -1680$$

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r} 4x+1 \\ 3x^2-x-1 \overline{) 12x^3-x^2+2} \\ \underline{12x^3-4x^2-4x} \\ 3x^2+4x+2 \\ \underline{3x^2-x-1} \\ 5x+3 \end{array}
 \end{array}$$

商 $4x+1$, 余り $5x+3$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \begin{array}{r} 2x^2+x-\frac{1}{3} \\ 3x-1 \overline{) 6x^3+x^2-2x+1} \\ \underline{6x^3-2x^2} \\ 3x^2-2x \\ \underline{3x^2-x} \\ -x+\frac{1}{3} \\ \underline{-x+\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3} \end{array}
 \end{array}$$

商 $2x^2+x-\frac{1}{3}$, 余り $\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad \begin{array}{r} \frac{1}{2}x^2-x+1 \\ 2x-6 \overline{) x^3-5x^2+8x+1} \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -2x^2+8x \\ \underline{-2x^2+6x} \\ 2x+1 \\ \underline{2x-6} \\ 7 \end{array}
 \end{array}$$

商 $\frac{1}{2}x^2-x+1$, 余り 7

$$\begin{aligned}
 5 \quad A &= (2x^2+4x-3)(x-2) + (3x+1) \\
 &= 2x^3-8x+7
 \end{aligned}$$

〔注意〕 $2x^2+4x-3$

$$\begin{array}{r}
 (\times) \quad x-2 \\
 \underline{2x^3+4x^2-3x} \\
 -4x^2-8x+6 \\
 \underline{2x^3-11x+6}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2x^3 - 11x + 6}{+)} \frac{3x + 1}{2x^3 - 8x + 7} \\
6 \quad (1) & \frac{6x^2 + 13xy - 5y^2}{2x^2 - xy - 3y^2} \div \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 5xy + 3y^2} \\
& = \frac{(3x - y)(2x + 5y)}{(2x - 3y)(x + y)} \div \frac{(3x - y)(x + y)}{(2x - 3y)(x - y)} \\
& = \frac{(3x - y)(2x + 5y)}{(2x - 3y)(x + y)} \times \frac{(2x - 3y)(x - y)}{(3x - y)(x + y)} \\
& = \frac{(2x + 5y)(x - y)}{(x + y)^2} \\
(2) & \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x + 9} \times \frac{x^3 - 27}{3x + 9} \div \frac{x^2 - 9}{3x} \\
& = \frac{(x + 3)^2}{x^2 + 3x + 9} \times \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{3(x + 3)} \\
& \quad \times \frac{3x}{(x + 3)(x - 3)} \\
& = x \\
(3) & \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} \\
& = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2}{x^2 + 1} \\
& = \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2}{x^2 + 1} \\
& = \frac{2(x^2 + 1) - 2(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \\
& = \frac{2(x^2 + 1) - 2(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \\
& = \frac{4}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)} \\
(4) & \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x + 2} \right) \div \left(\frac{2}{x + 2} - \frac{3}{x + 3} \right) \\
& = \frac{(x + 2) - 2(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} \div \frac{2(x + 3) - 3(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)} \\
& = \frac{-x}{(x + 1)(x + 2)} \times \frac{(x + 2)(x + 3)}{-x} \\
& = \frac{x + 3}{x + 1} \\
(5) & 1 + \frac{1}{a + 1} = \frac{(a + 1) + 1}{a + 1} = \frac{a + 2}{a + 1} \\
& \text{よって} \\
& \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a + 1}}} = \frac{1}{1 + \frac{a + 1}{a + 2}} \\
& = 1 \div \left(1 + \frac{a + 1}{a + 2} \right) \\
& = 1 \div \frac{a + 2 + a + 1}{a + 2} \\
& = 1 \div \frac{2a + 3}{a + 2} \\
& = \frac{a + 2}{2a + 3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{〔別解〕} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a + 1}}} \\
& = \frac{1}{1 + \frac{1 \times (a + 1)}{\left(1 + \frac{1}{a + 1}\right) \times (a + 1)}} \\
& = \frac{1}{1 + \frac{a + 1}{(a + 1) + 1}} \\
& = \frac{1 \times (a + 2)}{\left(1 + \frac{a + 1}{a + 2}\right) \times (a + 2)} \\
& = \frac{a + 2}{(a + 2) + (a + 1)} = \frac{a + 2}{2a + 3}
\end{aligned}$$

2 節 2次方程式

1 複素数とその演算

教科書 P.20

- 問1 (1) 実部 -1 , 虚部 $\sqrt{3}$
 (2) 実部 2 , 虚部 -1
 (3) 実部 0 , 虚部 $\sqrt{7}$
 (4) 実部 -5 , 虚部 0

教科書 P.21

問2 (1) x, y が実数であるから, $3x + 2y, -3y$ も実数である。

$$\begin{aligned}
& \text{したがって} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 9 = -3y \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 4, y = -3$$

(2) x, y が実数であるから, $3x - y - 3, 7x - 2y - 8$ も実数である。

$$\begin{aligned}
& \text{したがって} \quad \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ 7x - 2y - 8 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{これを解いて} \quad x = 2, y = 3$$

問3 (1) $8i - 7i = i$

$$(2) -5i \cdot (-4i) = 20i^2 = 20 \cdot (-1) = -20$$

$$(3) (-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$(4) i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

教科書 P.22

問4 (1) $(4 + 5i) + (3 - 2i) = 7 + 3i$

$$(2) (2 - 4i) - (1 - i) = 1 - 3i$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad (5 + 3i)(2 - 7i) &= 10 - 35i + 6i - 21i^2 \\
&= 10 - 29i - 21 \cdot (-1) \\
&= 31 - 29i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad (4 + 3i)(4 - 3i) &= 16 - 9i^2 \\
&= 16 - 9 \cdot (-1) = 25
\end{aligned}$$

問5 (1) $3 - 2i$ (2) $\sqrt{5} + \sqrt{2}i$ (3) -4
 (4) $-3i$

$$\begin{aligned}
\text{問6 (1)} \quad \frac{1}{3 - i} &= \frac{3 + i}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{9 - i^2} \\
&= \frac{3 + i}{9 + 1} = \frac{3 + i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \\
 &= \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1-2i-1}{1+1} \\
 &= \frac{-2i}{2} = -i \\
 (3) \quad \frac{2+i}{1+2i} &= \frac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\
 &= \frac{2-4i+i-2i^2}{1-4i^2} = \frac{2-3i+2}{1+4} \\
 &= \frac{4-3i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i \\
 (4) \quad \frac{1}{i} &= \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i
 \end{aligned}$$

教科書 P.23

問7 $i^2 = -1$ より $x^2 = 5i^2$
 $x^2 - 5i^2 = 0$
 $(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5}i) = 0$
 よって
 $x - \sqrt{5}i = 0$ または $x + \sqrt{5}i = 0$
 したがって $x = \pm\sqrt{5}i$
 すなわち、 -5 の平方根は $\sqrt{5}i$ と $-\sqrt{5}i$ である。

教科書 P.24

問8 (1) $\sqrt{-8} = \sqrt{8}i = 2\sqrt{2}i$
 (2) $-\sqrt{-50} = -\sqrt{50}i = -5\sqrt{2}i$
 (3) $\sqrt{-\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}}i = \frac{\sqrt{7}}{4}i$
 問9 $\sqrt{-18} = \sqrt{18}i = 3\sqrt{2}i$
 $-\sqrt{-18} = -\sqrt{18}i = -3\sqrt{2}i$
 よって $3\sqrt{2}i$ と $-3\sqrt{2}i$
 問10 (1) $\sqrt{-48} - \sqrt{-12} = \sqrt{48}i - \sqrt{12}i$
 $= 4\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$
 (2) $\sqrt{-28} \times \sqrt{-35} = 2\sqrt{7}i \times \sqrt{35}i$
 $= 14\sqrt{5}i^2 = -14\sqrt{5}$
 (3) $\frac{6}{\sqrt{-4}} = \frac{6}{2i} = \frac{3}{i} = \frac{3i}{i^2} = \frac{3i}{-1} = -3i$

2 解の公式

教科書 P.25

問11 (1) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$
 (2) $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5}$
 $= \frac{6 \pm \sqrt{-44}}{10} = \frac{6 \pm 2\sqrt{11}i}{10}$
 $= \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{5}$

(別解) $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 5 \cdot 4}}{5}$
 $= \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{5}$

(3) $x = \frac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
 $= \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$

(4) 整理して $4x^2 - 4x + 1 = 0$
 $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$
 $= \frac{1}{2}$

(別解) $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1}}{4} = \frac{1}{2}$

教科書 P.27

問12 (1) $D = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 41 > 0$
 であるから、異なる2つの実数解をもつ。
 (2) $\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot 4 = -3 < 0$
 であるから、異なる2つの虚数解をもつ。
 (3) $\frac{D}{4} = 14^2 - 49 \cdot 4 = 0$
 であるから、重解をもつ。

問13 この2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
 D &= (3k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2k^2-1) \\
 &= k^2 - 6k + 5 \\
 &= (k-1)(k-5)
 \end{aligned}$$

よって、方程式の解は次のようになる。

$D > 0$ すなわち $k < 1, 5 < k$ のとき
 異なる2つの実数解
 $D = 0$ すなわち $k = 1, 5$ のとき
 重解
 $D < 0$ すなわち $1 < k < 5$ のとき
 異なる2つの虚数解

問14 2次方程式 $x^2 + 2kx + 2k + 3 = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{4} &= k^2 - 1 \cdot (2k+3) \\
 &= k^2 - 2k - 3 \\
 &= (k+1)(k-3)
 \end{aligned}$$

重解をもつ条件は $D = 0$ であるから

$$(k+1)(k-3) = 0$$

よって $k = -1, 3$

また、解の公式により、 $D = 0$ のとき重解は

$$x = \frac{-k}{1} = -k$$

であるから、

$k = -1$ のとき $x = -(-1) = 1$
 $k = 3$ のとき $x = -3$

3 解と係数の関係

教科書 P.28

問15 (1) 2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = -2$$

よって 和 $-\frac{3}{2}$, 積 -2

(2) 2つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 2$$

よって 和 1 , 積 2

教科書 P.29

問16 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 5 \text{ であるから}$$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 5 = 6$$

$$(2) (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4$$

$$(3) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4^3 - 3 \cdot 5 \cdot 4 = 4$$

$$(4) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{6}{5}$$

問17 2つの解を $\alpha, \alpha+1$ とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha + (\alpha + 1) = -\frac{m}{4} \quad \dots\dots ①$$

$$\alpha \cdot (\alpha + 1) = \frac{3}{4} \quad \dots\dots ②$$

$$\textcircled{2} \text{ より } 4\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0 \\ (2\alpha - 1)(2\alpha + 3) = 0$$

$$\text{よって } \alpha = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

したがって、①より

$$m = -4(2\alpha + 1) = -8, 8$$

教科書 P.30

問18 (1) $x^2 - x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

よって

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

(2) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{2}i}{3}$

よって

$$3x^2 - 2x + 1 = 3\left(x - \frac{1 + \sqrt{2}i}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}\right)$$

(3) $x^2 - 5 = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{5}$

$$\text{よって } x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

(4) $x^2 + 4 = 0$ の解は $x = \pm 2i$

$$\text{よって } x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$$

教科書 P.31

問19 (1) $(x^2 + 2)(x^2 - 3)$

$$(2) (x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$(3) (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

問20 (1) $1 + (-2) = -1, 1 \cdot (-2) = -2$ より

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(2) (2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5}) = 4$$

$$(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = -1 \text{ より}$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$(3) (-5 + i) + (-5 - i) = -10$$

$$(-5 + i)(-5 - i) = 26 \text{ より}$$

$$x^2 + 10x + 26 = 0$$

教科書 P.32

問21 (1) 2数は2次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$

の2つの解であるから

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ と } \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

(2) 2数は2次方程式 $x^2 + 8x + 11 = 0$

の2つの解であるから

$$-4 + \sqrt{5} \text{ と } -4 - \sqrt{5}$$

問22 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$$(1) (2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2 \cdot (-2) - 2 = -6$$

$$(2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 1 = 17$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + 6x + 17 = 0$$

$$(2) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{3}$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

両辺に3を掛けて

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(3) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 3^2 = 9$$

よって、求める2次方程式の1つは

$$x^2 + 2x + 9 = 0$$

教科書 P.34

問23 2つの解を α, β , 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - 1 \cdot (-2k+6)$$

$$= k^2 + 4k - 5 = (k+5)(k-1)$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2(k+1), \alpha\beta = -2k+6$$

$$(1) \frac{D}{4} > 0 \text{ より } k < -5, 1 < k \quad \dots\dots ①$$

$$\alpha + \beta < 0 \text{ より } k > -1 \quad \dots\dots ②$$

$$\alpha\beta > 0 \text{ より } k < 3 \quad \dots\dots ③$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } 1 < k < 3$$

$$(2) \alpha\beta < 0 \text{ より } k > 3$$

7 $(2+3i)a + (3-i)b = 7+5i$ より

$$(2a+3b) + (3a-b)i = 7+5i$$

a, b は実数であるから

$$\begin{cases} 2a+3b=7 \\ 3a-b=5 \end{cases}$$

これを解いて $a=2, b=1$

8 (1) $\sqrt{-98} - \sqrt{-72} + \sqrt{-50}$

$$= 7\sqrt{2}i - 6\sqrt{2}i + 5\sqrt{2}i = 6\sqrt{2}i$$

(2) $(5-2i)^2 = 25 - 20i + 4i^2$

$$= 21 - 20i$$

(3) $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{(2-i)(2+i)}$

$$= \frac{(3+4i) + (3-4i)}{5} = \frac{6}{5}$$

(4) $\frac{(2-i)^2}{2+3i} = \frac{3-4i}{2+3i}$

$$= \frac{(3-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$= \frac{-6-17i}{13} = -\frac{6}{13} - \frac{17}{13}i$$

9 $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ (a, b, c, d は実数) とおくと

(1) $\overline{\alpha+\beta} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$

$$= \overline{(a+c) + (b+d)i}$$

$$= (a+c) - (b+d)i$$

$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = (a-bi) + (c-di)$$

$$= (a+c) - (b+d)i$$

よって $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+bi) \cdot (c+di)}$

$$= \overline{(ac-bd) + (ad+bc)i}$$

$$= (ac-bd) - (ad+bc)i$$

$$\overline{\alpha} \overline{\beta} = (a-bi)(c-di)$$

$$= (ac-bd) - (ad+bc)i$$

よって $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$

(参考) (1) $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, (2) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$ の他に

(3) a が実数のとき $\overline{aa} = a\overline{a}$

(2) において, $\beta = \alpha$ とすると

(2)' $\overline{\alpha^2} = \overline{\alpha} \overline{\alpha}$

一般に $\overline{\alpha^n} = \underbrace{\overline{\alpha} \overline{\alpha} \cdots \overline{\alpha}}_{n \text{ 個}} = (\overline{\alpha})^n$

が成り立つ。

これを用いると, 教科書 p.42 の「係数が実数である高次方程式が虚数解 α をもつならば, それと共役な $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である」ことを証明することができる。

3次方程式について証明してみよう。

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が虚数解 α

を解にもつとすると

$$a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0$$

複素数 z が $z = 0$ のとき, $\overline{z} = 0$ であるから

$$\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = 0$$

(1) の性質を用いて

$$\overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = 0$$

(3) の性質を用いて

$$a\overline{\alpha^3} + b\overline{\alpha^2} + c\overline{\alpha} + d = 0$$

(2)' の性質を用いて

$$a\overline{\alpha} \overline{\alpha} \overline{\alpha} + b\overline{\alpha} \overline{\alpha} + c\overline{\alpha} + d = 0$$

すなわち

$$a(\overline{\alpha})^3 + b(\overline{\alpha})^2 + c\overline{\alpha} + d = 0$$

これは α と共役な虚数 $\overline{\alpha}$ が

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解であることを示している。

10 (1) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}i = 6i$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-36} = 6i$$

よって $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

また $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{i}{2}$$

よって $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \sqrt{\frac{a}{b}}$

(2) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{2}i \cdot \sqrt{5}i = -\sqrt{10}$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{10}$$

よって $\sqrt{a}\sqrt{b} \neq \sqrt{ab}$

また $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

よって $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

11 (1) $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{14}i}{4}$$

(2) $(x^2 - 10x + 25) + (x^2 + 4x + 4) = x^2 + 6x + 9$

整理して $x^2 - 12x + 20 = 0$

$$(x-2)(x-10) = 0$$

ゆえに $x = 2, 10$

12 判別式を D とすると, 虚数解をもつ条件は $D < 0$ である。

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 2(k^2 - 3k - 8)$$

$$= -k^2 + 6k + 16 = -(k+2)(k-8)$$

よって $-(k+2)(k-8) < 0$

$$(k+2)(k-8) > 0$$

ゆえに $k < -2, 8 < k$

13 解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \\ &= 2^2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \\ (2) \quad \frac{\beta}{\alpha-2} + \frac{\alpha}{\beta-2} &= \frac{\beta(\beta-2) + \alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\beta-2)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 4} \\ &= \frac{2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 2}{\frac{1}{2} - 2 \cdot 2 + 4} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\ &= \left(2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

14 (1) 解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -m, \alpha\beta = 1 \\ \text{よって} \\ (\alpha-3) + (\beta-3) &= (\alpha + \beta) - 6 \\ &= -m - 6 \\ (\alpha-3)(\beta-3) &= \alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9 \\ &= 3m + 10 \end{aligned}$$

したがって、 $\alpha-3, \beta-3$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 + (m+6)x + 3m + 10 = 0$$

(2) (1) で求めた 2 次方程式の 2 つの解を α', β' , すなわち

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 3, \beta' = \beta - 3 \\ \text{とおくと, } \alpha, \beta \text{ がともに } 3 \text{ より小さくなるため} \\ \text{には, } \alpha', \beta' \text{ がともに負の実数であればよいか} \\ \text{ら, 2 次方程式 } x^2 + (m+6)x + 3m + 10 = 0 \text{ の} \\ \text{判別式を } D \text{ とすると} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \alpha' + \beta' &< 0 \\ \alpha'\beta' &> 0 \end{aligned}$$

となればよい。

$$\begin{aligned} D &= (m+6)^2 - 4(3m+10) \\ &= m^2 - 4 \geq 0 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ①$$

$$\begin{aligned} \text{よって } m &\leq -2, 2 \leq m \\ \alpha' + \beta' &= -(m+6) < 0 \text{ より} \\ m &> -6 \end{aligned} \quad \cdots \cdots ②$$

$$\begin{aligned} \alpha'\beta' &= 3m + 10 > 0 \text{ より} \\ m &> -\frac{10}{3} \end{aligned} \quad \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③ より

$$-\frac{10}{3} < m \leq -2, 2 \leq m$$

3 節 高次方程式

1 因数定理

教科書 P.36

問 1 (1) $P(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 = -1$

(2) $P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot \sqrt{3} + 1 = 1$

(3) $P\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{27}$

問 2 第 1 式を $P(x)$ とする。

(1) $x-2$ で割った余りは

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 3 = 15$$

(2) $x+4$ で割った余りは

$$P(-4) = (-4)^3 + 2 \cdot (-4)^2 - 6 \cdot (-4) + 1 = -7$$

教科書 P.37

問 3 (1) 整式 $P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とすると

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

$$x = -\frac{b}{a} \text{ を代入すると}$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R = R$$

$$\text{よって } R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

(2) $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 7$ とおくと,

$$2x-3 \text{ で割った余りは}$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7 = 2$$

問 4 剰余の定理により, $P(-3) = -5$ であるから

$$(-3)^3 - 3a \cdot (-3) + 4 = -5$$

$$\text{よって } a = 2$$

問 5 $P(x)$ を $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x) = (x-4)(x+3)Q(x) + ax + b$$

剰余の定理により

$$P(4) = 4a + b = 1$$

$$P(-3) = -3a + b = 8$$

$$\text{これを解いて } a = -1, b = 5$$

$$\text{よって, 求める余りは } -x + 5$$

教科書 P.38

問 6 (1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とする。

$$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

$$P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 6 = -24 \neq 0$$

よって, $x-3$ を因数にもつが, $x+3$ を因数にもたない。

(2) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 9$ とする。

$$P(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 18 \cdot 3 - 9 = 0$$

$$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 18 \cdot (-3) - 9 = 0$$

よって, $x-3$ も $x+3$ も因数にもつ。

問7 (1) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ とおくと、

$P(1) = 0$ より、 $x - 1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ x-1 \overline{) x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -5x^2 + 11x \\ \underline{-5x^2 + 5x} \\ 6x - 6 \\ \underline{6x - 6} \\ 0 \end{array}$$

〔別解〕教科書 p.56 の組立除法を用いると

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ + & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

上の計算より

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ = (x-1)(x^2 - 5x + 6) \\ = (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

(2) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ とおくと、

$P(1) = 0$ より、 $x - 1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 4 \\ x-1 \overline{) x^3 + 3x^2 - 4} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 4x^2 \\ \underline{4x^2 - 4x} \\ 4x - 4 \\ \underline{4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

〔別解〕組立除法を用いると

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ + & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

上の計算より

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4 \\ = (x-1)(x^2 + 4x + 4) \\ = (x-1)(x+2)^2 \end{aligned}$$

(3) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$ とおくと、

$P(2) = 0$ より、 $x - 2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 10x + 3 \\ x-2 \overline{) 3x^3 + 4x^2 - 17x - 6} \\ \underline{3x^3 - 6x^2} \\ 10x^2 - 17x \\ \underline{10x^2 - 20x} \\ 3x - 6 \\ \underline{3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

〔別解〕組立除法を用いると

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & 4 & -17 & -6 \\ + & & 6 & 20 & 6 \\ \hline & 3 & 10 & 3 & 0 \end{array}$$

上の計算より

$$\begin{aligned} 3x^3 + 4x^2 - 17x - 6 \\ = (x-2)(3x^2 + 10x + 3) \end{aligned}$$

$$= (x-2)(x+3)(3x+1)$$

2 簡単な高次方程式

教科書 P.39

問8 (1) $x^3 - 8 = 0$ より

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

これを解くと

$$x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$$

(2) $x^3 + 1 = 0$ より

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

これを解くと

$$x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(3) $x^4 + 8x = 0$ より

$$x(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

これを解くと

$$x = 0, -2, 1 \pm \sqrt{3}i$$

問9 (1) 1 の 3 乗根は $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

(i) $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

となり、 ω^2 はもう 1 つの 1 の虚数の 3 乗根となる。

(ii) $\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ となり、} \omega^2 \text{ はもう 1 つの 1 の虚数の 3 乗根となる。}$$

(i), (ii) より、 ω を $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ としても、

$$\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ としても、1 の 3 乗根は } 1, \omega, \omega^2 \text{ の 3 つである。}$$

(2) ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるから

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

〔別解〕(1) より、 ω が $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ にしろ

$$\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ にしろ}$$

$$\omega^2 + \omega + 1$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + 1 = 0$$

教科書 P.40

問10 (1) $(x^2)^2 - 3x^2 + 2 = 0$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

よって $x^2 = 1, 2$

$$\text{ゆえに } x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$$

(2) $(x^2)^2 + 3x^2 - 28 = 0$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 7) = 0$$

$$\text{よって } x^2 = 4, -7$$

$$\text{ゆえに } x = \pm 2, \pm\sqrt{7}i$$

問11 (1) $P(x) = x^3 - 8x + 8$ とおくと、

$P(2) = 0$ より、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^2+2x-4 \\ x-2 \overline{) x^3-8x+8} \\ \underline{x^3-2x^2} \\ 2x^2-8x \\ \underline{2x^2-4x} \\ -4x+8 \\ \underline{-4x+8} \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \text{〔別解〕} & 2 & 1 & 0 & -8 & 8 \\ + & & 2 & 4 & -8 & \\ \hline & 1 & 2 & -4 & 0 & \end{array} \right]$$

上の計算より

$$P(x) = (x-2)(x^2+2x-4)$$

よって

$$(x-2)(x^2+2x-4) = 0$$

$$\text{ゆえに } x = 2, -1 \pm \sqrt{5}$$

(2) $P(x) = 6x^3 + 4x^2 - x + 1$ とおくと、

$P(-1) = 0$ より、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} 6x^2-2x+1 \\ x+1 \overline{) 6x^3+4x^2-x+1} \\ \underline{6x^3+6x^2} \\ -2x^2-x \\ \underline{-2x^2-2x} \\ x+1 \\ \underline{x+1} \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \text{〔別解〕} & -1 & 6 & 4 & -1 & 1 \\ + & & -6 & 2 & -1 & \\ \hline & 6 & -2 & 1 & 0 & \end{array} \right]$$

上の計算より

$$P(x) = (x+1)(6x^2-2x+1)$$

よって

$$(x+1)(6x^2-2x+1) = 0$$

$$\text{ゆえに } x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}i}{6}$$

教科書 P.41

問12 (1) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ とおく。

$$P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 12 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^3-7x-6 \\ x-2 \overline{) x^4-2x^3-7x^2+8x+12} \\ \underline{x^4-2x^3} \\ -7x^2+8x \\ \underline{-7x^2+14x} \\ -6x+12 \\ \underline{-6x+12} \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} \text{〔別解〕} & 2 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ + & & 2 & 0 & -14 & -12 & \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 & \end{array} \right]$$

上の計算より

$$P(x) = (x-2)(x^3-7x-6)$$

ここで、 $Q(x) = x^3-7x-6$ とおくと

$$Q(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = 0$$

であるから、 $Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^2-x-6 \\ x+1 \overline{) x^3-7x-6} \\ \underline{x^3+x^2} \\ -x^2-7x \\ \underline{-x^2-x} \\ -6x-6 \\ \underline{-6x-6} \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \text{〔別解〕} & -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ + & & -1 & 1 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array} \right]$$

上の計算より

$$Q(x) = (x+1)(x^2-x-6)$$

このとき

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x+1)(x^2-x-6) \\ &= (x-2)(x+1)(x-3)(x+2) \end{aligned}$$

よって $(x-2)(x+1)(x-3)(x+2) = 0$

$$\text{ゆえに } x = -2, -1, 2, 3$$

(2) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$

とおく。

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} 2x^3+3x^2-3x-2 \\ x-1 \overline{) 2x^4+x^3-6x^2+x+2} \\ \underline{2x^4-2x^3} \\ 3x^3-6x^2 \\ \underline{3x^3-3x^2} \\ -3x^2+x \\ \underline{-3x^2+3x} \\ -2x+2 \\ \underline{-2x+2} \\ 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccc} \text{〔別解〕} & 1 & 2 & 1 & -6 & 1 & 2 \\ + & & 2 & 3 & -3 & -2 & \\ \hline & 2 & 3 & -3 & -2 & 0 & \end{array} \right]$$

上の計算より

$$P(x) = (x-1)(2x^3+3x^2-3x-2)$$

ここで、 $Q(x) = 2x^3+3x^2-3x-2$ とおくと

$$Q(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2 = 0$$

であるから、 $Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 5x + 2 \\
 x-1 \overline{) 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2} \\
 \underline{2x^3 - 2x^2} \\
 5x^2 - 3x \\
 \underline{5x^2 - 5x} \\
 2x - 2 \\
 \underline{2x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \text{別解} & 1 & 2 & 3 & -3 & -2 \\ \hline & + & & 2 & 5 & 2 \\ \hline & & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

上の計算より

$$Q(x) = (x-1)(2x^2+5x+2)$$

このとき

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x-1)^2(2x^2+5x+2) \\
 &= (x-1)^2(2x+1)(x+2)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } (x-1)^2(2x+1)(x+2) = 0$$

$$\text{ゆえに } x = 1, -\frac{1}{2}, -2$$

〔別解〕(偶数次数(この場合は4次)の相反方程式($ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$)は両辺を x^2 で割って解くことができる。)

$x=0$ はこの方程式の解ではないので、両辺を x^2 で割ると

$$2x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$2\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0$$

$$\left\{2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5\right\}\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\right\} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \quad x + \frac{1}{x} = 2$$

$x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ の両辺に $2x$ を掛けて整理すると

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$(2x+1)(x+2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, -2$$

$x + \frac{1}{x} = 2$ の両辺に x を掛けて整理すると

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

以上より、求める解は $x = 1, -\frac{1}{2}, -2$

問13 (1) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ とおく。

$$P(2) = 2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 6 \\
 x-2 \overline{) x^3 - x^2 - 8x + 12} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 x^2 - 8x \\
 \underline{x^2 - 2x} \\
 -6x + 12 \\
 \underline{-6x + 12} \\
 0
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \text{別解} & 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ \hline & + & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right]$$

上の計算より

$$P(x) = (x-2)(x^2+x-6)$$

$$\text{よって } (x-2)(x^2+x-6) = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$\text{ゆえに } x = 2, -3$$

(2) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ とおく。

$$\begin{aligned}
 P(-1) &= (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

であるから、 $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 2x + 1 \\
 x+1 \overline{) x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 2x^2 + 3x \\
 \underline{2x^2 + 2x} \\
 x + 1 \\
 \underline{x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} \text{別解} & -1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline & + & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

上の計算より

$$P(x) = (x+1)(x^2+2x+1)$$

$$\text{よって } (x+1)(x^2+2x+1) = 0$$

$$(x+1)^3 = 0$$

$$\text{ゆえに } x = -1$$

〔注意〕 左辺を $(x+1)^3$ と因数分解して解いてもよい。

教科書 P.42

問14 $x = 2-i$ が方程式の解であるから

$$(2-i)^3 + a(2-i)^2 + b(2-i) - 5 = 0$$

$$2 - 11i + a(3-4i) + b(2-i) - 5 = 0$$

$$(3a+2b-3) - (4a+b+11)i = 0$$

a, b は実数であるから

$$\begin{cases} 3a+2b-3=0 \\ 4a+b+11=0 \end{cases}$$

$$4a+b+11=0$$

これを解いて

$$a = -5, b = 9$$

このとき、もとの方程式は

$$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$$

$$(x-1)(x^2-4x+5)=0$$

よって $x=1, 2+i$

ゆえに、他の解は $x=1, 2+i$

【別解1】教科書 p.42 の「係数が実数である高次方程式が虚数解 $a+bi$ をもつならば、それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である」ことを用いると、 $x=2+i$ も解であることがわかる。 $x=2+i$ を解とする2次方程式で、 x^2 の係数が1のものは

$$(2+i)+(2-i)=4$$

$$(2+i)(2-i)=5$$

であるから $x^2-4x+5=0$

残りの解を γ とすると、 $x=2+i, \gamma$ を解とする3次方程式で、 x^3 の係数が1のものは

$$(x-\gamma)(x^2-4x+5)=0$$

すなわち

$$x^3-(\gamma+4)x^2+(4\gamma+5)x-5\gamma=0$$

係数を比較して

$$-(\gamma+4)=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$4\gamma+5=b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$-5\gamma=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③より $\gamma=1$

①, ②に代入して $a=-5, b=9$

【別解2】さらに、教科書 p.57 の「発展 3次方程式の解と係数の関係」を用いると、残りの解を γ として

$$(2+i)+(2-i)+\gamma=-a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(2+i)(2-i)+(2-i)\gamma+\gamma(2+i)=b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(2+i)(2-i)\gamma=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。

③より $\gamma=1$

①, ②に代入して $a=-5, b=9$

問題

教科書 P.43

15 (1) $P(x)=x^3-ax^2-5x-6$ とおくと、

$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるから

$$P(-2)=-4a-4=0$$

よって $a=-1$

(2) $P(x)=x^3+ax+a+1$ とおくと、

$P(x)$ が $x-4$ で割り切れるから

$$P(4)=5a+65=0$$

よって $a=-13$

(3) $P(x)=ax^3-2x^2-12x+8$ とおくと、

$P(x)$ が $3x-2$ で割り切れるから

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}a-\frac{8}{9}=0$$

よって $a=3$

16 $P(x)=ax^3+bx^2-8x-7$ が

$x+1$ で割り切れるから $P(-1)=0$

$x-2$ で割った余りが -3 より $P(2)=-3$

よって

$$\begin{cases} -a+b+1=0 \\ 8a+4b-23=-3 \end{cases}$$

これを解いて $a=2, b=1$

17 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+5x+7$$

よって、 $P(x)$ を $x+1$ で割った余りは

$$P(-1)=(-1+1)(-1-2)Q(-1)+5\cdot(-1)+7=2$$

18 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$ である。

$$(1) \omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1=0$$

$$(2) \frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2}{\omega^3}=\omega^2, \frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega}{\omega^3}=\omega \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=(\omega^2+\omega+1)-1=-1$$

19 (1) $(x^2)^2-2x^2-8=0$

$$(x^2-4)(x^2+2)=0$$

$$x^2=4, -2$$

よって $x=\pm 2, \pm\sqrt{2}i$

$$(2) \{(x^2-x)-6\}\{(x^2-x)+2\}=0$$

$$(x^2-x-6)(x^2-x+2)=0$$

$$(x+2)(x-3)(x^2-x+2)=0$$

よって $x=-2, 3, \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$$(3) P(x)=x^3-2x^2-2x+4 \text{ とおく。}$$

$$P(2)=2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+4=0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x-2)(x^2-2)$$

$$(x-2)(x^2-2)=0$$

よって $x=2, \pm\sqrt{2}$

$$\text{【別解】 } x^3-2x^2-2x+4$$

$$=x^2(x-2)-2(x-2)$$

$$=(x-2)(x^2-2)$$

と因数分解してもよい。

$$(4) P(x)=2x^3-3x^2-11x+6 \text{ とおく。}$$

$$P(-2)=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-11\cdot(-2)+6=0$$

であるから、 $P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x+2)(2x^2-7x+3)$$

$$\text{よって } (x+2)(2x^2-7x+3)=0$$

$$(x+2)(2x-1)(x-3)=0$$

ゆえに $x=-2, \frac{1}{2}, 3$

$$(5) P(x)=12x^4-16x^3+x^2+4x-1 \text{ とおく。}$$

$$P(1)=12\cdot 1^4-16\cdot 1^3+1^2+4\cdot 1-1=0$$

であるから、 $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$P(x)=(x-1)(12x^3-4x^2-3x+1)$$

ここで、 $Q(x)=12x^3-4x^2-3x+1$ とおくと

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

$$= 0$$

であるから、 $Q(x)$ は $2x-1$ を因数にもつ。

$$Q(x) = (2x-1)(6x^2+x-1)$$

このとき

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(2x-1)(6x^2+x-1) \\ &= (x-1)(2x-1)(2x+1)(3x-1) \end{aligned}$$

$$\text{よって } (x-1)(2x-1)(2x+1)(3x-1) = 0$$

$$\text{ゆえに } x = 1, \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{〔注意〕 } Q(x) &= 4x^2(3x-1) - (3x-1) \\ &= (4x^2-1)(3x-1) \\ &= (2x+1)(2x-1)(3x-1) \end{aligned}$$

と因数分解することもできる。

- 20** $x = 1 + \sqrt{2}i$ が方程式の解であるから

$$(1 + \sqrt{2}i)^3 + a(1 + \sqrt{2}i) + b = 0$$

$$\text{すなわち } -5 + \sqrt{2}i + a + \sqrt{2}ai + b = 0$$

実部と虚部に整理すると

$$(a+b-5) + \sqrt{2}(a+1)i = 0$$

a, b は実数であるから

$$a+b-5=0, \quad a+1=0$$

これを解いて $a = -1, b = 6$

このとき、もとの方程式は $x^3 - x + 6 = 0$

左辺を因数分解して $(x+2)(x^2-2x+3) = 0$

$$\text{ゆえに } x = -2, 1 \pm \sqrt{2}i$$

よって、他の解は $x = -2, 1 - \sqrt{2}i$

〔別解〕 問 14 と同様にして解くこともできる。

- 21** $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ とおく。

(1) 方程式 $P(x) = 0$ が 1 と -2 を解にもつから

$$P(1) = 0, \quad P(-2) = 0$$

よって

$$P(1) = a + b - 5 = 0$$

$$P(-2) = 4a - 2b - 14 = 0$$

これを解いて $a = 4, b = 1$

このとき、もとの方程式は

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$

左辺は $(x-1)(x+2)$ 、すなわち

$$x^2 + x - 2$$

を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^3 + x - 2 \quad \overline{) \quad x^3 + 4x^2 + x - 6} \\ \underline{x^3 + x^2 - 2x} \\ 3x^2 + 3x - 6 \\ \underline{3x^2 + 3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

上の計算より、もとの方程式の左辺は

$$(x-1)(x+2)(x+3) = 0$$

と、因数分解される。

よって、他の解は $x = -3$

〔別解〕 (教科書 p.57「発展 3 次方程式の解と係数の関係」を用いると)

他の解を γ として

$$\begin{cases} 1 + (-2) + \gamma = -a & \cdots \cdots \text{①} \\ 1 \cdot (-2) + (-2)\gamma + \gamma \cdot 1 = b & \cdots \cdots \text{②} \\ 1 \cdot (-2) \cdot \gamma = 6 & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

③ より $\gamma = -3$

これを ①, ② に代入して

$$a = 4, \quad b = 1$$

(2) 方程式 $P(x) = 0$ の他の解を γ とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-\gamma)(x+1)^2 \\ &= x^3 + (2-\gamma)x^2 + (1-2\gamma)x - \gamma \end{aligned}$$

係数を比較して

$$2-\gamma = a, \quad 1-2\gamma = b, \quad -\gamma = -6$$

これを解いて

$$a = -4, \quad b = -11 \quad \text{他の解は } x = 6$$

〔別解 1〕 $P(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \quad \overline{) \quad x^3 + ax^2 + bx - 6} \\ \underline{x^3 + 2x^2 + x} \\ (a-2)x^2 + (b-1)x - 6 \\ \underline{(a-2)x^2 + (2a-4)x + a-2} \\ (-2a+b+3)x - a-4 \end{array}$$

$$\begin{cases} -2a+b+3=0 \\ -a-4=0 \end{cases}$$

これを解いて $a = -4, b = -11$

このとき

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x+a-2) \\ &= (x+1)^2(x-6) \end{aligned}$$

よって、他の解は $x = 6$

〔別解 2〕 方程式 $P(x) = 0$ が $x = -1$ を解に

$$\text{もつから } P(-1) = 0$$

よって

$$P(-1) = a - b - 7 = 0$$

これより、 $b = a - 7$ であるから

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + ax^2 + (a-7)x - 6 \\ &= a(x^2+x) + x^3 - 7x - 6 \\ &= ax(x+1) + (x+1)(x^2-x-6) \\ &= (x+1)\{ax + (x^2-x-6)\} \\ &= (x+1)\{x^2 + (a-1)x - 6\} \end{aligned}$$

$Q(x) = x^2 + (a-1)x - 6$ とおくと、 $Q(x)$ は

$x = -1$ を解にもつから

$$Q(-1) = 0$$

よって

$$Q(-1) = -a - 4 = 0$$

したがって $a = -4$

$$b = a - 7 = -11$$

このとき

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 5x - 6 \\ &= (x+1)(x-6) \end{aligned}$$

であるから

$$P(x) = (x+1)Q(x) = (x+1)^2(x-6)$$

ゆえに、他の解は $x = 6$

4 節 式と証明

1 恒等式

教科書 P.45

問1 左辺を整理すると

$$(a+b+c)x^2 + (-3a-5b-4c)x + 2a+6b+3c = 3x+5$$

この等式が恒等式となるためには

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0 \\ -3a-5b-4c &= 3 \\ 2a+6b+3c &= 5 \end{aligned}$$

これを解いて $a=7, b=4, c=-11$

〔別解〕 $x=1, 2, 3$ をそれぞれ代入すると

$$2b=8, -c=11, 2a=14$$

よって $a=7, b=4, c=-11$

逆に、これらを等式に代入すると、左辺 = 右辺 となって、 x についての恒等式となる。

したがって $a=7, b=4, c=-11$

教科書 P.46

問2 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ より

両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けると

$$4x-13=a(x-2)+b(x+3)$$

右辺を整理すると

$$4x-13=(a+b)x+(-2a+3b)$$

この等式が恒等式となるためには

$$a+b=4, -2a+3b=-13$$

これを解いて $a=5, b=-1$

教科書 P.47

問3 (1) 両辺をそれぞれ変形すると

$$\begin{aligned} (x^2-1)^2+3x(x-1) &= x^4+x^2-3x+1 \\ (x^2+1)^2-x(x+3) &= x^4+x^2-3x+1 \end{aligned}$$

ゆえに

$$(x^2-1)^2+3x(x-1)=(x^2+1)^2-x(x+3)$$

(2) 両辺をそれぞれ変形すると

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(c^2+d^2) &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\ (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(参考) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$\begin{aligned} &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \end{aligned}$$

この等式を用いると

$$(2^2+3^2)(4^2+5^2)=23^2+2^2=7^2+22^2$$

問4 $x+y=1$ より、 $y=1-x$ を右辺に代入すると

$$\begin{aligned} y^2-y &= (1-x)^2-(1-x) \\ &= 1-2x+x^2-1+x \\ &= x^2-x \end{aligned}$$

ゆえに $x^2-x=y^2-y$

問5 $a+b+c=0$ より、 $c=-(a+b)$ を左辺に代入

すると

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &= a^2+b^2+(a+b)^2+2ab-2b(a+b)-2a(a+b) \\ &= a^2+b^2+a^2+2ab+b^2+2ab-2ab \\ &\quad -2b^2-2a^2-2ab \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

〔別解〕

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2=0 \end{aligned}$$

教科書 P.48

問6 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと $a=bk, c=dk$

よって

$$\begin{aligned} \frac{a+2b}{2a+b} &= \frac{bk+2b}{2bk+b} = \frac{b(k+2)}{b(2k+1)} \\ &= \frac{k+2}{2k+1} \\ \frac{c+2d}{2c+d} &= \frac{dk+2d}{2dk+d} = \frac{d(k+2)}{d(2k+1)} \\ &= \frac{k+2}{2k+1} \end{aligned}$$

ゆえに $\frac{a+2b}{2a+b} = \frac{c+2d}{2c+d}$

(参考) 比例式の性質

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ のとき}$$

$$(1) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$(2) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$(3) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$(4) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{ (加比の理)}$$

$$\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ のとき} \right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$$

問7 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ ($k \neq 0$) とおくと

$$x=2k, y=3k, z=4k$$

2乗すると

$$x^2=4k^2, y^2=9k^2, z^2=16k^2$$

ゆえに

$$x^2:y^2:z^2=4k^2:9k^2:16k^2=4:9:16$$

2 不等式の証明

教科書 P.49

問8 (1) $a>0$ の両辺に $b(>0)$ を掛けて

$$a \cdot b > 0 \cdot b$$

$$ab > 0$$

(2) $a<0$ の両辺に $b(<0)$ を掛けて

$$a \cdot b > 0 \cdot b$$

$$ab > 0$$

(3) $a > b$ の両辺に c を加えて

$$a + c > b + c \quad \dots\dots ①$$

$c > d$ の両辺に b を加えて

$$b + c > b + d \quad \dots\dots ②$$

①, ② より

$$a + c > b + d$$

教科書 P.50

問9

$$(ab + cd) - (ad + bc)$$

$$= a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d)$$

ここで, $a - c > 0$, $b - d > 0$ であるから

$$(ab + cd) - (ad + bc)$$

$$= (a - c)(b - d) > 0$$

ゆえに $ab + cd > ad + bc$

問10

$$5(x^2 + y^2) - (2x - y)^2$$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$= (x + 2y)^2 \geq 0$$

ゆえに $5(x^2 + y^2) \geq (2x - y)^2$

等号が成り立つのは $x + 2y = 0$

すなわち $x = -2y$ のときである。

教科書 P.51

問11

$$2x^2 + 5 - 4x = 2(x - 1)^2 + 3 > 0$$

ゆえに $2x^2 + 5 > 4x$

問12

$$(1) \quad a^2 + 2b^2 - 2ab$$

$$= a^2 - 2ab + 2b^2$$

$$= (a - b)^2 + b^2$$

$(a - b)^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ であるから

$$(a - b)^2 + b^2 \geq 0$$

よって $a^2 + 2b^2 \geq 2ab$

等号が成り立つのは, $a - b = 0$ かつ $b = 0$

すなわち, $a = b = 0$ のときである。

$$(2) \quad 2x^2 - (6xy - 5y^2)$$

$$= 2x^2 - 6xy + 5y^2$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{y^2}{2}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 \geq 0, \frac{y^2}{2} \geq 0 \text{ であるから}$$

$$2\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0$$

よって $2x^2 \geq 6xy - 5y^2$

等号が成り立つのは, $x - \frac{3}{2}y = 0$ かつ $y = 0$

すなわち, $x = y = 0$ のときである。

教科書 P.53

問13 (1) $a > 0$, $\frac{9}{a} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$a + \frac{9}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{9}{a}} = 6$$

等号が成り立つのは, $a = \frac{9}{a}$, すなわち $a^2 = 9$

のときで, $a > 0$ より $a = 3$ のときである。

$$(2) \quad (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2$$

$\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$ はともに正であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

$$\text{ゆえに} \quad (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2 + 2 = 4$$

等号が成り立つのは $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$

すなわち $a^2 = b^2$ のときで, $a > 0$, $b > 0$ より,

$a = b$ のときである。

教科書 P.54

問14 両辺の平方の差を考えると

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2$$

$$= 1 + a + \frac{a^2}{4} - (1 + a) = \frac{a^2}{4} > 0$$

したがって

$$(\sqrt{1+a})^2 < \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{1+a} > 0, 1 + \frac{a}{2} > 0 \text{ であるから}$$

$$\sqrt{1+a} < 1 + \frac{a}{2}$$

問15 両辺の平方の差を考えると

$$(|a| + |b|)^2 - |a - b|^2$$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a - b)^2$$

$$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2(|ab| + ab) \geq 0$$

したがって $(|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2$

$|a| + |b| \geq 0$, $|a - b| \geq 0$ であるから

$$|a| + |b| \geq |a - b|$$

等号が成り立つのは, $|ab| = -ab$, すなわち $ab \leq 0$ のときである。

〔別解〕教科書 p.54 応用例題 13 の不等式において,

b を $(-b)$ に置き換えると

$$|a| + |-b| \geq |a + (-b)|$$

$$\text{よって} \quad |a| + |b| \geq |a - b|$$

問題

教科書 P.55

22 (1) 左辺を整理すると

$$(a + b + c)x^2 + (-2a + b + 4c)x + (a - 2b + 4c) = 9$$

この等式が恒等式となるためには

$$a + b + c = 0$$

$$-2a + b + 4c = 0$$

$$a - 2b + 4c = 9$$

これを解いて $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$

〔別解〕 $a(x - 1)^2 + b(x - 1)(x + 2) + c(x + 2)^2 = 9$

の両辺に, $x = 1$, $x = 0$, $x = -2$ をそれぞれ

れ代入すると

$$9c = 9, a - 2b + 4c = 9, 9a = 9$$

$$\text{よって } a = 1, b = -2, c = 1$$

逆に、これらを等式に代入すると、左辺 = 右辺 となって、 x についての恒等式となる。

$$\text{よって } a = 1, b = -2, c = 1$$

- (2) 両辺に $x(x^2 + 2)$ を掛けると

$$3x + 4 = a(x^2 + 2) + (bx + c)x$$

この等式が恒等式であればよい。

右辺を整理すると

$$3x + 4 = (a + b)x^2 + cx + 2a$$

$$\text{よって } a + b = 0, c = 3, 2a = 4$$

$$\text{ゆえに } a = 2, b = -2, c = 3$$

23

$$\begin{aligned} & a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \\ & \quad - \{ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)\} \\ = & a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2 \\ & \quad - a^2b + ab^2 - b^2c + bc^2 - ac^2 + a^2c \\ = & 0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) \\ & = ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) \end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned} & a + b + c = 0 \text{ より, } c = -(a + b) \text{ を代入すると} \\ & a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \\ = & a^2(-a) + b^2(-b) + (a + b)^3 \\ = & (a + b)^3 - (a^3 + b^3) = 3a^2b + 3ab^2 \\ & - 3abc = -3ab\{-(a + b)\} = 3a^2b + 3ab^2 \end{aligned}$$

よって

$$a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) = -3abc$$

25

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと } a = bk, c = dk \\ & \frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{(bk + b)^2}{bk \cdot b} = \frac{b^2(k + 1)^2}{b^2 \cdot k} = \frac{(k + 1)^2}{k} \\ & \frac{(c + d)^2}{cd} = \frac{(dk + d)^2}{dk \cdot d} = \frac{d^2(k + 1)^2}{d^2 \cdot k} = \frac{(k + 1)^2}{k} \\ \text{よって } & \frac{(a + b)^2}{ab} = \frac{(c + d)^2}{cd} \end{aligned}$$

26

- (1) a, b, c, d は正の数であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, c + d \geq 2\sqrt{cd}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから、辺々を掛け合わせて

$$(a + b)(c + d) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{cd} = 4\sqrt{abcd}$$

等号が成り立つのは、 $a = b, c = d$ のときである。

- (2) a, b, c は正の数であるから、相加平均と相乗平均の関係より

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc},$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから、辺々を掛け合わせて

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}$$

$$= 8abc$$

等号が成り立つのは $a = b, b = c, c = a$

すなわち、 $a = b = c$ のときである。

- 27 (1) $(a^2 + b^2) - 2(a + b - 1)$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } a^2 + b^2 \geq 2(a + b - 1)$$

等号が成り立つのは、 $a = b = 1$ のときである。

- (2) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$$

$$- a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2$$

$$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$$

$$= (ay - bx)^2 \geq 0$$

よって

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

等号が成り立つのは $ay - bx = 0$

すなわち、 $ay = bx$ のときである。

(参考) コーシー・シュワルツの不等式である。

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

も成り立つ。

- 28 両辺の平方の差をとって

$$(\sqrt{a - b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

$$= a - b - (a - 2\sqrt{ab} + b)$$

$$= 2\sqrt{ab} - 2b$$

$$= 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$a \geq b \geq 0 \text{ より } \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$$

$$\text{すなわち } 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$$

$$\text{よって } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a - b})^2$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0, \sqrt{a - b} \geq 0 \text{ であるから}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a - b}$$

等号が成り立つのは

$$\sqrt{b} = 0 \text{ または } \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$$

すなわち、 $b = 0$ または $a = b$ のときである。

29

- (i) $|a| - |b| < 0$ のとき

$$|a - b| \geq 0 \text{ より}$$

$$|a| - |b| < |a - b|$$

- (ii) $|a| - |b| \geq 0$ のとき

両辺はいずれも負でないから

$$(|a| - |b|)^2 \leq |a - b|^2$$

を示せばよい。

$$|a - b|^2 - (|a| - |b|)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= 2(|ab| - ab) \geq 0$$

- (i), (ii) より $|a| - |b| \leq |a - b|$

等号が成り立つのは

$$|a| \geq |b| \text{ かつ } |ab| = ab$$

のときである。

すなわち、 $a \geq b \geq 0$ または $a \leq b \leq 0$ のときである。

[別解]

教科書 p.54 の応用例題 13 の不等式において, a を $a-b$ に置き換えると

$$|a-b|+|b| \geq |(a-b)+b|$$

$$|a-b|+|b| \geq |a|$$

ゆえに $|a-b| \geq |a|-|b|$

等号が成り立つのは $(a-b)b \geq 0$

すなわち, $a \geq b \geq 0$ または $a \leq b \leq 0$ のときである。

(参考) 三角不等式

$$|a|-|b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

$$|a|-|b| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$$

参考 組立除法

教科書 P.56

問 1 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -5 & 8 & -3 \\ + & & 3 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}$$

商 x^2-2x+2 , 余り 3

(2)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\ + & & -2 & 4 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

商 x^3-2x^2+3x-3 , 余り 0

発展 3次方程式の解と係数の関係

教科書 P.57

問 1 3次方程式の解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = 3$$

$$\begin{aligned} (1) & (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) \\ &= \alpha\beta\gamma - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) - 1 \\ &= 3 - \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{3}$$

[別解] (1) 3次方程式 $2x^3-4x^2+x-6=0$ の左辺は次のように因数分解できる。

$$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

よって

$$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$= 2x^3 - 4x^2 + x - 6$$

$x=1$ を代入して

$$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

$$= 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 - 6$$

$$= -7$$

したがって

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) = \frac{7}{2}$$

練習問題 A

教科書 P.58

1 二項定理から得られる等式

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_r x^r + \cdots + {}_nC_n x^n$$

において

$x = -2$ を代入すると

$$(1-2)^n$$

$$= {}_nC_0 + {}_nC_1(-2) + {}_nC_2(-2)^2 + \cdots + {}_nC_n(-2)^n$$

よって

$${}_nC_0 - 2 \cdot {}_nC_1 + 2^2 \cdot {}_nC_2 - \cdots + (-2)^n \cdot {}_nC_n$$

$$= (-1)^n$$

2 (1) $(3+2i)(x+yi)$

$$= (3x-2y) + (2x+3y)i$$

$$= 16 - 11i$$

x, y は実数であるから

$$\begin{cases} 3x-2y=16 \\ 2x+3y=-11 \end{cases}$$

これを解いて $x=2, y=-5$

$$\begin{aligned} (2) \quad x+yi &= \frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{4-2i}{2} = 2-i \end{aligned}$$

x, y は実数であるから $x=2, y=-1$

3 $x^2-2x+a=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4} = 1-a$$

$x^2+4x-2a=0$ の判別式を D_2 とすると

$$\frac{D_2}{4} = 4+2a$$

これらの一方が正, 一方が負であるから

$$\frac{D_1}{4} \cdot \frac{D_2}{4} < 0$$

$$(1-a)(4+2a) < 0$$

$$(a-1)(a+2) > 0$$

よって, 求める a の値の範囲は

$$a < -2, 1 < a$$

4 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = -k-1$$

であるから

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-k)^2 - 2(-k-1) \\ &= k^2 + 2k + 2 \end{aligned}$$

ゆえに $k^2 + 2k + 2 = 10$

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

したがって $k = -4, 2$

$k = -4$ のとき

$x^2-4x+3=0$ の2解であるから

$$\alpha = 1, \beta = 3 \text{ または } \alpha = 3, \beta = 1$$

$k = 2$ のとき

$x^2+2x-3=0$ の2解であるから

$$\alpha = 1, \beta = -3 \text{ または } \alpha = -3, \beta = 1$$

【別解】 2次方程式 $x^2 + kx - k - 1 = 0$
の左辺は次のように因数分解できる。

$$k(x-1) + x^2 - 1 = 0$$

$$k(x-1) + (x+1)(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x+k+1) = 0$$

$$\text{よって } x = 1, -k-1$$

したがって

$$1^2 + (-k-1)^2 = 10$$

$$(k+1)^2 = 9$$

$$k+1 = \pm 3$$

$$\text{ゆえに } k = 2, -4$$

$$k = 2 \text{ のとき } -k-1 = -3$$

であるから

$$\alpha = 1, \beta = -3 \text{ または } \alpha = -3, \beta = 1$$

$$k = -4 \text{ のとき } -k-1 = 3$$

であるから

$$\alpha = 1, \beta = 3 \text{ または } \alpha = 3, \beta = 1$$

5 $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ で割り切れるためには,
 $x+2, x-1$ の両方を因数にもてばよい。

$$P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 6 \text{ とおくと}$$

$$P(-2) = 0, P(1) = 0$$

$$\text{ゆえに } \begin{cases} 4a - 2b - 30 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて } a = 6, b = -3$$

【別解】 実際に割り算を行うと

$$\begin{array}{r} 3x + (a-3) \\ x^2 + x - 2 \overline{) 3x^3 + ax^2 + \quad bx - 6} \\ \underline{3x^3 + 3x^2 - \quad 6x} \\ (a-3)x^2 + (b+6)x - 6 \\ \underline{(a-3)x^2 + (a-3)x - 2a + 6} \\ (-a+b+9)x + 2a-12 \end{array}$$

割り切れるから

$$-a+b+9=0, 2a-12=0$$

$$\text{よって } a = 6, b = -3$$

6 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ とおくと

$$x = ak, y = bk, z = ck$$

このとき

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 k^2 + b^2 k^2 + c^2 k^2) \\ &= k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ &= (ax + by + cz)^2 \\ &= (a \cdot ak + b \cdot bk + c \cdot ck)^2 \\ &= k^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \end{aligned}$$

よって

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

(参考) この等式は、教科書 p.55 の 27 の (2) の

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$\left(\text{等号は } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ のとき成り立つ} \right)$$

と同じ、コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

$$\left(\text{等号は } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \text{ のとき成り立つ} \right)$$

の等号が成り立つときである。

$$\begin{aligned} 7 \quad (1) \quad & (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) \\ &= \frac{1}{2} \{ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(ab + bc + ca) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (a^2 - 2ab + b^2) \\ &\quad + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

が成り立つ。等号が成り立つのは、

$$a-b=0, b-c=0, c-a=0 \text{ のとき,}$$

すなわち、 $a=b=c$ のときである。

(2) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ は正の数であるから、相加
平均と相乗平均の関係より

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから、

辺々を掛け合わせて

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}} = 4$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ すなわち } ad = bc \text{ のときである。}$$

$$(3) \quad (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) = \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 5$$

ここで、 $\frac{b}{a}, \frac{4a}{b}$ は正の数であるから、

相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} = 4$$

よって

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) \geq 4 + 5 = 9$$

$$\text{等号が成り立つのは } \frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$$

すなわち、 $2a = b$ のときである。

【注意】 (2) のように変形すると示せない。

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{4}{b}}$$

辺々を掛け合わせて

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) \geq 4\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 8$$

これは等号が成り立たないためである。等号が

成り立つのは

$$a = b \text{ かつ } \frac{1}{a} = \frac{4}{b}$$

となるが、これらは同時には成り立たないからである。

このとき、不等式

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) > 8$$

は成り立つ。

練習問題 B

教科書 P.59

- 8 2次方程式 $x^2 + 4kx + 5k - 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2k)^2 - (5k - 1) = 4k^2 - 5k + 1 \\ &= (k - 1)(4k - 1) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } k < \frac{1}{4}, 1 < k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2 つの解を α, β とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -4k, \alpha\beta = 5k - 1$$

α, β がともに -2 より大きくなるための条件は $\alpha + 2, \beta + 2$ がともに正となることであるから

$$(\alpha + 2) + (\beta + 2) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } (\alpha + \beta) + 4 = -4k + 4 > 0$$

$$\text{よって } k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 &= (5k - 1) + 2(-4k) + 4 \\ &= -3k + 3 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ より } k < \frac{1}{4}$$

- 9 (1) $x = 1 - \sqrt{3}i$ より $x - 1 = -\sqrt{3}i$

$$\text{両辺を 2 乗して } (x - 1)^2 = -3$$

$$\text{ゆえに } x^2 - 2x + 4 = 0$$

- (2) $x^3 - 4x^2 + 8x + 3$ を $x^2 - 2x + 4$ で割ると

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 4 \overline{) x^3 - 4x^2 + 8x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 4x} \\ -2x^2 + 4x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 4x - 8} \\ 11 \end{array}$$

よって

$$x^3 - 4x^2 + 8x + 3 = (x^2 - 2x + 4)(x - 2) + 11$$

(1) の結果から、 $x = 1 - \sqrt{3}i$ のとき、

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \text{ であるから}$$

$$x^3 - 4x^2 + 8x + 3 = 0 \cdot (x - 2) + 11 = 11$$

- 10 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = 1$$

よって

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) &= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) \div 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) &= \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 \\ &= 1 + 1 + 2 = 4 \end{aligned}$$

ゆえに、 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ を 2 つの解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 + 3x + 4 = 0$$

- 11 $P(x)$ を $(x - 1)(x - 2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とおくと

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)Q_1(x) + 3x - 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$P(x)$ を $(x - 1)(x + 2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とおくと

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)Q_2(x) - 5x + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$P(x)$ を $(x - 2)(x + 2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax + b$ とおくと

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ に } x = 2 \text{ を代入すると } P(2) = 1$$

$$\textcircled{2} \text{ に } x = -2 \text{ を代入すると } P(-2) = 13$$

$$\textcircled{3} \text{ に } x = 2, x = -2 \text{ を代入すると}$$

$$P(2) = 2a + b, P(-2) = -2a + b$$

したがって

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ -2a + b = 13 \end{cases}$$

$$\text{これを解いて } a = -3, b = 7$$

$$\text{ゆえに、求める余りは } -3x + 7$$

- 12 $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ である。 k は負でない整数とする。

- (i) $n = 3k$ ($k \neq 0$) のとき

$$\omega^{2n} = (\omega^3)^{2k} = 1$$

$$\omega^n = (\omega^3)^k = 1$$

よって

$$\omega^{2n} + \omega^n = 1 + 1 = 2$$

- (ii) $n = 3k + 1$ のとき

$$\omega^{2n} = \omega^{6k+2} = (\omega^3)^{2k} \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k \cdot \omega = \omega$$

よって

$$\begin{aligned} \omega^{2n} + \omega^n &= \omega^2 + \omega \\ &= (\omega^2 + \omega + 1) - 1 \\ &= 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

- (iii) $n = 3k + 2$ のとき

$$\omega^{2n} = \omega^{6k+4} = (\omega^3)^{2k+1} \cdot \omega = \omega$$

$$\omega^n = \omega^{3k+2} = (\omega^3)^k \cdot \omega^2 = \omega^2$$

よって

$$\begin{aligned} \omega^{2n} + \omega^n &= \omega + \omega^2 \\ &= (\omega^2 + \omega + 1) - 1 \\ &= 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

- 13 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ とおくと

$$b = ck, \quad a = bk = ck^2$$

このとき

$$\begin{aligned} & (a+b+c)(a-b+c) \\ &= (a+c)^2 - b^2 \\ &= (ck^2+c)^2 - (ck)^2 \\ &= c^2\{(k^2+1)^2 - k^2\} = c^2(k^4+k^2+1) \\ & \quad a^2+b^2+c^2 \\ &= (ck^2)^2 + (ck)^2 + c^2 = c^2(k^4+k^2+1) \end{aligned}$$

ゆえに

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$$

14

$$\begin{aligned} & 2(ax+by) - (a+b)(x+y) \\ &= ax - ay - bx + by \\ &= a(x-y) - b(x-y) \\ &= (a-b)(x-y) \\ & a \geq b, \quad x \geq y \quad \text{より} \quad a-b \geq 0, \quad x-y \geq 0 \\ & \text{よって} \quad (a-b)(x-y) \geq 0 \\ & \text{したがって} \end{aligned}$$

$$(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは

$$a-b=0 \quad \text{または} \quad x-y=0$$

すなわち, $a=b$ または $x=y$

のときである。

15

各辺の平方の差を考える。

$$\begin{aligned} & 2(a^2+b^2) - (|a|+|b|)^2 \\ &= 2a^2+2b^2 - (a^2+2|a||b|+b^2) \\ &= a^2-2|a||b|+b^2 \\ &= (|a|-|b|)^2 \geq 0 \\ & (\text{等号が成り立つのは } |a|=|b| \text{ のときである}) \\ & (|a|+|b|)^2 - (a^2+b^2) \\ &= (a^2+2|a||b|+b^2) - (a^2+b^2) \\ &= 2|ab| \geq 0 \\ & (\text{等号が成り立つのは } ab=0 \text{ のときである}) \end{aligned}$$

以上から

$$a^2+b^2 \leq (|a|+|b|)^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

が成り立つ。

$$\sqrt{a^2+b^2} \geq 0, \quad |a|+|b| \geq 0, \quad \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geq 0$$

であるから

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$