5章・1節　微分係数と導関数

組	番号	名　　前

①　微分係数

②　導関数

1　次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，x が 1 から$1+h$ まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\frac{\left\{2\left(\boxed{1+h}\right)^2-3\left(\boxed{1+h}\right)+1\right\}-(2\cdot1^2-3\cdot1+1)}{h}$$

$$=\frac{\boxed{\boldsymbol{h+2h^2}}}{h}=\boxed{\boldsymbol{1+2h}}$$

この平均変化率において，h を 0 に限りなく近づけるとき，微分係数$f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\boxed{\boldsymbol{1+2h}}\right)=\boxed{\boldsymbol{1}}$$

微分係数$f'(1)$ は，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線の$\boxed{\textbf{傾き}}$に等しい。

(2)　関数 x^n の導関数は　　$(x^n)'=\boxed{\boldsymbol{n}}\,x^{\boxed{\boldsymbol{n-1}}}$

（ただし，n は正の整数）

(3)　関数 $y=-x^3+6x^2-2x+9$ を微分すると

$$y'=-\boxed{\boldsymbol{3x^2}}+6\cdot\boxed{\boldsymbol{2x}}-\boxed{\boldsymbol{2}}$$

$$=-\boxed{\boldsymbol{3}}\,x^2+\boxed{\boldsymbol{12}}\,x-\boxed{\boldsymbol{2}}$$

2　導関数の定義にしたがって，関数$f(x)=x^3+2x+1$ を微分せよ。技

［解］　$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3+2(x+h)+1\}-(x^3+2x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{h(3x^2+2+3xh+h^2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+2+3xh+h^2)$

$=\boldsymbol{3x^2+2}$

3　次の関数を微分せよ。技

(1)　$y=\frac{1}{2}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{5}x+\frac{7}{9}$

［解］　$y'=\frac{1}{2}(x^3)'-\frac{2}{3}(x^2)'+\frac{3}{5}(x)'+\left(\frac{7}{9}\right)'$

$=\frac{1}{2}\cdot3x^2-\frac{2}{3}\cdot2x+\frac{3}{5}\cdot1+0$

$=\boldsymbol{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{3}{5}}$

(2)　$y=(x+1)^2(5x-3)$

［解］　$y=(x+1)^2(5x-3)=5x^3+7x^2-x-3$

よって　　$y'=5(x^3)'+7(x^2)'-(x)'-(3)'$

$=5\cdot3x^2+7\cdot2x-1-0$

$=\boldsymbol{15x^2+14x-1}$

(3)　$y=(2x-1)^3$

［解］　$y=8x^3-12x^2+6x-1$

よって　　$y'=8(x^3)'-12(x^2)'+6(x)'-(1)'$

$=8\cdot3x^2-12\cdot2x+6\cdot1-0$

$=\boldsymbol{24x^2-24x+6}$

4　関数 $y=x^3+2t^2x-3t^3+5$ について，次の導関数を求めよ。技

(1)　$\frac{dy}{dx}$

［解］　$\frac{dy}{dx}=(x^3)'+2t^2(x)'+(-3t^3+5)'$

$=3x^2+2t^2\cdot1+0$

$=\boldsymbol{3x^2+2t^2}$

(2)　$\frac{dy}{dt}$

［解］　$\frac{dy}{dt}=-3(t^3)'+2x(t^2)'+(x^3+5)'$

$=-3\cdot3t^2+2x\cdot2t+0$

$=\boldsymbol{-9t^2+4xt}$

5　$f(1)=0$，$f'(-1)=-7$，$f'(2)=11$ である 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。技

［解］　求める2次関数を$f(x)=ax^2+bx+c$　$(a\neq0)$ とおくと

$f'(x)=2ax+b$

したがって

$f(1)=0$ であるから　　　$a+b+c=0$　　　……①

$f'(-1)=-7$ であるから　　$-2a+b=-7$　　　……②

$f'(2)=11$ であるから　　　$4a+b=11$　　　……③

③－②より　　$6a=18$　　よって　　$a=3$　　……④

④を②に代入して　　$-2\cdot3+b=-7$

よって　　$b=-1$　　　……⑤

④，⑤を①に代入して　　$3+(-1)+c=0$

よって　　$c=-2$　　　……⑥

④，⑤，⑥より，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-x-2}$

6　2 次関数 $f(x)=px^2+qx+r$　$(p\neq0)$ について，次の問に答えよ。技

(1)　x がa から$a+2h$ まで変わるときの平均変化率を求めよ。

［解］　$\frac{f(a+2h)-f(a)}{(a+2h)-a}$

$=\frac{\{p(a+2h)^2+q(a+2h)+r\}-(pa^2+qa+r)}{2h}$

$=\frac{2h(2pa+2ph+q)}{2h}$

$=\boldsymbol{2pa+2ph+q}$

(2)　$x=b$ における微分係数 $f'(b)$ が(1)で求めた平均変化率と等しいとき，b を a と h を用いて表せ。

［解］　$f'(x)=2px+q$ であるから　　$f'(b)=2pb+q$

(1)より　　$2pb+q=2pa+2ph+q$

$2pb=2pa+2ph$

$p\neq0$ であるから　　$\boldsymbol{b=a+h}$