4章・1節　指数関数

組	番号	名　　前

① 指数法則

② 累乗根

③ 指数の拡張

1　次の$\square$をうめよ。ただし，a，bは正の数，m，nは正の整数，p，qは有理数とする。知

(1)　$a^0=\square$，$a^{-n}=\dfrac{1}{\square}$

(2)　nが奇数のとき，aのn乗根は$\square$と表す。

nが偶数のとき，aのn乗根は$\square$である。

(3)　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\square$，　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\square$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{\square}=a^{\square}$，　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[\square]{a}$

(4)　$a^pa^q=a^{\square}$，　$a^p\div a^q=a^{\square}$，　$(a^p)^q=a^{\square}$

$(ab)^p=a^{\square}b^{\square}$，　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^{\square}}{b^{\square}}$

2　次の式を計算せよ。技

(1)　$(-2)^{-3}$

(2)　0.05^0

(3)　$10^5\times10^{-8}\div10^{-4}$

3　次の計算をせよ。ただし，$a\fallingdotseq0$，$b\fallingdotseq0$とする。技

(1)　$a^{-1}\div a^{-3}\times a^7$

(2)　$(a^3b^{-2})^{-3}$

(3)　$(a^2b)^{-2}\div(a^3b^{-1})^3$

4　次の計算をせよ。技

(1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$

(2)　$\left(\dfrac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

(3)　$3^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{3}{2}}$

(4)　$16^{\frac{1}{4}}\div9^{-\frac{3}{2}}$

(5)　$8^{\frac{1}{9}}\times4^{-\frac{1}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

5　次の式を簡単にせよ。ただし，$a>0$，$b>0$とする。技

(1)　$\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt{a}$

(2)　$\sqrt[8]{a^6b^7}\div\sqrt{a}\div\sqrt[4]{ab^3}$

(3)　$\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

4章・1節　指数関数

④　指数関数とそのグラフ

組	番号	名　　前

1　次の$\boxed{}$をうめよ。$\boxed{\text{知}}$

(1)　指数関数 $y=a^x$ の定義域は実数全体，値域は$\boxed{}$の実数全体である。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ である。

(2)　関数 $y=a^x$ のグラフと，関数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは$\boxed{}$軸に関して対称である。

(3)　指数関数 $y=a^x$ のグラフは点$\boxed{}$および点 $(1,\ a)$ を通り，$\boxed{}$軸が漸近線になる。

$a>1$ のとき，x の値が増加すると y の値も$\boxed{}$する。

すなわち　　$p<q \iff a^p\boxed{}a^q$

$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は$\boxed{}$する。

すなわち　　$p<q \iff a^p\boxed{}a^q$

2　$y=2^x$ のグラフをもとにして，関数 $y=2^{x+2}$ のグラフをかけ。また，このグラフで $y=16$ に対応する x の値を求めよ。$\boxed{\text{技}}$

3　5つの数 2^{-3}，$\dfrac{1}{16}$，$\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ の大小を比較せよ。$\boxed{\text{技}}$

4　方程式 $2^{3-x}=4\sqrt{2}$ を解け。$\boxed{\text{技}}$

5　次の不等式を解け。$\boxed{\text{技}}$

(1)　$\dfrac{1}{2}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<16$

(2)　$25^x-6\cdot 5^x+5\leqq 0$

6　$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $y=9^x-2\cdot 3^x-1$ の最大値 M と最小値 m を求めたい。このとき，次の問に答えよ。$\boxed{\text{考}}$

(1)　$3^x=t$ としたとき，y を t で表せ。また，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　M と m を求めよ。また，そのときの x の値も求めよ。

組	番号	名　　前

4章・1節　指数関数

①　指数法則

②　累乗根

③　指数の拡張

1　次の$\boxed{}$をうめよ。ただし，a，bは正の数，m，nは正の整数，p，qは有理数とする。知

(1)　$a^0=\boxed{1}$，　$a^{-n}=\dfrac{1}{\boxed{a^n}}$

(2)　nが奇数のとき，aのn乗根は$\boxed{\sqrt[n]{a}}$と表す。

nが偶数のとき，aのn乗根は$\boxed{\pm\sqrt[n]{a}}$である。

(3)　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\boxed{\sqrt[n]{ab}}$，　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{\boxed{a^m}}=a^{\boxed{\frac{m}{n}}}$，　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[\boxed{mn}]{a}$

(4)　$a^pa^q=a^{\boxed{p+q}}$，　$a^p\div a^q=a^{\boxed{p-q}}$，　$(a^p)^q=a^{\boxed{pq}}$

$(ab)^p=a^{\boxed{p}}b^{\boxed{p}}$，　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^{\boxed{p}}}{b^{\boxed{p}}}$

2　次の式を計算せよ。技

(1)　$(-2)^{-3}$

［解］　$(-2)^3=\dfrac{1}{(-2)^3}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$

(2)　0.05^0

［解］　$0.05^0=\mathbf{1}$

(3)　$10^5\times10^{-8}\div10^{-4}$

［解］　$10^5\times10^{-8}\div10^{-4}=10^{5+(-8)-(-4)}=10^1=\mathbf{10}$

3　次の計算をせよ。ただし，$a\fallingdotseq0$，$b\fallingdotseq0$とする。技

(1)　$a^{-1}\div a^{-3}\times a^7$

［解］　$a^{-1}\div a^{-3}\times a^7=a^{-1-(-3)+7}=\boldsymbol{a^9}$

(2)　$(a^3b^{-2})^{-3}$

［解］　$(a^3b^{-2})^{-3}=a^{-9}b^6=\boldsymbol{\dfrac{b^6}{a^9}}$

(3)　$(a^2b)^{-2}\div(a^3b^{-1})^3$

［解］　$(a^2b)^{-2}\div(a^3b^{-1})^3=a^{-4}b^{-2}\div a^9b^{-3}=a^{-4-9}b^{-2-(-3)}=a^{-13}b=\boldsymbol{\dfrac{b}{a^{13}}}$

4　次の計算をせよ。技

(1)　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}$

［解］　$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{16}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2^4}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{6}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=\mathbf{2}$

(2)　$\left(\dfrac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

［解］　$\left(\dfrac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

(3)　$3^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{3}{2}}$

［解］　$3^{\frac{1}{3}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}}=3^1=\mathbf{3}$

(4)　$16^{\frac{1}{4}}\div9^{-\frac{3}{2}}$

［解］　$16^{\frac{1}{4}}\div9^{-\frac{3}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}\div(3^2)^{-\frac{3}{2}}=2\div3^{-3}=2\times3^3=\mathbf{54}$

(5)　$8^{\frac{1}{9}}\times4^{-\frac{1}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

［解］　$8^{\frac{1}{9}}\times4^{-\frac{1}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

$=(2^3)^{\frac{1}{9}}\times(2^2)^{-\frac{1}{3}}\div(2^{-1})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{2}{3}}\div2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^0=\mathbf{1}$

5　次の式を簡単にせよ。ただし，$a>0$，$b>0$とする。技

(1)　$\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt{a}$

［解］　$\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[6]{a^5}\times\sqrt{a}$

$=a^{\frac{3}{4}}\div a^{\frac{5}{6}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{12}}=\boldsymbol{\sqrt[12]{a^5}}$

(2)　$\sqrt[8]{a^6b^7}\div\sqrt{a}\div\sqrt[4]{ab^3}$

［解］　$\sqrt[8]{a^6b^7}\div\sqrt{a}\div\sqrt[4]{ab^3}$

$=(a^6b^7)^{\frac{1}{8}}\div a^{\frac{1}{2}}\div(ab^3)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{6}{8}}b^{\frac{7}{8}}\div a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}b^{\frac{7}{8}-\frac{3}{4}}=a^0b^{\frac{1}{8}}=\boldsymbol{\sqrt[8]{b}}$

(3)　$\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

［解］　$\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\boldsymbol{a-b}$

4章・1節　指数関数

④　指数関数とそのグラフ

組	番号	名　　前

1　次の$\boxed{}$をうめよ。知

(1)　指数関数 $y=a^x$ の定義域は実数全体，値域は$\boxed{正}$の実数全体である。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ である。

(2)　関数 $y=a^x$ のグラフと，関数 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $\boxed{y}$ 軸に関して対称である。

(3)　指数関数 $y=a^x$ のグラフは点 $\boxed{(0,\ 1)}$ および点 $(1,\ a)$ を通り，$\boxed{x}$ 軸が漸近線になる。

$a>1$ のとき，x の値が増加すると y の値も$\boxed{増加}$する。

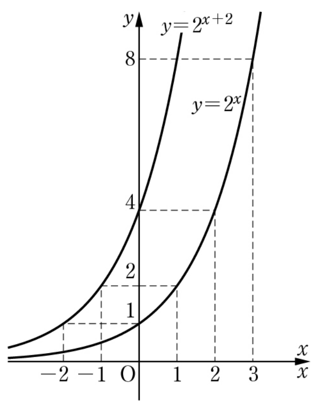
すなわち　　$p<q \iff a^p \boxed{<} a^q$

$0<a<1$ のとき，x の値が増加すると y の値は$\boxed{減少}$する。

すなわち　　$p<q \iff a^p \boxed{>} a^q$

2　$y=2^x$ のグラフをもとにして，関数 $y=2^{x+2}$ のグラフをかけ。また，このグラフで $y=16$ に対応する x の値を求めよ。技

［解］　$y=2^{x+2}$ のグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，グラフは右の図のようになる。



また

$2^{x+2}=16=2^4$

ゆえに　$x+2=4$

よって　　$\boldsymbol{x=2}$

3　5つの数 2^{-3}，$\frac{1}{16}$，$\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ の大小を比較せよ。技

［解］　5つの数を 2^p の形に表すと，

2^{-3}，$\frac{1}{16}=2^{-4}$，$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$，$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}=2^1$

ここで，$y=2^x$ の底2は1より大きく，$-4<-3<-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$ であるから

$2^{-4}<2^{-3}<2^{-\frac{1}{3}}<2^{\frac{1}{2}}<2^1$

すなわち　　$\boldsymbol{\frac{1}{16}<2^{-3}<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<\sqrt{2}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

4　方程式 $2^{3-x}=4\sqrt{2}$ を解け。技

［解］　$4\sqrt{2}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{2+\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}}$ であるから

$2^{3-x}=2^{\frac{5}{2}}$

よって　　$3-x=\frac{5}{2}$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$

5　次の不等式を解け。技

(1)　$\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{4}\right)^x<16$

［解］　$\left(\frac{1}{4}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$，$16=2^4$ であるから，与えられた不等式は

$\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

底 $\frac{1}{2}$ は0より大きく1より小さいから

$-4<2x<1$

ゆえに　　$\boldsymbol{-2<x<\frac{1}{2}}$

(2)　$25^x-6\cdot 5^x+5\leqq 0$

［解］　$25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$

であるから，与えられた不等式は

$(5^x)^2-6\cdot 5^x+5\leqq 0$

ここで，$5^x=t$ とおくと，$t>0$ であって

$t^2-6t+5\leqq 0$

$(t-1)(t-5)\leqq 0$

$1\leqq t\leqq 5$

すなわち　　$5^0\leqq 5^x\leqq 5^1$

底5は1より大きいから

$0\leqq x\leqq 1$

6　$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $y=9^x-2\cdot 3^x-1$ の最大値 M と最小値 m を求めたい。このとき，次の問に答えよ。考

(1)　$3^x=t$ とおくとき，y を t で表せ。また，t のとり得る値の範囲を求めよ。

［解］　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}=(3^x)^2$ であるから

$y=(3^x)^2-2\cdot 3^x-1$

すなわち　　$\boldsymbol{y=t^2-2t-1}$

また，$-1\leqq x\leqq 1$ より　　　$3^{-1}\leqq 3^x\leqq 3^1$

すなわち　　$\boldsymbol{\frac{1}{3}\leqq t\leqq 3}$

(2)　M と m を求めよ。また，そのときの x の値も求めよ。

［解］　$y=t^2-2t-1=(t-1)^2-2$

よって，右の図からわかるように，y は

$t=3$ のとき最大で，最大値2

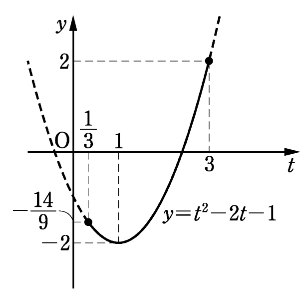
$t=1$ のとき最小で，最小値 -2

をとる。また，$t=3^x$ であるから

$t=3$ となるのは　$x=1$

$t=1$ となるのは　$x=0$

のときである。



ゆえに，$\boldsymbol{x=1}$ のとき　$\boldsymbol{M=2}$

$\boldsymbol{x=0}$ のとき　$\boldsymbol{m=-2}$