3章・1節　三角関数

組	番号	名　　前

①　一般角
②　三角関数
③　三角関数の性質

1　次の☐をうめよ。知

(1)　弧度法について，次のような関係がある。

1 ラジアン $=\boxed{\dfrac{180^\circ}{\pi}}$，　　$180^\circ=\boxed{\pi}$ ラジアン

たとえば　$60^\circ=\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$ ラジアン，　$\dfrac{7}{6}\pi$ ラジアン $=\boxed{210^\circ}$

(2)　弧度法を用いると，角 α の動径が表す一般角 θ は

$\theta=\boxed{\alpha+2n\pi}$　　(n は整数)

と表される。

(3)　角 θ がすべての値をとるとき

①　$\sin\theta$ のとり得る値の範囲は　$\boxed{-1}\leqq\sin\theta\leqq\boxed{1}$

②　$\cos\theta$ のとり得る値の範囲は　$\boxed{-1}\leqq\cos\theta\leqq\boxed{1}$

③　$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は　$\boxed{\text{すべての実数値}}$

(4)　三角関数の性質

①　$\begin{cases}\sin(-\theta)=\boxed{-\sin\theta}\\ \cos(-\theta)=\boxed{\cos\theta}\\ \tan(-\theta)=\boxed{-\tan\theta}\end{cases}$　　②　$\begin{cases}\sin(\theta+\pi)=\boxed{-\sin\theta}\\ \cos(\theta+\pi)=\boxed{-\cos\theta}\\ \tan(\theta+\pi)=\boxed{\tan\theta}\end{cases}$

(5)　半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とする。
このとき，l，S を r，θ を用いて表すと

$l=\boxed{r\theta}$，　$S=\boxed{\dfrac{1}{2}r^2\theta}=\dfrac{1}{2}lr$

2　次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。技

(1)　半径5，中心角 $\dfrac{3}{4}\pi$

［解］　$l=5\cdot\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{15}{4}\pi$

$S=\dfrac{1}{2}\cdot5^2\cdot\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{75}{8}\pi$

(2)　半径3，中心角240°

［解］　$240^\circ=\dfrac{4}{3}\pi$ より　　$l=3\cdot\dfrac{4}{3}\pi=4\pi$

$S=\dfrac{1}{2}\cdot3^2\cdot\dfrac{4}{3}\pi=6\pi$

3　θ が次の角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。技

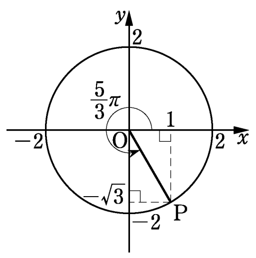
(1)　$\dfrac{5}{3}\pi$

［解］　右の図で，$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき，OP＝2 とすると，$\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{3})$ であるから

$\sin\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{1}{2}$

$\tan\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$



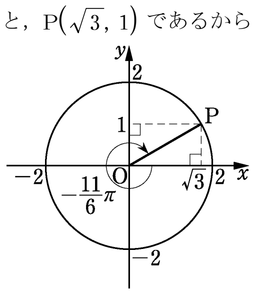
(2)　$-\dfrac{11}{6}\pi$

［解］　右の図で，$\theta=-\dfrac{11}{6}\pi$ のとき，OP＝2 とすると，$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ であるから

$\sin\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

$\cos\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\dfrac{11}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



4　次の問に答えよ。技

(1)　$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

［解］　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{9}{10}$

$\tan\theta>0$ であるから，θ は第1象限か第3象限の角である。

(ⅰ)　θ が第1象限の角のとき，$\cos\theta>0$ である。

よって　　$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

また　　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(ⅱ)　θ が第3象限の角のとき，$\cos\theta<0$ である。

よって　　$\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

また　　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(ⅰ)，(ⅱ)より　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，　$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

または　　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，　$\cos\theta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(2)　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ。

［解］　与えられた等式の両辺を2乗すると

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{9}$

すなわち　　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1-\dfrac{4}{9}\right)$

$=\dfrac{5}{18}$

また　　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\dfrac{2}{3}\cdot\left(1+\dfrac{5}{18}\right)$

$=\dfrac{23}{27}$

(3)　$\sin(-\theta)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\theta+\pi)\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ。

［解］　$\sin(-\theta)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\theta+\pi)\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta\sin\theta+(-\cos\theta)\cos\theta$

$=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=-1$

5　次の等式が成り立つことを証明せよ。考

$$\frac{1}{\tan\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$$

［証明］　$\dfrac{1}{\tan\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin\theta\sin\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta}$