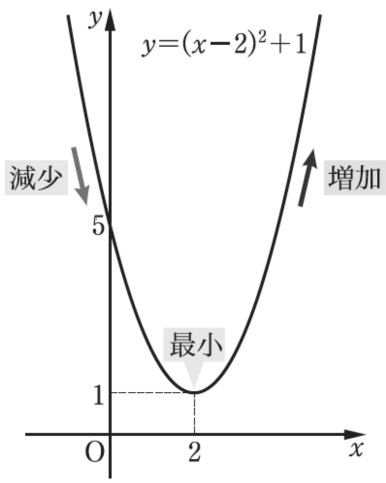
2節 2次関数の値の変化

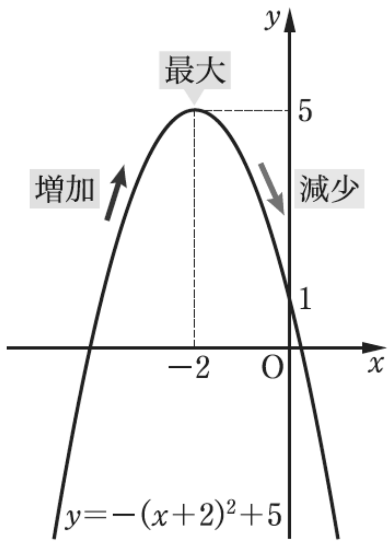
1 2次関数の最大値・最小値

（教科書 p.72）

例1 2 次関数 $y=(x-2)^2+1$ のグラフは，
直線（　　　　　）を軸とし，（　　　　　　　）を頂点とする下に凸の放物線である。
よって，右のグラフから
　$x<2$ の範囲で　y の値は（　　　　　）
　$x>2$ の範囲で　y の値は（　　　　　）
していることがわかる。
したがって，（　　　　　）のとき y の値は最小となり，
　最小値は（　　　　）である。
また，y の値はいくらでも大きくなるから，
　最大値は（　　　　　）



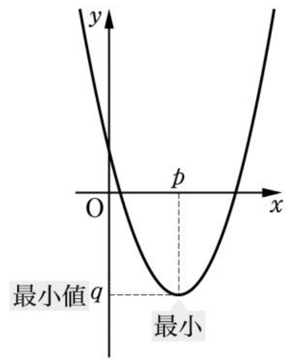
例2 2 次関数 $y=(x+2)^2+5$ のグラフは，
直線（　　　　　）を軸とし，（　　　　　　　）を頂点とする上に凸の放物線である。
よって，右のグラフから
　$x<-2$ の範囲で　y の値は（　　　　　）
　$x>-2$ の範囲で　y の値は（　　　　　）
していることがわかる。
したがって，（　　　　　）のとき y の値は最大となり，
　最大値は（　　　　）である。
また，y の値はいくらでも小さくなるから，
　最小値は（　　　　　）



2 次関数の最大値・最小値

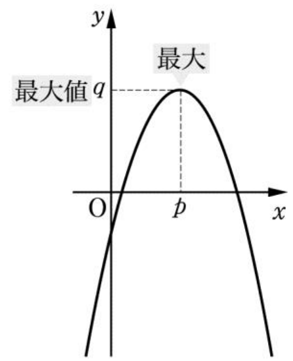
2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値・最小値は，次のようになる。

$a>0$ のとき



$x=p$ のとき　最小値は q である。
最大値はない。

$a<0$ のとき



$x=p$ のとき　最大値は q である。
最小値はない。

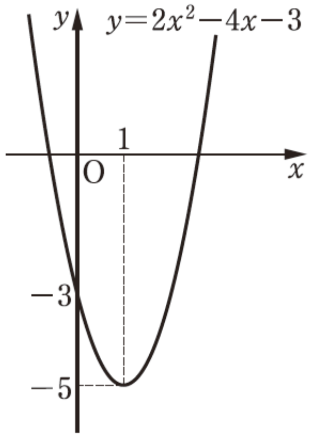
問1 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y=(x-1)^2-2$

(2)　$y=-(x-2)^2+6$

例題 1 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x - 3$ の最大値または最小値を求めなさい。

解 与えられた 2 次関数は



と変形できる。

したがって，この関数は

（　　　　　　）のとき，

最小値（　　　　　）

最大値は（　　　　　　　）

問2 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y = 2x^2 - 8x + 13$

(2)　$y = -3x^2 - 6x + 7$

かぎられた範囲での最大値・最小値

（教科書 p.74）

関数で，x のとる値の範囲を，その関数の（[1]　　　　　　）という。

関数の定義域は，たとえば

$y=(x-1)^2-3\ (-2 \leqq x \leqq 3)$

のように，関数を表す式の後に( )を用いて示すことがある。

例題 2 2 次関数 $y=x^2-2x-2$ について，次の定義域における最大値と最小値を求めなさい。

(1) $-2 \leqq x \leqq 3$　　(2) $2 \leqq x \leqq 4$

解 (1) $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$

と変形できる。

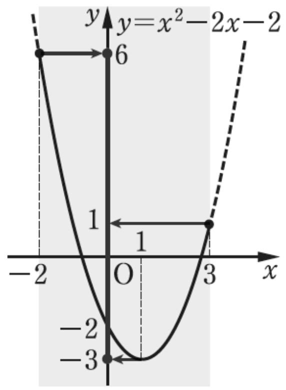
$x=-2$ のとき　$y=$(　　　　)

$x=3$ のとき　$y=$(　　　　)

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

$x=-2$ のとき(　　　　　　　)

$x=1$ のとき(　　　　　　　)



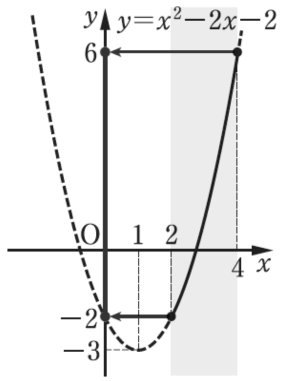
(2)　$x=2$ のとき　$y=$(　　　　)

$x=4$ のとき　$y=$(　　　　)

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

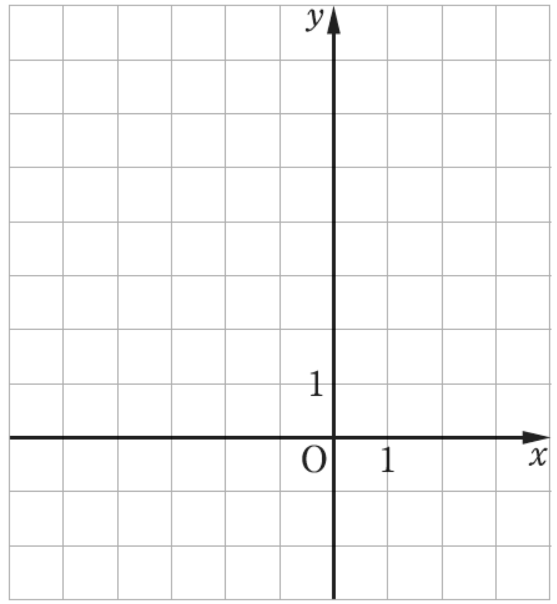
$x=4$ のとき(　　　　　　　)

$x=2$ のとき(　　　　　　　)

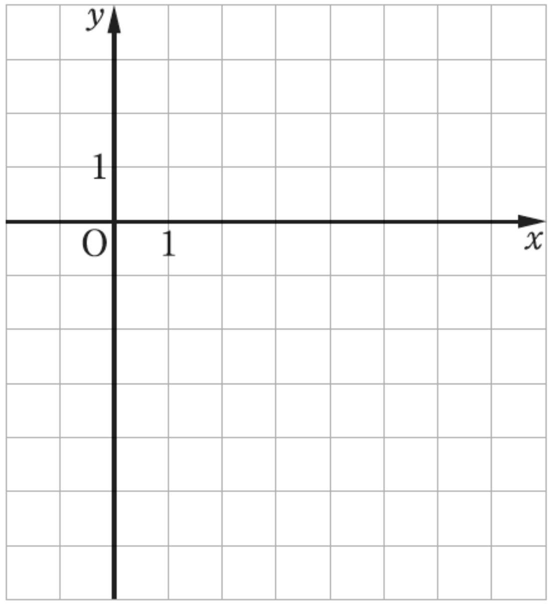


問3 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1)　$y=(x+1)^2-2\ (-3 \leqq x \leqq 2)$



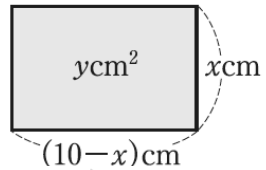
⑵ $y=x^2-6x+3\ (0 \leqq x \leqq 2)$



例題 3 長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形をつくる。長方形の縦を $x$cm として，面積 $y\text{cm}^2$ の最大値を求めなさい。

解 長方形の横は

と表される。



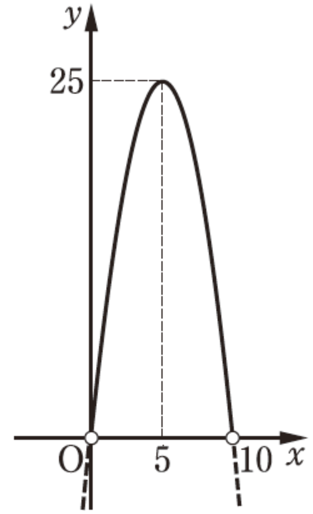
ただし，辺の長さは正であるから

……①

長方形の面積 $y\text{cm}^2$ は

$y=$

となる。



よって，①のとき，この関数のグラフは右の図の実線部分である。したがって

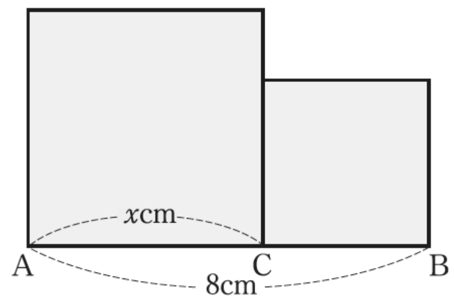
（　　　　　　）のとき

最大値（　　　　　）

である。

答（　　　　　　　　　　）

問4 長さ 8cm の線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB を 1 辺とする 2 つの正方形をつくる。AC の長さを $x$cm として，この 2 つの正方形の面積の和 $y\text{cm}^2$ の最小値を求めなさい。



2 2次関数のグラフと2次方程式

（教科書 p.76）

例3 2 次関数

$y = x^2 - 2x - 3$　　……①

のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めてみよう。

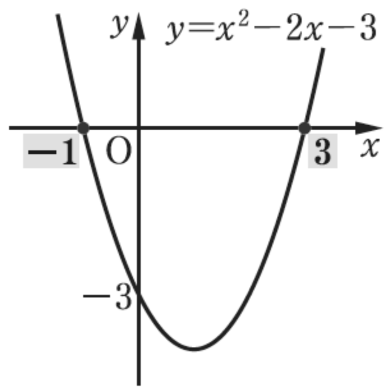
①のグラフと x 軸の共有点では，y 座標は0 となる。

よって，共有点の x 座標は，①で $y = 0$ とした

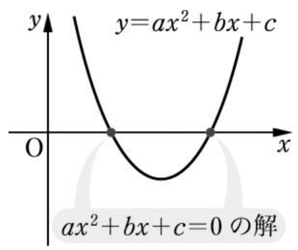
2 次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ の解として求められる。

$x^2 - 2x - 3 = 0$ より　　$(x+1)(x-3) = 0$

したがって，共有点の x 座標は（　　　　　　　　）



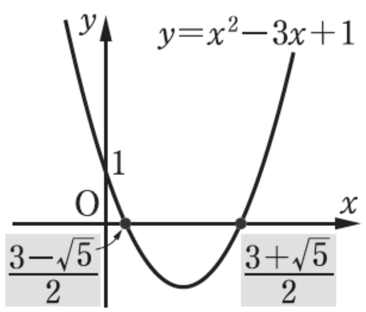
2 次関数のグラフと x 軸の共有点
2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である。



例4 2 次関数 $y = x^2 - 3x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解である。これを解の公式を用いて解くと

$x =$

したがって，共有点の x 座標は（　　　　　　　　）



問5 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

(1)　$y = x^2 - x - 6$

(2)　$y = 2x^2 - 9x - 5$

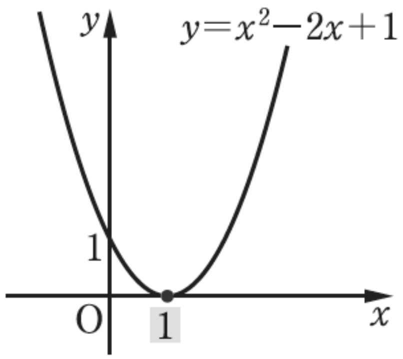
(3)　$y = x^2 - 5x + 5$

(4)　$y = 3x^2 + 3x - 2$

例5 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。これを因数分解を利用して解くと

より（　　　　　　）

したがって，共有点の x 座標は（　　　　　　）



2 次関数のグラフと x 軸がただ 1 点を共有するとき，2 次関数のグラフは x 軸に（[2]　　　　　　）という。また，その共有点を（[3]　　　　　　）という。

例6 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解である。これを解の公式を用いて解くと

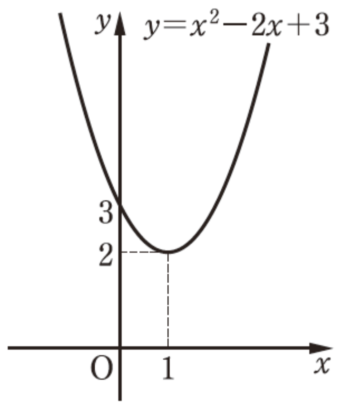
$x =$

根号の中が負となるから，解はない。

この場合，$y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは

$y = x^2 - 2x + 3 =$

より，右の図のようになり，グラフと x 軸の共有点は（　　　　　　）



根号の中が負となり解がない場合は，グラフと x 軸の共有点はない。

問6 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

(1) $y = x^2 + 6x + 9$

(2) $y = 4x^2 + 4x + 1$

(3) $y = x^2 - 2x + 5$

(4) $y = 3x^2 + 2x + 4$

3 2次関数のグラフと2次不等式

（教科書 p.78）

不等式

$x^2-4x+3>0$，$x^2-4x+3<0$

のように，移項して右辺が 0 になるように整理したとき，左辺が 2 次式となる不等式を（[1]　　　　　　　　）という。

グラフが x 軸と 2 点を共有するとき　（教科書 p.78）

例7 2 次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$x^2-4x+3=0$

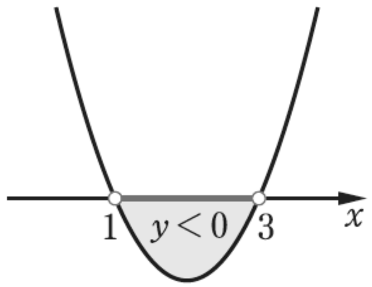
より　$x=$

よって，右の図より，x の値が $1<x<3$ の範囲にあると，グラフは x 軸の下側にある。このとき $y<0$ であるから，

2 次不等式 $x^2-4x+3<0$ を成り立たせる x の値の範囲は

（　　　　　　　　　）

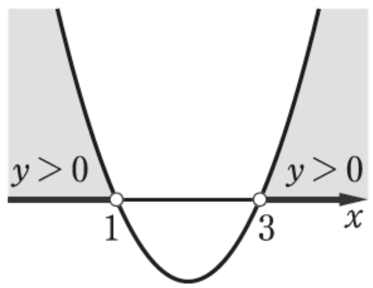
であることがわかる。



同様に右の図から，2 次不等式 $x^2-4x+3>0$ を成り立たせる x の値の範囲は

（　　　　　　　　　　　）

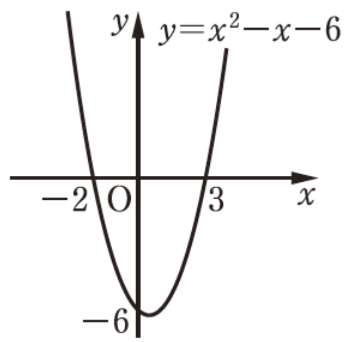
であることがわかる。



問7 右の $y=x^2-x-6$ のグラフを利用して，次の不等式を成り立たせる x の値の範囲を求めなさい。

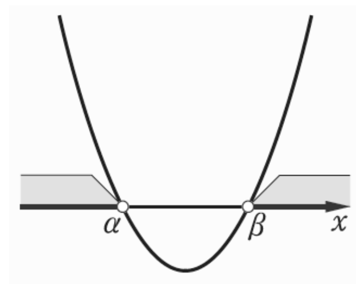
（1）　$x^2-x-6<0$

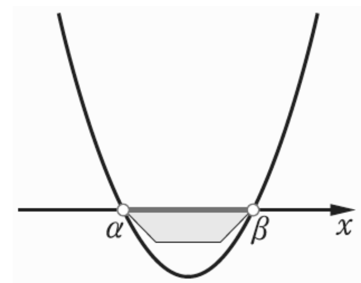
（2）　$x^2-x-6>0$



2 次不等式を成り立たせる x の値の範囲を，その 2 次不等式の（[2]　　　　　　）といい，解を求めることを不等式を（[3]　　　　　　）という。

2 次不等式の解
$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）の2つの解を α,β とすると，
$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ **の解は** $\boldsymbol{x<\alpha,\ \ \beta<x}$　　　$\boldsymbol{ax^2+bx+c<0}$ **の解は** $\boldsymbol{\alpha<x<\beta}$





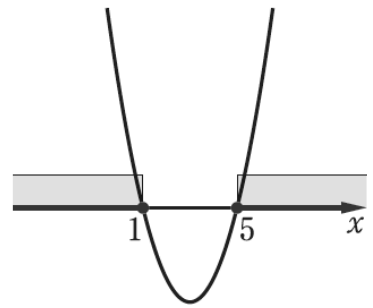
例題 4 次の 2 次不等式を解きなさい。

（1）　$x^2-6x+5\geqq 0$　　　　（2）　$x^2+x-6<0$

解 （1）　2 次方程式 $x^2-6x+5=0$ を解くと

より

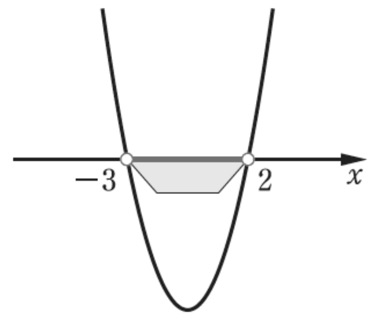
したがって，2 次不等式 $x^2-6x+5\geqq 0$ の解は



（2）　2 次方程式 $x^2+x-6=0$ を解くと

より

したがって，2 次不等式 $x^2+x-6<0$ の解は



問8 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 7x + 10 > 0$

(2) $x^2 + 2x - 3 \leqq 0$

(3) $x^2 + 9x + 8 \geqq 0$

(4) $x^2 - 9x + 18 < 0$

いろいろな2次不等式

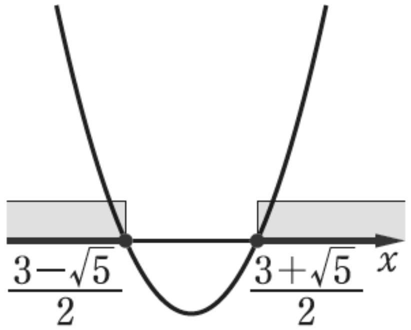
（教科書 p.80）

例題 5 2 次不等式 $x^2 - 3x + 1 \geqq 0$ を解きなさい。

解 2 次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$x =$

したがって，2 次不等式 $x^2 - 3x + 1 \geqq 0$ の解は



問9 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 5x + 3 < 0$

(2) $2x^2 - x - 6 \geqq 0$

x^2 の係数が負の 2 次不等式は，両辺に -1 をかけて x^2 の係数を正にしてから解くとよい。

例題 6 2 次不等式 $-x^2+x+2>0$ を解きなさい。

解 $-x^2+x+2>0$ の両辺に -1 をかけると

（　　　　　　　　　　）

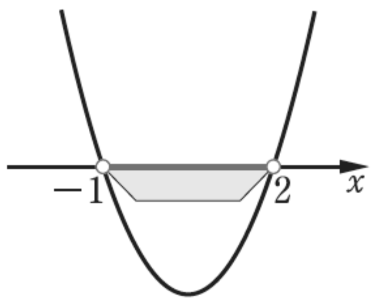
2 次方程式 $x^2-x-2=0$ を解くと

（　　　　　　　　　　　　）

より（　　　　　　　　　）

したがって，2 次不等式 $-x^2+x+2>0$ の解は

（　　　　　　　　　）



問 10 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$-x^2-x+20 \geqq 0$

(2)　$-x^2-6x+27<0$

グラフが x 軸と1点を共有するとき　（教科書 p.81）

例8 (1)　$x^2-2x+1>0$　　　(2)　$x^2-2x+1<0$

2 次方程式 $x^2-2x+1=0$ を解くと

（　　　　　　　　　）

より（　　　　　　）

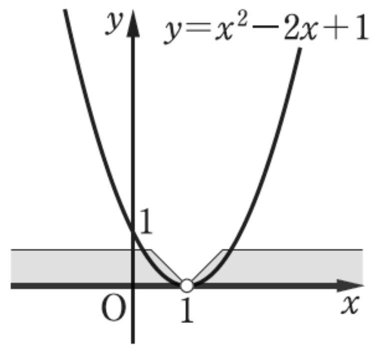
よって，$y=x^2-2x+1$ のグラフは右の図のように x 軸に接している。

(1)　グラフから，$x<1$，$1<x$ の範囲で $y>0$ である。

よって，$x^2-2x+1>0$ 解は，

（　　　　　　　　　　　　　）

(2)　グラフから，$x^2-2x+1<0$ の解は（　　　　　　　）



問 11 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2 + 6x + 9 > 0$

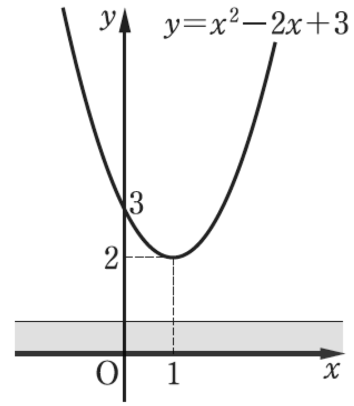
(2)　$x^2 + 8x + 16 < 0$

グラフが x 軸と共有点をもたないとき

（教科書 p.81）

例9 (1)　$x^2 - 2x + 3 > 0$　　(2)　$x^2 - 2x + 3 < 0$

2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ を解くと



根号の中が負となるから，

解は（　　　　　　　）。

このとき，$y = x^2 - 2x + 3$ のグラフはつねに x 軸の上側にあり，x のどんな値に対しても $y > 0$ である。

(1)　グラフから，$x^2 - 2x + 3 > 0$ の解は，

（　　　　　　　　　　）

(2)　グラフから，$x^2 - 2x + 3 > 0$ の解は

（　　　　　　　）

問 12 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2 - 4x + 5 > 0$

(2) $x^2 - 6x + 10 < 0$

復 習 問 題

（教科書 p.82）

1 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1) $y = 2x^2 + 8x + 7$

(2) $y = -x^2 - 2x + 4$

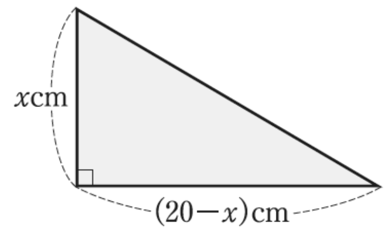
2 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = (x - 3)^2 + 5 \quad (2 \leqq x \leqq 5)$

(2) $y = -2(x - 1)^2 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(3)　$y = x^2 + 6x + 8 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$

3 直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形がある。
この直角三角形の面積 $y\mathrm{cm}^2$ の最大値を求めなさい。



4 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

（1） $y=(x+2)(x-5)$

（2） $y=x^2+x-12$

（3） $y=3x^2+5x+1$

（4） $y=9x^2-6x+1$

（5） $y=2x^2-6x+5$

5 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2+5x-24>0$

(2) $x^2+7x+10\leqq 0$

(3) $x^2-4x+1\leqq 0$

(4) $-x^2+x+6>0$

(5) $16x^2+8x+1>0$

(6) $x^2+4x+8<0$

6 地上から真上に毎秒 30m の速さでボ-ルを投げ上げるとき，投げ上げてから x 秒後のボールの高さ ym は

$$y=-5x^2+30x$$

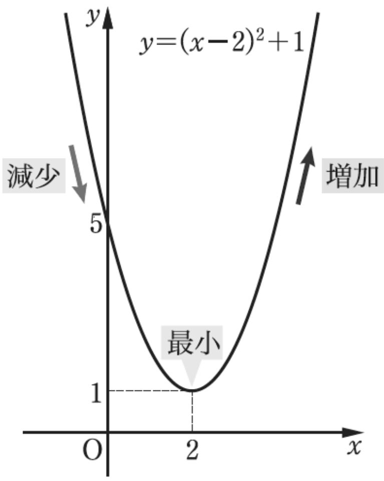
で表される。ボールの高さが 25m 以上にあるのは，何秒後から何秒後までかを求めなさい。

2節　2次関数の値の変化

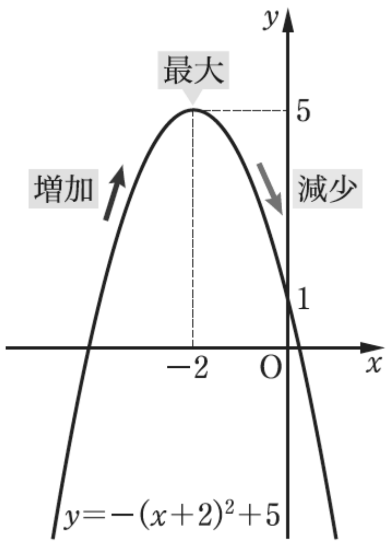
1　2次関数の最大値・最小値

（教科書 p.72）

例1　2 次関数 $y=(x-2)^2+1$ のグラフは，
直線（　$x=2$　）を軸とし，（　点 $(2,\ 1)$　）を頂点とする下に凸の放物線である。
よって，右のグラフから
　$x<2$ の範囲で　y の値は（　減少　）
　$x>2$ の範囲で　y の値は（　増加　）
していることがわかる。
したがって，（　$x=2$　）のとき y の値は最小となり，
　最小値は（　1　）である。
また，y の値はいくらでも大きくなるから，
　最大値は（　ない。　）



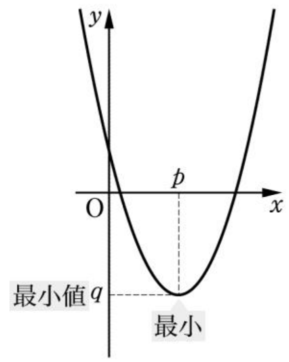
例2　2 次関数 $y=(x+2)^2+5$ のグラフは，
直線（　$x=-2$　）を軸とし，（　点 $(-2,\ 5)$　）を頂点とする上に凸の放物線である。
よって，右のグラフから
　$x<-2$ の範囲で　y の値は（　増加　）
　$x>-2$ の範囲で　y の値は（　減少　）
していることがわかる。
したがって，（　$x=-2$　）のとき y の値は最大となり，
　最大値は（　5　）である。
また，y の値はいくらでも小さくなるから，
　最小値は（　ない。　）



2 次関数の最大値・最小値

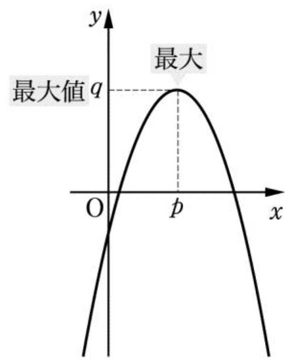
2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値・最小値は，次のようになる。

$a>0$ のとき



$x=p$ のとき　最小値は q である。
最大値はない。

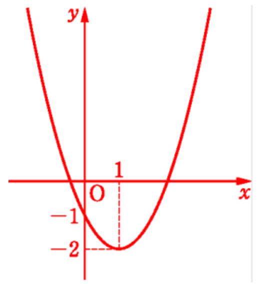
$a<0$ のとき



$x=p$ のとき　最大値は q である。
最小値はない。

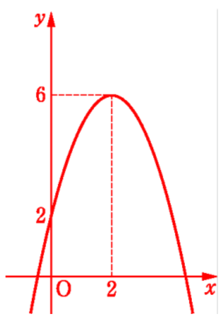
問1　次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y=(x-1)^2-2$



$x=1$ のとき　最小値 -2 である。
最大値はない。

(2)　$y=-(x-2)^2+6$



$x=2$ のとき　最大値 6 である。
最小値はない。

例題 1 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x - 3$ の最大値または最小値を求めなさい。

解 与えられた 2 次関数は

$$y = 2x^2 - 4x - 3$$
$$= 2(x-1)^2 - 5$$

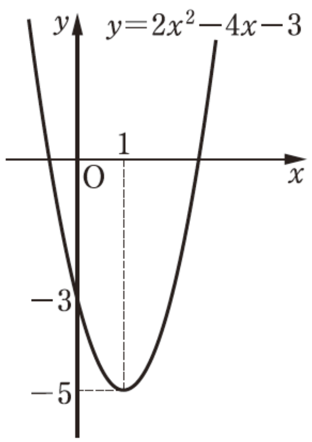
と変形できる。

したがって，この関数は

（　$x = 1$　）のとき，

最小値（　-5　）

最大値は（　ない。　）



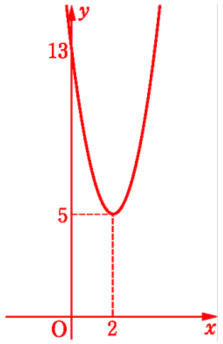
問2 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y = 2x^2 - 8x + 13$

与えられた 2 次関数は

$$y = 2x^2 - 8x + 13$$
$$= 2(x-2)^2 + 5$$

と変形できる。



したがって，この関数は

$x = 2$ のとき　　最小値 5

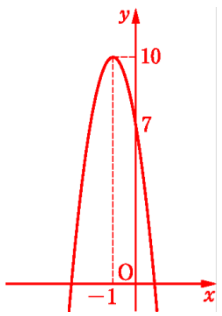
最大値はない。

(2)　$y = -3x^2 - 6x + 7$

与えられた 2 次関数は

$$y = -3x^2 - 6x + 7$$
$$= -3(x+1)^2 + 10$$

と変形できる。



したがって，この関数は

$x = -1$ のとき　最大値 10

最小値はない。

かぎられた範囲での最大値・最小値　（教科書 p.74）

関数で，x のとる値の範囲を，その関数の（[1]　定義域　）という。

関数の定義域は，たとえば

$y = (x-1)^2 - 3\ (-2 \leqq x \leqq 3)$

のように，関数を表す式の後に( )を用いて示すことがある。

例題 2　2 次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ について，次の定義域における最大値と最小値を求めなさい。

(1) $-2 \leqq x \leqq 3$　　(2) $2 \leqq x \leqq 4$

解 (1) $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$

と変形できる。

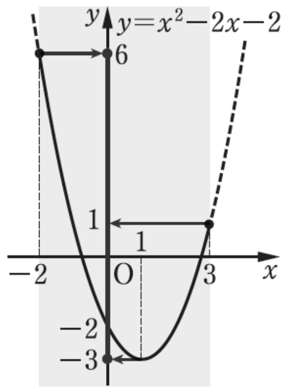
$x = -2$ のとき　$y =$ (　6　)

$x = 3$ のとき　$y =$ (　1　)

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

$x = -2$ のとき（　最大値 6　）

$x = 1$ のとき（　最小値 -3　）



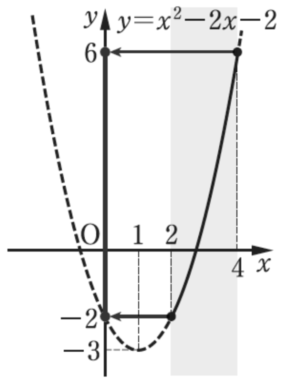
(2) $x = 2$ のとき　$y =$ (　-2　)

$x = 4$ のとき　$y =$ (　6　)

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

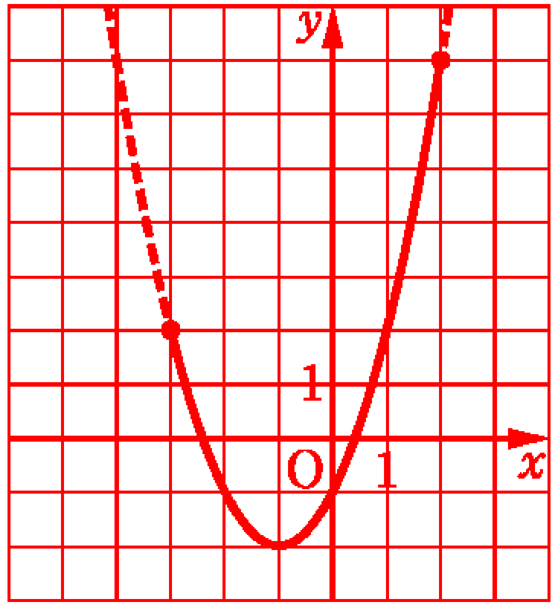
$x = 4$ のとき（　最大値 6　）

$x = 2$ のとき（　最小値 -2　）



問3 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = (x+1)^2 - 2\ (-3 \leqq x \leqq 2)$



$x = -3$ のとき　$y = 2$

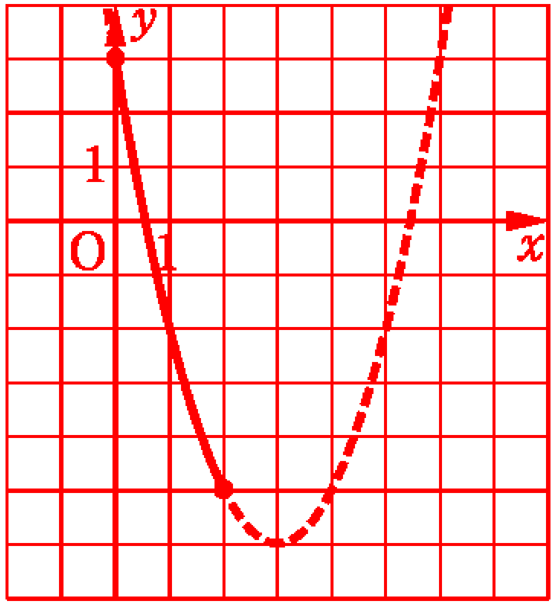
$x = 2$ のとき　$y = 7$

この関数のグラフは図の実線部分であるから

$x = 2$ のとき　最大値 7

$x = -1$ のとき　最小値 -2

⑵ $y = x^2 - 6x + 3 \ (0 \leqq x \leqq 2)$



$y = x^2 - 6x + 3$

$\quad = (x-3)^2 - 6$

よって

$x = 0$ のとき　$y = 3$

$x = 2$ のとき　$y = -5$

この関数のグラフは図の実線部分であるから

$x = 0$ のとき　最大値 3

$x = 2$ のとき　最小値 -5

例題 3 長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形をつくる。長方形の縦を $x$cm として，面積 $y$cm² の最大値を求めなさい。

解 長方形の横は

$(10 - x)$cm

と表される。

ただし，辺の長さは正であるから

$0 < x < 10$　　······①

長方形の面積 $y$cm² は

$y = x(10 - x)$

$\quad = -x^2 + 10x$

$\quad = -(x^2 - 10x)$

$\quad = -(x-5)^2 + 25$

となる。

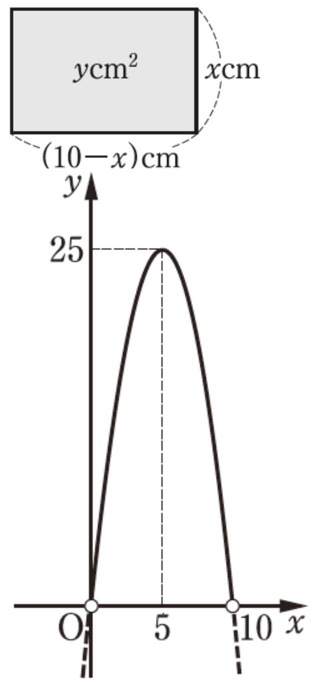
よって，①のとき，この関数のグラフは

右の図の実線部分である。したがって

（　$x = 5$　）のとき

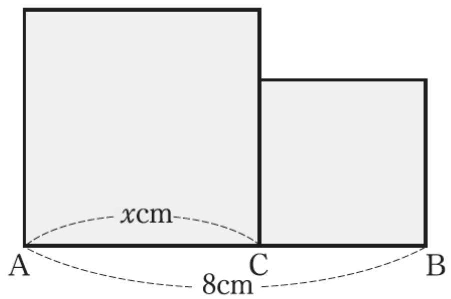
最大値（　25　）

である。



答（　最大値 25cm²　）

問4 長さ 8cm の線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB を 1 辺とする 2 つの正方形をつくる。AC の長さを $x$cm として，この 2 つの正方形の面積の和 $y\text{cm}^2$ の最小値を求めなさい。



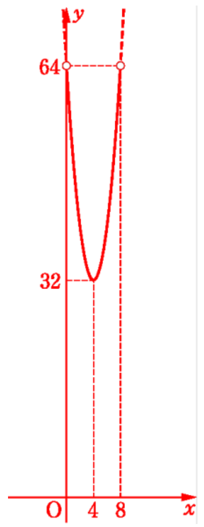
AC $= x$cm であるから CB $= (8-x)$cm と表される。
ただし，辺の長さは正であるから

$0 < x < 8$ …… ①

2 つの正方形の面積の和 $y\text{cm}^2$ は

$y = x^2 + (8-x)^2$
$= 2x^2 - 16x + 64$
$= 2(x^2 - 8x) + 64$
$= 2(x-4)^2 + 32$

よって，①のとき，この関数のグラフは図の実線部分である。



したがって
$x = 4$ のとき　最小値 32

答　最小値 32cm^2

2　2次関数のグラフと2次方程式

（教科書 p.76）

例3　2 次関数

$y = x^2 - 2x - 3$　　……①

のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めてみよう。

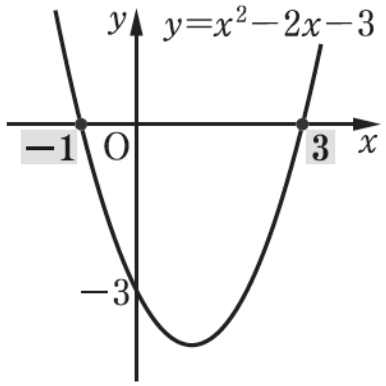
①のグラフと x 軸の共有点では，y 座標は0 となる。

よって，共有点の x 座標は，①で $y = 0$ とした

2 次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ の解として求められる。

$x^2 - 2x - 3 = 0$ より　$(x+1)(x-3) = 0$

したがって，共有点の x 座標は（ $x = -1,\ 3$ ）

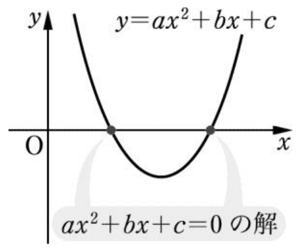


2 次関数のグラフと x 軸の共有点

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の
共有点の x 座標は

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

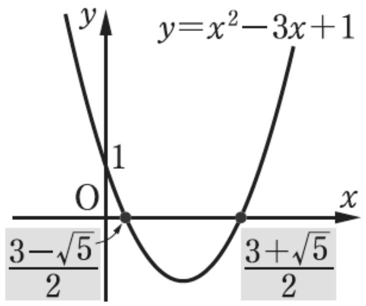
である。



例4　2 次関数 $y = x^2 - 3x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解である。これを解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

したがって，共有点の x 座標は（ $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ）



問5　次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

(1)　$y = x^2 - x - 6$

2 次方程式 $x^2 - x - 6 = 0$ を因数分解を利用して解くと

$(x+2)(x-3) = 0$

より $x = -2,\ 3$

したがって，共有点の x 座標は

$x = -2,\ 3$

(2)　$y = 2x^2 - 9x - 5$

2 次方程式 $2x^2 - 9x - 5 = 0$ を因数分解を利用して解くと

$(x-5)(2x+1) = 0$

より

$x = 5,\ -\frac{1}{2}$

したがって，共有点の x 座標は

$x = 5,\ -\frac{1}{2}$

(3)　$y = x^2 - 5x + 5$

2 次方程式 $x^2 - 5x + 5 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

したがって，共有点の x 座標は

$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

(4)　$y = 3x^2 + 3x - 2$

2 次方程式 $3x^2 + 3x - 2 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$$

したがって，共有点の x 座標は

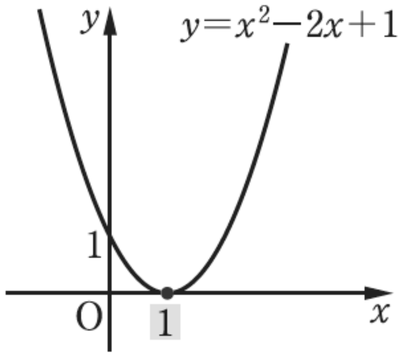
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}$

例5 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。これを因数分解を利用して解くと

$(x-1)^2 = 0$

より（ $x = 1$ ）

したがって，共有点の x 座標は（ $x = 1$ ）



2 次関数のグラフと x 軸がただ 1 点を共有するとき，2 次関数のグラフは x 軸に（[2] 接する ）という。また，その共有点を（[3] 接点 ）という。

例6 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解である。これを解の公式を用いて解くと

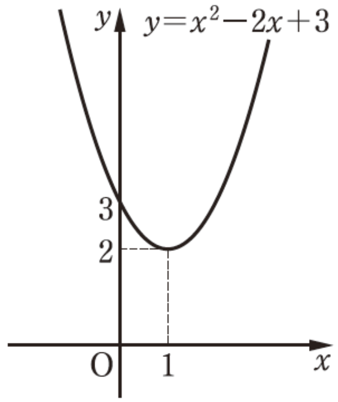
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

根号の中が負となるから，解はない。

この場合，$y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

より，右の図のようになり，グラフと x 軸の共有点は（ ない。 ）



根号の中が負となり解がない場合は，グラフと x 軸の共有点はない。

問6 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

(1) $y = x^2 + 6x + 9$

2 次方程式 $x^2 + 6x + 9 = 0$ を因数分解を利用して解くと

$(x+3)^2 = 0$

より $x = -3$

したがって，共有点の x 座標は

$x = -3$

(2) $y = 4x^2 + 4x + 1$

2 次方程式 $4x^2 + 4x + 1 = 0$ を因数分解を利用して解くと

$(2x+1)^2 = 0$

より

$x = -\frac{1}{2}$

したがって，共有点の x 座標は

$x = -\frac{1}{2}$

(3) $y = x^2 - 2x + 5$

2 次方程式 $x^2 - 2x + 5 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

根号の中が負となるから，解はない。

したがって，グラフと x 軸の共有点はない。

(4) $y = 3x^2 + 2x + 4$

2 次方程式 $3x^2 + 2x + 4 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times 4}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-44}}{6}$$

根号の中が負となるから，解はない。

したがって，グラフと x 軸の共有点はない。

3 2次関数のグラフと2次不等式

（教科書 p.78）

不等式

$x^2-4x+3>0$，$x^2-4x+3<0$

のように，移項して右辺が 0 になるように整理したとき，左辺が 2 次式となる不等式を（[1]　2 次不等式　）という。

グラフが x 軸と 2 点を共有するとき

（教科書 p.78）

例7 2 次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

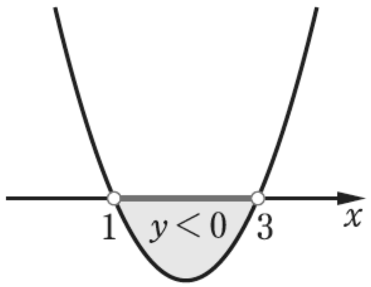
より　$x=1$，3

よって，右の図より，x の値が $1<x<3$ の範囲にあると，グラフは x 軸の下側にある。このとき $y<0$ であるから，

2 次不等式 $x^2-4x+3<0$ を成り立たせる x の値の範囲は

（　$1<x<3$　）

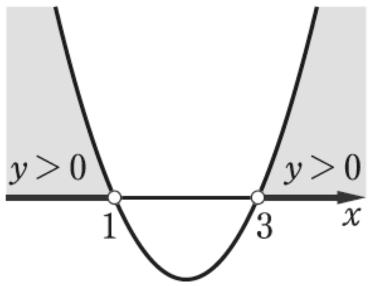
であることがわかる。



同様に右の図から，2 次不等式 $x^2-4x+3>0$ を成り立たせる x の値の範囲は

（　$x<1$，$3<x$　）

であることがわかる。



問7 右の $y=x^2-x-6$ のグラフを利用して，次の不等式を成り立たせる x の値の範囲を求めなさい。

(1)　$x^2-x-6<0$

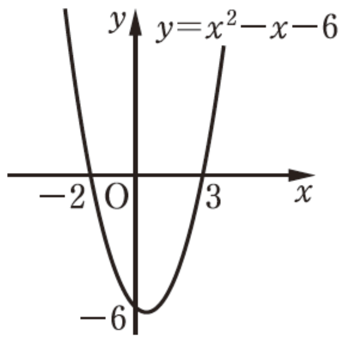
グラフより

$-2<x<3$

(2)　$x^2-x-6>0$

グラフより

$x<-2$，$3<x$



2 次不等式を成り立たせる x の値の範囲を，その 2 次不等式の（[2]　解　）といい，解を求めることを不等式を（[3]　解く　）という。

2 次不等式の解

$ax^2+bx+c=0$（$a>0$）の2つの解を

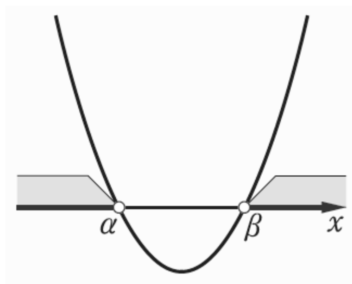
α,β とすると，

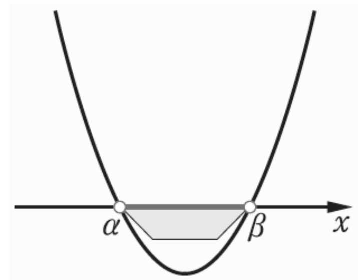
$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ **の解は**

$\boldsymbol{x<\alpha,\quad \beta<x}$

$\boldsymbol{ax^2+bx+c<0}$ **の解は**

$\boldsymbol{\alpha<x<\beta}$





例題 4 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2-6x+5\geqq 0$　　　(2)　$x^2+x-6<0$

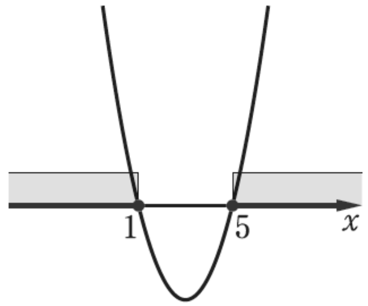
解 (1)　2 次方程式 $x^2-6x+5=0$ を解くと

$(x-1)(x-5)=0$

より　$x=1$，5

したがって，2 次不等式 $x^2-6x+5\geqq 0$ の解は

$x\leqq 1$，$5\leqq x$



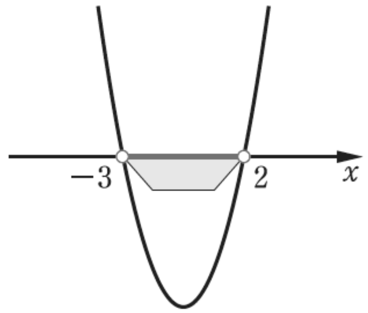
(2)　2 次方程式 $x^2+x-6=0$ を解くと

$(x+3)(x-2)=0$

より　$x=-3$，2

したがって，2 次不等式 $x^2+x-6<0$ の解は

$-3<x<2$



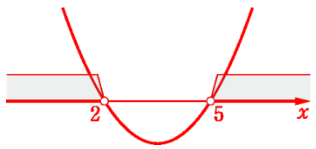
問8 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2-7x+10>0$

2 次方程式 $x^2-7x+10=0$ を解くと

$(x-2)(x-5)=0$

より $x=2,\ 5$



したがって，求める 2 次不等式の解は

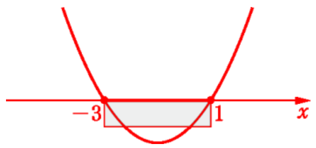
$x<2,\ 5<x$

(2) $x^2+2x-3\leqq 0$

2 次方程式 $x^2+2x-3\leqq 0$ を解くと

$(x+3)(x-1)=0$

より $x=-3,\ 1$



したがって，求める 2 次不等式の解は

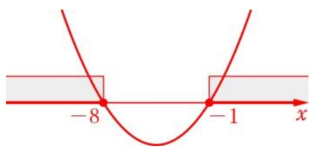
$-3\leqq x\leqq 1$

(3) $x^2+9x+8\geqq 0$

2 次方程式 $x^2+9x+8=0$ を解くと

$(x+8)(x+1)=0$

より $x=-8,\ -1$



したがって，求める 2 次不等式の解は

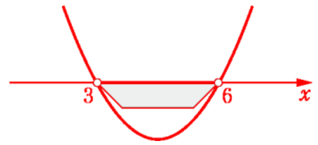
$x\leqq -8,\ -1\leqq x$

(4) $x^2-9x+18<0$

2 次方程式 $x^2-9x+18=0$ を解くと

$(x-3)(x-6)=0$

より $x=3,\ 6$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$3<x<6$

いろいろな2次不等式

（教科書 p.80）

例題 5 2 次不等式 $x^2-3x+1 \geqq 0$ を解きなさい。

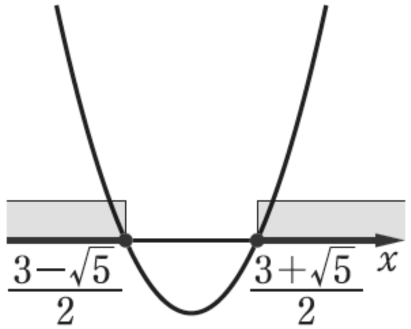
解 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ を解の公式を用いて解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって，2 次不等式 $x^2-3x+1 \geqq 0$ の解は

$$x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2},\quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x$$



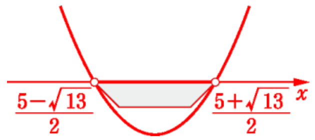
問9 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2-5x+3<0$

2 次方程式 $x^2-5x+3=0$ を解の公式を用いて解くと

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times3}}{2\times1}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$$\frac{5-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

(2) $2x^2-x-6 \geqq 0$

2 次方程式 $2x^2-x-6=0$ を解の公式を用いて解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times2\times(-6)}}{2\times2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{49}}{4}$$

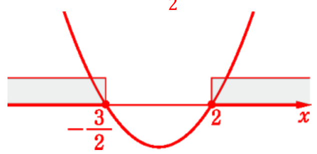
$$=\frac{1\pm7}{4}$$

よって

$$x=\frac{1+7}{4},\quad \frac{1-7}{4}$$

すなわち

$$x=2,\quad -\frac{3}{2}$$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$$x \leqq -\frac{3}{2},\quad 2 \leqq x$$

x^2 の係数が負の 2 次不等式は，両辺に -1 をかけて x^2 の係数を正にしてから解くとよい。

例題 6 2 次不等式 $-x^2+x+2>0$ を解きなさい。

解 $-x^2+x+2>0$ の両辺に -1 をかけると

（ $x^2-x-2<0$ ）

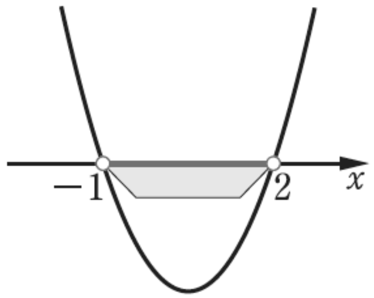
2 次方程式 $x^2-x-2=0$ を解くと

（ $(x+1)(x-2)=0$ ）

より（ $x=-1,\ 2$ ）

したがって，2 次不等式 $-x^2+x+2>0$ の解は

（ $-1<x<2$ ）



問 10 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $-x^2-x+20 \geqq 0$

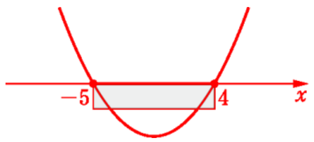
$-x^2-x+20 \geqq 0$ の両辺に -1 をかけると

$x^2+x-20 \leqq 0$

2 次方程式 $x^2+x-20=0$ を解くと

$(x+5)(x-4)=0$

より $x=-5,\ 4$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$-5 \leqq x \leqq 4$

(2) $-x^2-6x+27<0$

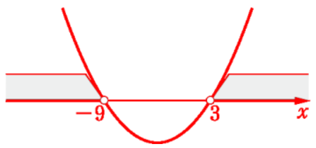
$-x^2-6x+27<0$ の両辺に -1 をかけると

$x^2+6x-27>0$

2 次方程式 $x^2+6x-27=0$ を解くと

$(x+9)(x-3)=0$

より $x=-9,\ 3$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$x<-9,\ 3<x$

グラフが x 軸と1点を共有するとき （教科書 p.81）

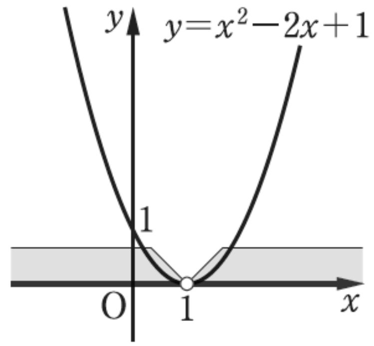
例8 (1) $x^2-2x+1>0$ (2) $x^2-2x+1<0$

2 次方程式 $x^2-2x+1=0$ を解くと

（ $(x-1)^2=0$ ）

より（ $x=1$ ）

よって，$y=x^2-2x+1$ のグラフは右の図のように x 軸に接している。



(1) グラフから，$x<1$，$1<x$ の範囲で $y>0$ である。

よって，$x^2-2x+1>0$ 解は，

（ 1 以外のすべての実数 ）

(2) グラフから，$x^2-2x+1<0$ の解は（ ない。 ）

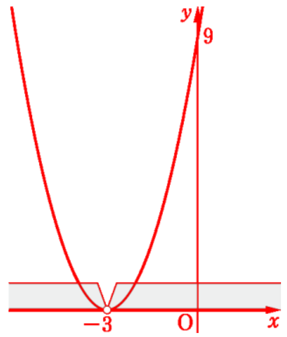
問 11 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2+6x+9>0$

2 次方程式 $x^2+6x+9=0$ を解くと

$(x+3)^2=0$

より $x=-3$



したがって，求める 2 次不等式の解は

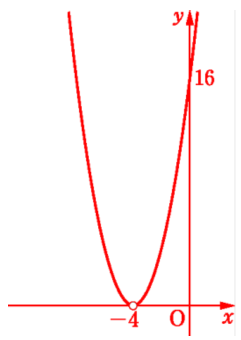
−3 以外のすべての実数

(2)　$x^2+8x+16<0$

2 次方程式 $x^2+8x+16=0$ を解くと

$(x+4)^2=0$

より $x=-4$



したがって，求める 2 次不等式の解はない。

グラフが x 軸と共有点をもたないとき　　（教科書 p.81）

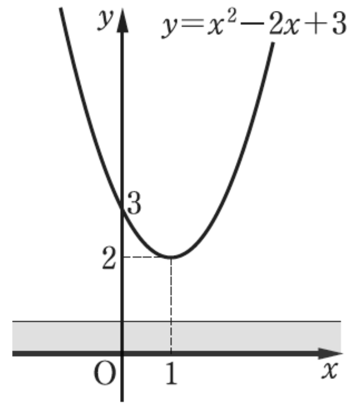
例9 (1)　$x^2-2x+3>0$　　(2)　$x^2-2x+3<0$

2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

根号の中が負となるから，

解は（　ない　）。



このとき，$y=x^2-2x+3$ のグラフはつねに x 軸の上側にあり，x の どんな値に対しても $y>0$ である。

(1)　グラフから，$x^2-2x+3>0$ の解は，

（　すべての実数　）

(2)　グラフから，$x^2-2x+3>0$ の解は

（　ない。　）

問 12 次の 2 次不等式を解きなさい。

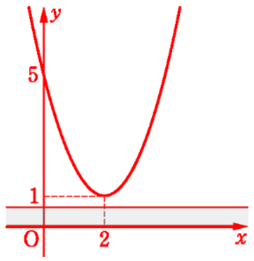
(1) $x^2-4x+5>0$

2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times5}}{2\times1}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

根号の中が負となるから，解はない。



したがって，求める 2 次不等式の解はすべての実数

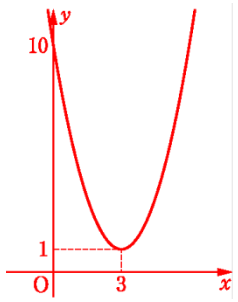
(2) $x^2-6x+10<0$

2 次方程式 $x^2-6x+10=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times10}}{2\times1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}$$

根号の中が負となるから，解はない。



したがって，求める 2 次不等式の解はない。

復　習　問　題

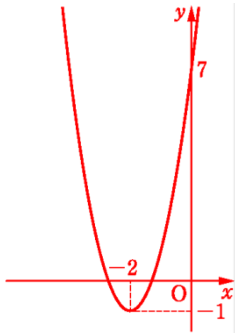
（教科書 p.82）

1 次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1) $y = 2x^2 + 8x + 7$

$y = 2x^2 + 8x + 7$

$= 2(x+2)^2 - 1$



したがって，この関数は

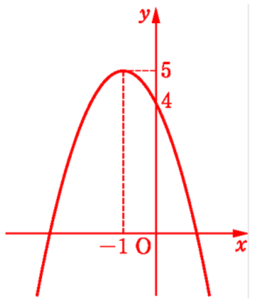
$x = -2$ のとき　最小値 -1

最大値はない。

(2) $y = -x^2 - 2x + 4$

$y = -x^2 - 2x + 4$

$= -(x+1)^2 + 5$



したがって，この関数は

$x = -1$ のとき　最大値 5

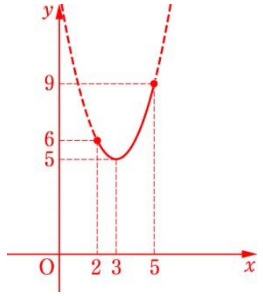
最小値はない。

2 次の 2 次関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = (x-3)^2 + 5 \quad (2 \leqq x \leqq 5)$

$x = 2$ のとき　$y = 6$

$x = 5$ のとき　$y = 9$



この関数のグラフは図の実線部分であるから

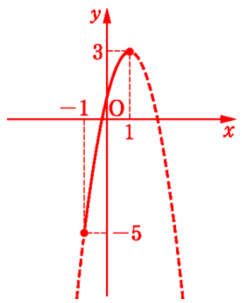
$x = 5$ のとき　最大値 9

$x = 3$ のとき　最小値 5

(2) $y = -2(x-1)^2 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

$x = -1$ のとき　$y = -5$

$x = 1$ のとき　$y = 3$



この関数のグラフは図の実線部分であるから

$x = 1$ のとき　最大値 3

$x = -1$ のとき　最小値 -5

(3)　$y = x^2 + 6x + 8 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$

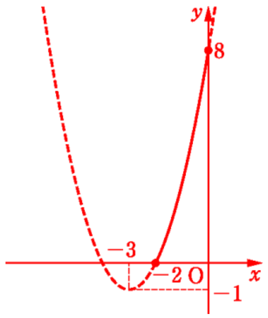
$y = x^2 + 6x + 8$

$\quad = (x+3)^2 - 1$

よって

$x = -2$ のとき　$y = 0$

$x = 0$ のとき　$y = 8$



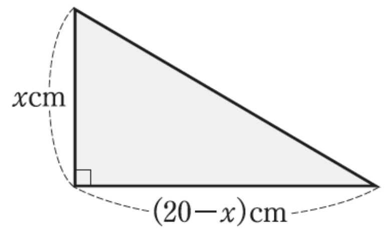
この関数のグラフは図の実線部分であるから

$x = 0$ のとき　最大値 8

$x = -2$ のとき　最小値 0

3　直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形がある。

この直角三角形の面積 $y\text{cm}^2$ の最大値を求めなさい。



直角をはさむ 2 辺のうち，1 辺の長さを $x$cm とすると，他の 1 辺の長さは $(20-x)$cm と表される。

ただし，辺の長さは正であるから

$0 < x < 20$ …… ①

直角三角形の面積 $y\text{cm}^2$ は

$y = \frac{1}{2}x(20-x)$

$\quad = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$

$\quad = -\frac{1}{2}(x^2 - 20x)$

$\quad = -\frac{1}{2}(x-10)^2 + 50$

よって，①のとき，この関数のグラフは図の実線部分である。

したがって

$x = 10$ のとき　最大値 50

　　答　最大値 50cm^2

4 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

（1） $y=(x+2)(x-5)$

2 次方程式 $(x+2)(x-5)=0$ を解くと

$x=-2,\ 5$

したがって，共有点の x 座標は

$x=-2,\ 5$

（2） $y=\ x^2+x-12$

2 次方程式 $x^2+x-12=0$ を因数分解を利用して解くと

$(x-3)(x+4)=0$

より $x=3,\ -4$

したがって，共有点の x 座標は

$x=3,\ -4$

（3） $y=3x^2+5x+1$

2 次方程式 $3x^2+5x+1=0$ を解の公式を用いて解くと

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times1}}{2\times3}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$

したがって，共有点の x 座標は

$x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$

（4） $y=9x^2-6x+1$

2 次方程式 $9x^2-6x+1=0$ を因数分解を利用して解くと

$(3x-1)^2=0$

より

$x=\frac{1}{3}$

したがって，共有点の x 座標は

$x=\frac{1}{3}$

（5） $y=2x^2-6x+5$

2 次方程式 $2x^2-6x+5=0$ を解の公式を用いて解くと

$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times2\times5}}{2\times2}$

$=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{4}$

根号の中が負となるから，解はない。

したがって，グラフと x 軸の共有点はない。

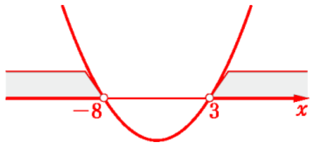
5 次の 2 次不等式を解きなさい。

(1) $x^2+5x-24>0$

2 次方程式 $x^2+5x-24=0$ を解くと

$(x+8)(x-3)=0$

より $x=-8,\ 3$



したがって，求める 2 次不等式の解は

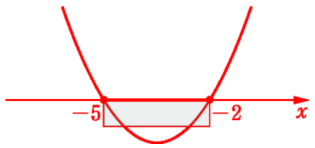
$x<-8,\ 3<x$

(2) $x^2+7x+10\leqq 0$

2 次方程式 $x^2+7x+10=0$ を解くと

$(x+5)(x+2)=0$

より $x=-5,\ -2$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$-5\leqq x\leqq -2$

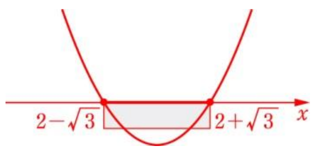
(3) $x^2-4x+1\leqq 0$

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ を解の公式を用いて解くと

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$

$=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}$

$=2\pm\sqrt{3}$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$

(4) $-x^2+x+6>0$

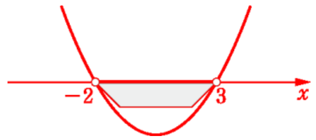
$-x^2+x+6>0$ の両辺に -1 をかけると

$x^2-x-6<0$

2 次方程式 $x^2-x-6=0$ を解くと

$(x+2)(x-3)=0$

より $x=-2,\ 3$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$-2<x<3$

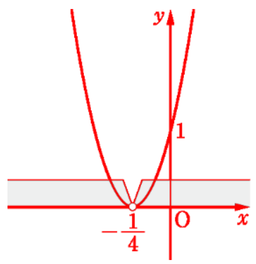
(5) $16x^2+8x+1>0$

2 次方程式 $16x^2+8x+1=0$ を解くと

$(4x+1)^2=0$

より

$x=-\frac{1}{4}$



したがって，求める 2 次不等式の解は

$-\frac{1}{4}$ 以外のすべての実数

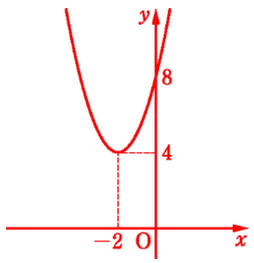
(6) $x^2+4x+8<0$

2 次方程式 $x^2+4x+8=0$ を解くと

$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times8}}{2\times1}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{-16}}{2}$

根号の中が負となるから，解はない。



したがって，求める 2 次不等式の解はない。

6 地上から真上に毎秒 30m の速さでボ−ルを投げ上げるとき，投げ上げてから x 秒後のボールの高さ ym は

$y=-5x^2+30x$

で表される。ボールの高さが 25m 以上にあるのは，何秒後から何秒後までかを求めなさい。

ボールの高さが 25m 以上にあることは

$-5x^2+30x\geqq25$

と表される。

この式を整理すると

$x^2-6x+5\leqq0$

2 次方程式 $x^2-6x+5=0$ を解くと

$(x-1)(x-5)=0$

より $x=1$，5

よって， $x^2-6x+5\leqq0$ の解は

$1\leqq x\leqq5$

したがって 1 秒後から 5 秒後まで