2 節　三角比の応用

1　三角形の面積

ねらい　2 辺の長さとその間の角のサインの値から，△ABC の面積を表す公式を導きます。その公式を用いて，いろいろな三角形の面積を求めます。

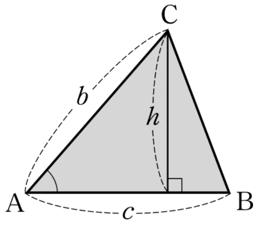
次の図の△ABC で，面積を S，高さを h とすると

$S=\frac{1}{2}ch$

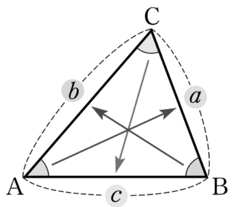
ここで，$h=b\sin A$ であるから

$$S=\frac{1}{2}c\times h=\frac{1}{2}c\times b\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A$$

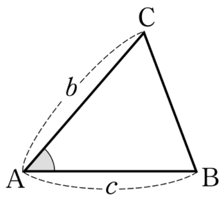


◀一般に，三角形の角と辺を表す文字の対応は下のように定める。



三角形の面積

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A}$$



◀三角形の面積は，2 辺とその間の角を用いて求めることができる。

ほかの 2 辺とその間の角からも同様の公式が得られる。

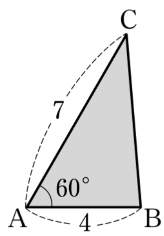
$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}ca\sin B},\qquad \boldsymbol{S=\frac{1}{2}ab\sin C}$$

●三角形の面積の公式を用いて，いろいろな三角形の面積を求めてみよう。

例 1　△ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=60°$ のとき，この三角形の面積 S は

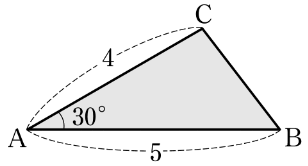
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 7\times 4\times \sin 60°$$

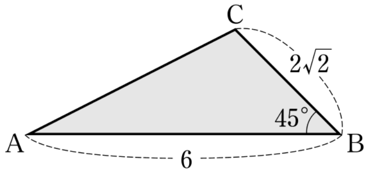
$$=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$



問 1　次の△ABC の面積を求めなさい。　➜p.110 復習問題1(1)

(1)　$b=4$，$c=5$，$A=30°$　　(2)　$a=2\sqrt{2}$，$c=6$，$B=45°$

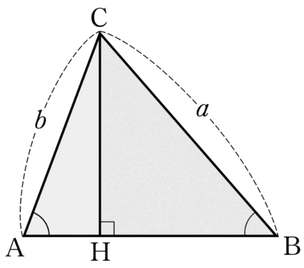




2　正弦定理

ねらい　三角形の3つの角のサインの値と，それぞれの角に対応する3辺の長さの間に，どのような関係が成り立つか考えます。

△ABC で, 頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引くと



$\sin A = \frac{\mathrm{CH}}{b}$ より
$\mathrm{CH} = b\sin A$
$\sin B = \frac{\mathrm{CH}}{a}$ より
$\mathrm{CH} = a\sin B$

△ AHC で

$$\mathrm{CH} = b\sin A$$

△BCH で

$$\mathrm{CH} = a\sin B$$

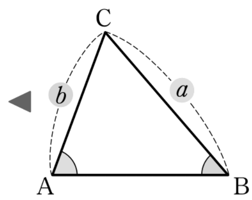
であるから

$$b\sin A = a\sin B$$

が成り立つことがわかる。この両辺を，$\sin A \times \sin B$ でわると

$$\frac{b\sin A}{\sin A \times \sin B} = \frac{a\sin B}{\sin A \times \sin B}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$



となる。

同様にして，次の式も成り立つことがわかる。

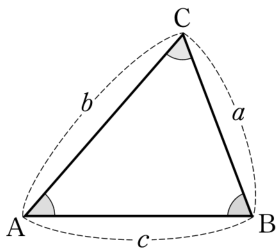
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},\ \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

よって，次の関係式が得られる。これを**正弦定理**という。

正弦定理

△ABC で

$$\boldsymbol{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$



例題 1

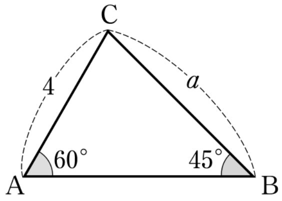
△ABC で，$A=60°$，$B=45°$，$b=4$ のとき，a の値を求めなさい。

解 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\frac{a}{\sin 60°}=\frac{b}{\sin 45°}$$

よって

$$a=\frac{a}{\sin 45°}\times\sin 60°=4\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

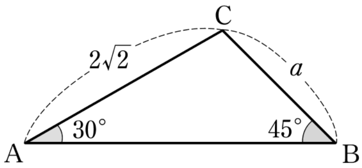


◀ 2 つの角と 1 つの辺がわかると，ほかの辺を求めることができる。

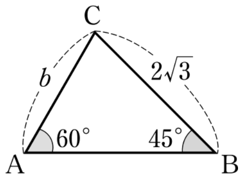
問 2 次の△ABC で，a，b の値を求めなさい。

➔p.110 復習問題2

(1)



(2)

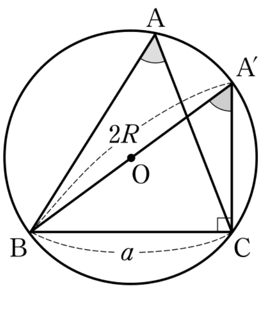


外接円との関係

△ABC の 3 つの頂点を通る円を△ABC の**外接円**という。

外接円の半径を R とすると，次の関係があることが知られている。

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}=\mathbf{2}\boldsymbol{R}$$



◀ 円周角の定理により

$\angle \mathrm{A}=\angle \mathrm{A}'$

△A′BC は直角三角形であるから

$\dfrac{a}{2R}=\sin A'=\sin A$

よって $\dfrac{a}{\sin A}=\underset{\uparrow}{2R}$

「外接円の直径」

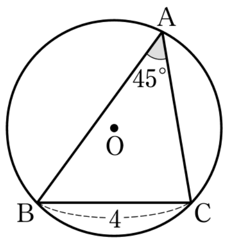
●上の式を用いて，外接円の半径を求めてみよう。

例 2 △ABC で，$A=45°$，$a=4$ のとき，この三角形の外接円の半径を R とすると

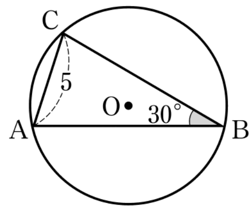
$$\frac{4}{\sin 45°}=2R$$

よって $2R=4\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

したがって $R=2\sqrt{2}$



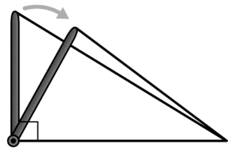
問 3 △ABC で，$B=30°$，$b=5$ のとき，この三角形の外接円の半径を求めなさい。



3　余弦定理

$\boxed{\text{ねらい}}$　三角形の１つの角と，３辺の長さの間に，どのような関係が成り立つか考えます。

直角三角形では，３辺の長さの間には三平方の定理が成り立つ。では，直角三角形でない三角形の３辺の長さの間には，どのような関係式が成り立つだろうか。



右の図のような三角形 ABC において，頂点 C から対辺 AB に垂線 CH を引く。

直角三角形 CHB で，三平方の定理を用いると

$a^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$　　……①

また，直角三角形 AHC で

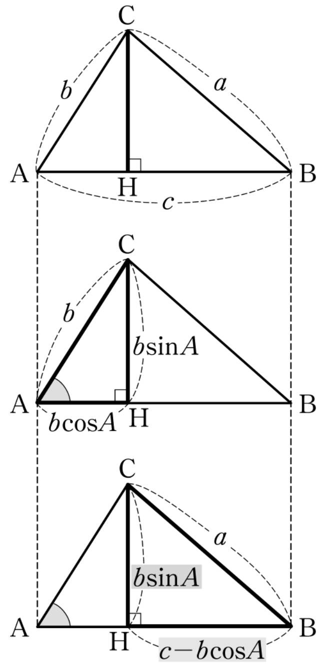
$\mathrm{CH} = b\sin A$　　……②

さらに，$\mathrm{AH} = b\cos A$ であるから

$\mathrm{BH} = \mathrm{AB} - \mathrm{AH} = c - b\cos A$　　……③

①，②，③より

$$\begin{aligned} a^2 &= \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2 \\ &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$



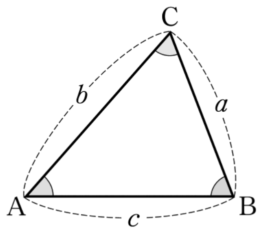
同様にして，次の３つの関係式が得られる。これらをまとめて**余弦定理**という。

◀余弦定理は直角三角形でも成り立つ。

余弦定理

△ABC で

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$



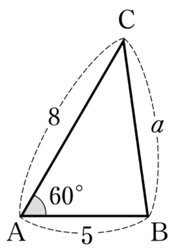
例題 2

△ABC で，$b=8$，$c=5$，$A=60^\circ$ のとき，a の値を求めなさい。

解　余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= 8^2 + 5^2 - 2\times 8\times 5\times \cos 60^\circ$$
$$= 64 + 25 - 80\times\frac{1}{2} = 49$$

$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a=7}$

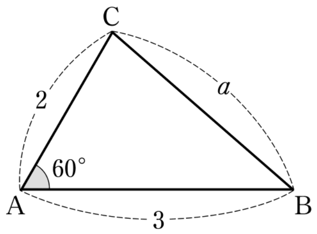


◀ 2 つの辺とその間の角がわかると，残りの 1 辺を求めることができる。

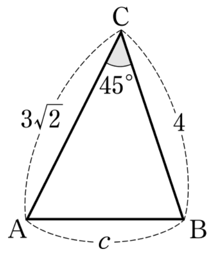
➜p.110 復習問題3

問 4　次の△ABC で，a，c の値を求めなさい。

(1)



(2)



3 辺から内角を求める

余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を変形すると，
$2bc\cos A = b^2+c^2-a^2$ となるから

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

が成り立つ。この式を用いると，a，b，c の値から $\cos A$ の値がわかり，∠A の大きさを求めることができる。

◀同様に

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

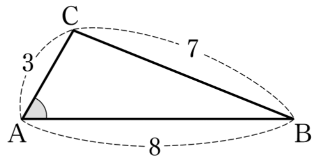
となる。

●上の式を用いて，三角形の内角の大きさを求めてみよう。

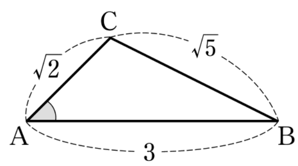
例 3　△ABC で，$a=7$，$b=3$，$c=8$ のとき

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8} = \frac{1}{2}$$

よって　　$\angle A = 60^\circ$



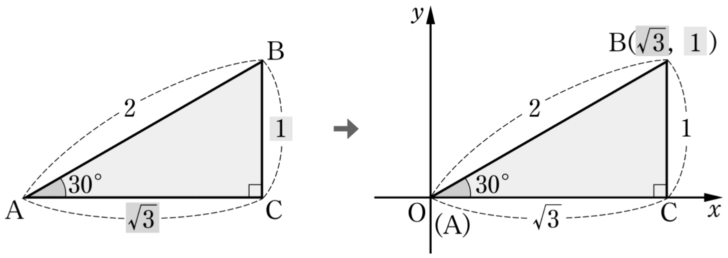
問 5　△ABC で，$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{2}$，$c=3$ のとき，
∠A の大きさを求めなさい。



4　三角比と座標

$\boxed{\text{ねらい}}$　ここまでは直角三角形を用いて鋭角の三角比を考えてきました。ここでは，座標を用いて三角比を鈍角まで拡張することを考えます。

左下の図の直角三角形に対し，右下の図のように座標軸を定めると，点 B の座標は $(\sqrt{3},\ 1)$ となる。



このとき，座標を使うと

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

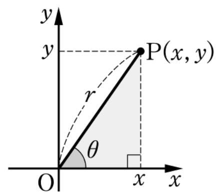
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{B の } x \text{ 座標}}{\text{OB}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{B の } y \text{ 座標}}{\text{B の } x \text{ 座標}}$$

とみることができる。

そこで，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲にある角 θ に対して，右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角が θ で，長さが r の線分 OP を考え，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

◀ θ はギリシャ文字の小文字で，シータと読む。



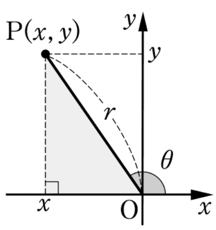
このとき，角 θ の三角比を次のように定める。

鈍角まで拡張した三角比

$$\sin\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}}$$

$$\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}}$$

$$\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$$



鈍角の三角比

例題 3

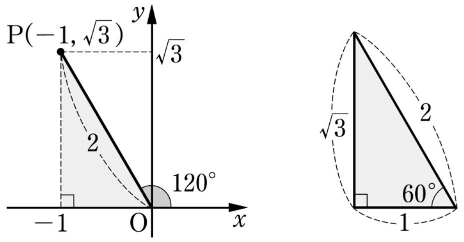
120° の三角比の値を求めなさい。

解　下の図のように，$\theta = 120°$，$\mathrm{OP} = 2$ とすると，点 P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ となるから，
$r = 2$，$x = -1$，$y = \sqrt{3}$ である。よって

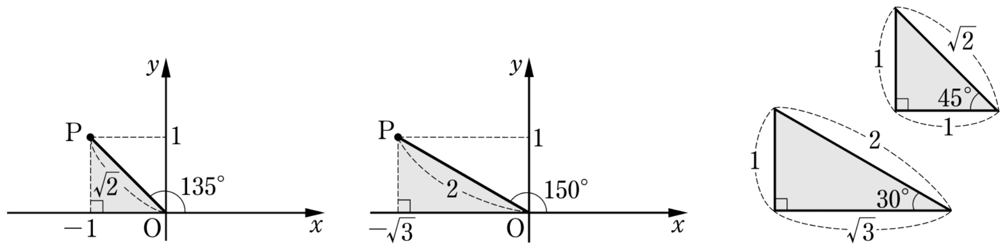
$$\sin 120° = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$



問 6　次の図を用いて，135° と 150° の三角比の値を求めなさい。

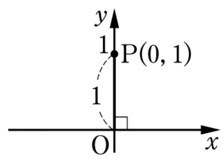


0°，90°，180° の三角比

90° の三角比の値は，右の図のように，$\mathrm{OP} = 1$ とすると，
$r = 1$，$x = 0$，$y = 1$ となるから

$$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$\tan 90°$ の値はない。



◀ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ の分母 x が 0 となる。

◀ 三角比の値の符号は，次のようになる。

θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	$+$	$+$
$\cos\theta$	$+$	$-$
$\tan\theta$	$+$	$-$

いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

5　三角比の相互関係

ねらい　θ が鈍角の場合も，鋭角のときと同じように，1つの三角比の値からほかの2つの三角比の値を求めることができます。

θ が鈍角の場合も，次の関係式が成り立つ。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

例題 4

θ が鈍角で，$\sin\theta = \frac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

解　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

θ は鈍角であるから　　$\cos\theta < 0$

よって　　$\cos\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\boldsymbol{\frac{3}{5}}$

また，$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \div \cos\theta$ より

$$\tan\theta = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

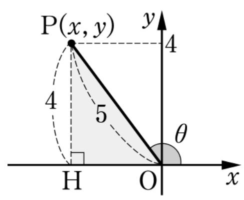
例題4は, 鋭角のときと同様に, 図を用いて考えてもよい。
右の図の△OPHで，三平方の定理により

$$\mathrm{OH}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$\mathrm{OH} > 0$ であるから　　$\mathrm{OH} = 3$

よって，点Pの x 座標は　　$x = -3$

したがって　　$\cos\theta = -\frac{3}{5}$，$\tan\theta = -\frac{4}{3}$



問 7　θ が鈍角で，$\sin\theta = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

➔p.110 復習問題④

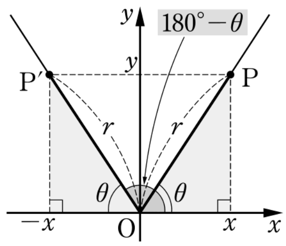
$\boxed{180^\circ - \theta \text{ の三角比}}$

　θ が鋭角のとき，$180^\circ - \theta$ は鈍角となる。この 2 つの角の三角比の間に，どのような関係が成り立つか考えてみよう。

　右の図のように，x 軸の正の部分とつくる角がそれぞれ θ，$180^\circ - \theta$ である半直線上に，2 点 P と P′ を

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = r$$

となるようにとると，この 2 点は y 軸に関して対称となる。
よって，P の座標が $\mathrm{P}(x,\ y)$ ならば，P′の座標は
$\mathrm{P}'(-x,\ y)$ となる。



　これより，$180^\circ - \theta$ の三角比は

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$
$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta$$
$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

◀ $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

◀ $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

◀ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

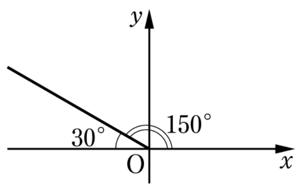
　したがって，次の関係式が成り立つ。

$180^\circ - \theta$ の三角比
$\boldsymbol{\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta}$
$\boldsymbol{\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta}$
$\boldsymbol{\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta}$

● $180^\circ - \theta$ の三角比の関係式を用いて，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表してみよう。

例 4　$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ であるから

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$$
$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$
$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$$



問 8　次の三角比を，鋭角の三角比で表しなさい。

(1)　$\sin 100^\circ$　　(2)　$\cos 130^\circ$　　(3)　$\tan 170^\circ$

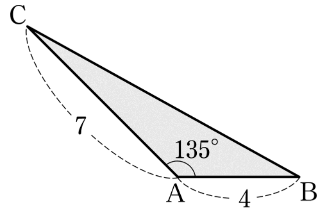
6　鈍角の三角比と計量

ねらい　鈍角の場合も，鋭角のときと同じように，三角形の面積の公式，正弦定理，余弦定理を用いて，面積や辺の長さなどを求めることができます。

角が鈍角の場合も，三角形の面積の公式，正弦定理，余弦定理が成り立つ。

●三角形の面積を求めてみよう。

例 5　△ABC で，$b=7$，$c=4$，$A=135°$ のとき，この三角形の面積 S は



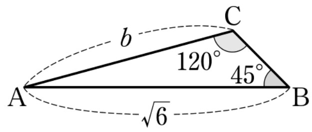
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 7\times 4\times \sin 135°$$

$$=14\times\frac{1}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$

◀ $\sin 135°=\sin(180°-45°)$
$=\sin 45°$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

●正弦定理，余弦定理を用いて三角形の辺の長さを求めてみよう。

例 6　(1)　△ABC で，$B=45°$，$C=120°$，$c=\sqrt{6}$ のとき，b の値は，正弦定理により



$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

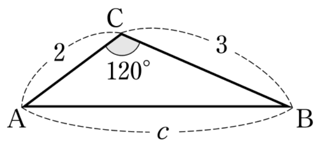
$$\frac{b}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}$$

よって　$b=\frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}\times\sin 45°$

$$=\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2$$

◀ $\sin 120°=\sin(180°-60°)$
$=\sin 60°$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　△ABC で，$a=3$，$b=2$，$C=120°$ のとき，c の値は，余弦定理により



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=3^2+2^2-2\times 3\times 2\times\cos 120°$

$=9+4-12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=19$

$c>0$ であるから　　$c=\sqrt{19}$

◀ $\cos 120°=\cos(180°-60°)$
$=-\cos 60°$
$=-\dfrac{1}{2}$

9 次の△ABC について，それぞれの値を求めなさい。 ➡p.110 復習問題①(2)

(1) $b=\sqrt{3}$, $c=2$, $A=120°$ のときの ΔABC の面積 S

(2) $B=30°$, $C=135°$, $c=2$ のときの b の値

(3) $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $C=150°$ のときの c の値

空間図形と三角比

空間図形に含まれる三角形に着目して三角比を用いると，建物の高さなどを求めることができる。

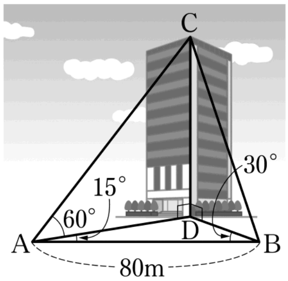
例題 5

右の図で

$\angle\mathrm{CAD}=60°$, $\angle\mathrm{DAB}=15°$, $\angle\mathrm{DBA}=30°$,

$\mathrm{AB}=80\mathrm{m}$

であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。

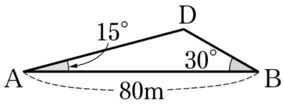


解 まず，△ABD に着目して AD を求める。

$\angle\mathrm{ADB}=180°-(15°+30°)=135°$

であるから，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin 30°}=\frac{80}{\sin 135°}$$



◀△ABD をぬき出して考える。

よって

$$\mathrm{AD}=\frac{80}{\sin 135°}\times\sin 30°$$

$$=80\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

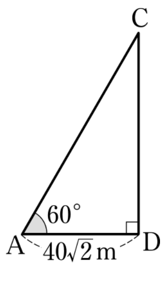
$$=40\sqrt{2}$$

◀$\sin 135°=\sin(180°-45°)$
$=\sin 45°$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

次に，△CAD に着目して CD を求める。

$\angle\mathrm{CAD}=60°$, $\angle\mathrm{CDA}=90°$

であるから



◀△CAD をぬき出して考える。

$$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\tan 60°$$

$$=40\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\mathbf{40\sqrt{6}\ (m)}$$

問 10 例題 5 で，$\angle\mathrm{CAD}=60°$, $\angle\mathrm{DAB}=15°$, $\angle\mathrm{DBA}=45°$, $\mathrm{AB}=100\mathrm{m}$ であるとき，ビルの高さ CD を求めなさい。 ➡p.110 復習問題⑤

復習問題

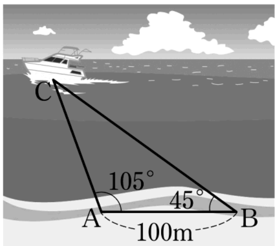
□$\boxed{1}$ 次の△ABC の面積を求めなさい。

三角形の面積
p.99 例 1
p.108 例 5

(1) $a=5,\ b=12,\ C=30°$

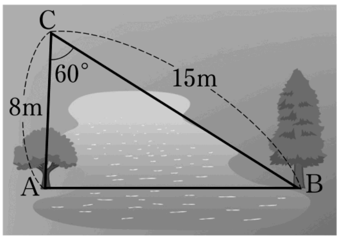
(2) $b=3,\ c=8,\ A=135°$

□$\boxed{2}$ 海岸の 100m 離れた 2 地点 A，B から船 C を見ると，$A=105°$，$B=45°$ であった。地点 A から船までの距離 AC を求めなさい。



正弦定理
p.101 例題 1

□$\boxed{3}$ C 地点から，池の両側に立つ木 A，B までの距離と，∠ACB を測ると，AC = 8m，BC = 15m
∠ACB = 60° であった。
2 本の木の間の距離 AB を求めなさい。



余弦定理
p.103 例題 2

□$\boxed{4}$ θ が鈍角のとき，次の問に答えなさい。

三角比の相互関係
p.106 例題 4

(1) $\sin\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

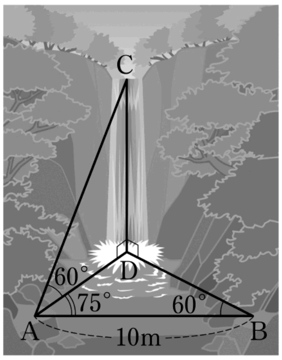
(2) $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

□$\boxed{5}$ 右の図で，点 A，B，D は同一水平面上にあり，
∠CAD = 60°，∠DAB = 75°，
∠DBA = 60°，AB = 10m
である。

(1) ∠ADB を求めなさい。

(2) 距離 AD を求めなさい。

(3) 滝の高さ CD を求めなさい。



空間図形と三角比
p.109 例題 5