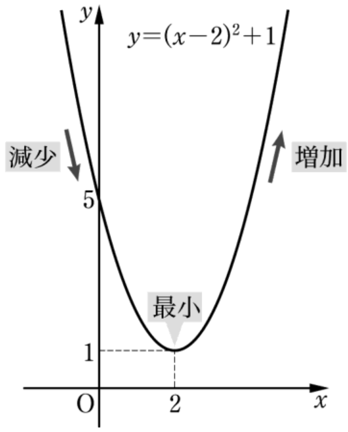
2節　2次関数の値の変化

1　2次関数の最大値・最小値

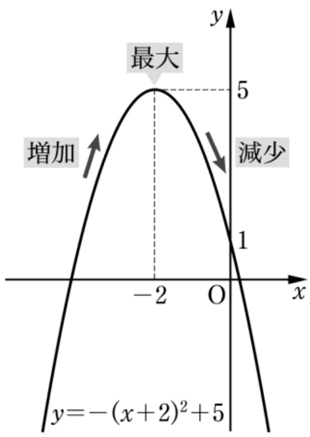
ねらい　2次関数は最大値や最小値をもつことがあります。このことをグラフを利用して調べ，どのようなときに最大値や最小値をもつか学びます。

● 2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値や最小値を調べてみよう。

例1　2次関数 $y=(x-2)^2+1$ のグラフは，
直線 $x=2$ を軸とし，点 $(2,\ 1)$ を頂点とする
下に凸の放物線である。
よって，右のグラフから
　$x<2$ の範囲で　　y の値は減少
　$x>2$ の範囲で　　y の値は増加
していることがわかる。
したがって，$x=2$ のとき y の値は最小となり，
最小値は1である。
また，y の値はいくらでも大きくなるから，
最大値はない。



例2　2次関数 $y=-(x+2)^2+5$ のグラフは，
直線 $x=-2$ を軸とし，点 $(-2,\ 5)$ を頂点と
する上に凸の放物線である。
よって，右のグラフから
　$x<-2$ の範囲で　　y の値は増加
　$x>-2$ の範囲で　　y の値は減少
していることがわかる。
したがって，$x=-2$ のとき y の値は最大となり，
最大値は5である。
また，y の値はいくらでも小さくなるから，
最小値はない。

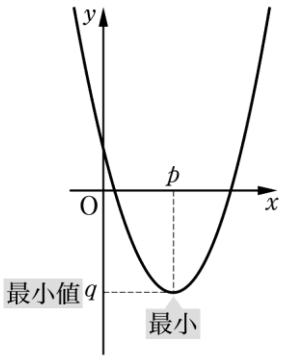


2 次関数の最大値と最小値について，次のようにまとめられる。

2 次関数の最大値・最小値

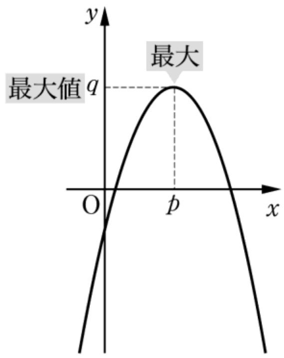
2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の最大値・最小値は，次のようになる。

$a > 0$ のとき



$x = p$ のとき　最小値は q である。
最大値はない。

$a < 0$ のとき



$x = p$ のとき　最大値は q である。
最小値はない。

問 1　次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y = (x-1)^2 - 2$　　(2)　$y = -(x-2)^2 + 6$

例題 1

2 次関数 $y = 2x^2 - 4x - 3$ の最大値または最小値を求めなさい。

解　与えられた 2 次関数は

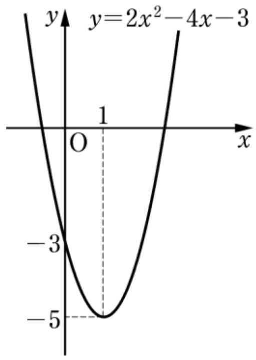
$$y = 2x^2 - 4x - 3$$
$$= 2(x-1)^2 - 5$$

と変形できる。

したがって，この関数は

$x = 1$ のとき　最小値 -5

最大値はない。



問 2　次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。　➔p.82 復習問題1

(1)　$y = 2x^2 - 8x + 13$　　(2)　$y = -3x^2 - 6x + 7$

かぎられた範囲での最大値・最小値

関数で，x のとる値の範囲を，その関数の**定義域**という。

関数の定義域は，たとえば

$$y=(x-1)^2-3 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$$

のように，関数を表す式の後に（　）を用いて示すことがある。

例題 2

2 次関数 $y=x^2-2x-2$ について，次の定義域における最大値と最小値を求めなさい。

(1)　$-2 \leqq x \leqq 3$　　　(2)　$2 \leqq x \leqq 4$

解　(1)　$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$

と変形できる。

$x=-2$ のとき　$y=6$

$x=3$ のとき　$y=1$

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

$x=-2$ のとき　最大値 6

$x=1$ のとき　最小値 -3

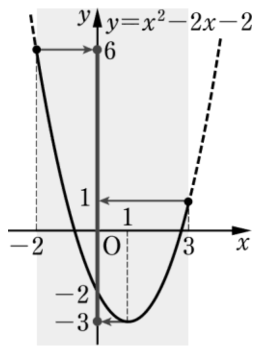
(2)　$x=2$ のとき　$y=-2$

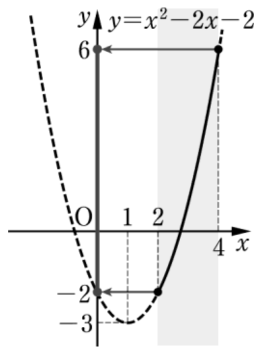
$x=4$ のとき　$y=6$

この関数のグラフは右の図の実線部分であるから

$x=4$ のとき　最大値 6

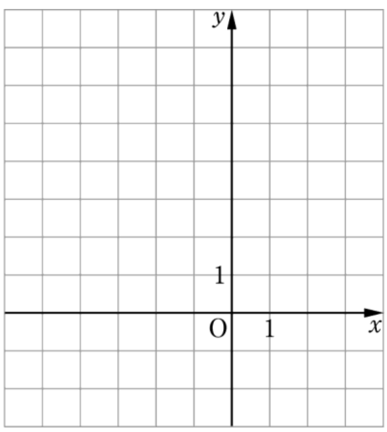
$x=2$ のとき　最小値 -2

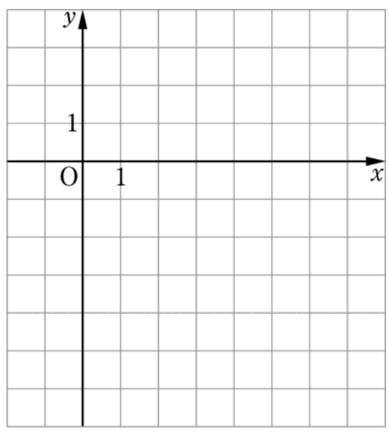




問 3　次の 2 次関数の最大値と最小値を求めなさい。　➔p.82 復習問題②

(1)　$y=(x+1)^2-2 \quad (-3 \leqq x \leqq 2)$　　(2)　$y=x^2-6x+3 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$





例題 3

長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形をつくる。
長方形の縦を $x$cm として，面積 $y$cm^2 の最大値を求めなさい。

解　長方形の横は

$(10-x)$cm

と表される。

ただし，辺の長さは正であるから

$0<x<10$　……①

長方形の面積 $y$cm^2 は

$$y=x(10-x)$$
$$=-x^2+10x$$
$$=-(x^2-10x)$$
$$=-(x-5)^2+25$$

となる。

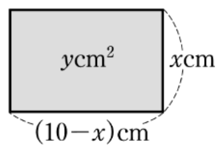
よって，①のとき，この関数のグラフは右の図の実線部分である。

したがって

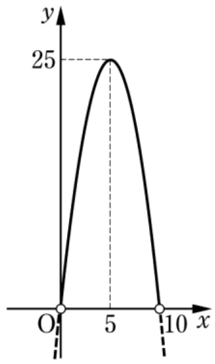
$x=5$ のとき　最大値 25

である。

答　最大値 25cm^2



◀長方形の 4 辺の長さの和が 20cm であるから，縦と横の和は
$20\div2=10$ (cm)

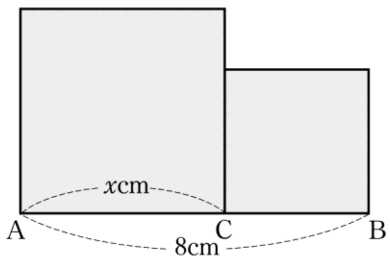


◀縦は　$x>0$
横は　$10-x>0$
これらを同時に成り立たせる x の値の範囲は
$0<x<10$

◀グラフ上の∘は，その点を含まないことを示している。

問 4　長さ 8cm の線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB を 1 辺とする 2 つの正方形をつくる。AC の長さを $x$cm として，この 2 つの正方形の面積の和 $y$cm^2 の最小値を求めなさい。

➔p.82 復習問題③



2　2次関数のグラフと2次方程式

ねらい　2次関数のグラフと2次方程式の間には密接な関係があります。この関係について学びます。

●2次関数のグラフと x 軸が共有する点の x 座標について調べてみよう。

例3　2次関数

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めてみよう。

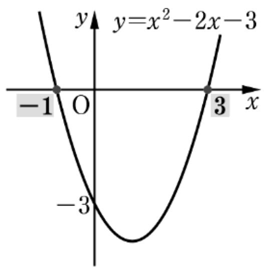
①のグラフと x 軸の共有点では，y 座標は 0 となる。

よって，共有点の x 座標は，①で $y = 0$ とした

2次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ の解として求められる。

$x^2 - 2x - 3 = 0$ より　　$(x+1)(x-3) = 0$

したがって，共有点の x 座標は　　$x = -1,\ 3$



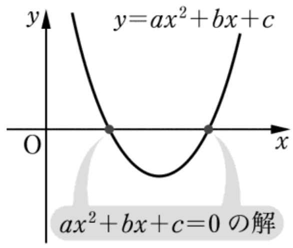
一般に，2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつときには，次のことが成り立つ。

2次関数のグラフと x 軸の共有点

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解

である。



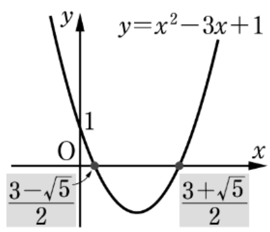
●いろいろな2次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めてみよう。

例4　2次関数 $y = x^2 - 3x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の解である。

これを解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

したがって，共有点の x 座標は　　$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$



◀根号の中が正のとき，解は2つあり，グラフは x 軸と2点で交わる。

問 5 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

→p.82 復習問題④(1), (2), (3)

(1) $y = x^2 - x - 6$ (2) $y = 2x^2 - 9x - 5$

(3) $y = x^2 - 5x + 5$ (4) $y = 3x^2 + 3x - 2$

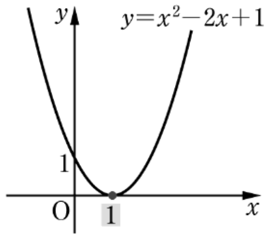
例 5 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ の解である。

これを因数分解を利用して解くと

$$(x-1)^2 = 0$$

より $x = 1$

したがって，共有点の x 座標は $x = 1$



◀解の公式を用いて求めることもできる。根号の中が 0 のとき，解は 1 つとなり，グラフは x 軸に接する。

例 5 のように，2 次関数のグラフと x 軸がただ 1 点を共有するとき，2 次関数のグラフは x 軸に**接する**という。また，その共有点を**接点**という。

◀共有点とは，交点や接点のことをいう。

例 6 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解である。

これを解の公式を用いて解くと

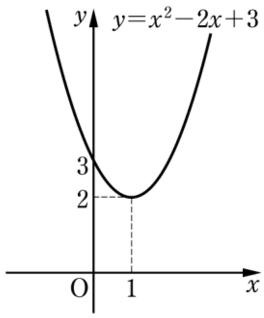
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

根号の中が負となるから，解はない。

この場合，$y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

より，右の図のようになり，グラフと x 軸の共有点はない。



◀根号の中が負のとき，解はなく，グラフと x 軸の共有点はない。

例 6 のように，根号の中が負となり解がない場合は，グラフと x 軸の共有点はない。

問 6 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

→p.82 復習問題④(4), (5)

(1) $y = x^2 + 6x + 9$ (2) $y = 4x^2 + 4x + 1$

(3) $y = x^2 - 2x + 5$ (4) $y = 3x^2 + 2x + 4$

3　2 次関数のグラフと 2 次不等式

ねらい　1 章では 1 次不等式について学びました。ここでは，2 次関数のグラフと関連させて，左辺が 2 次式となる不等式について学びます。

不等式

$$x^2-4x+3>0,\quad x^2-4x+3<0$$

のように，移項して右辺が 0 になるように整理したとき，左辺が 2 次式となる不等式を **2 次不等式**という。

グラフが x 軸と 2 点を共有するとき

● 2 次不等式を成り立たせる x の値の範囲を調べてみよう。

例 7　2 次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は

$$x^2-4x+3=0$$

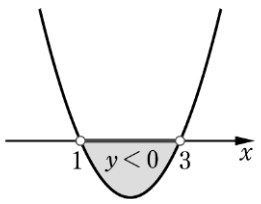
$$(x-1)(x-3)=0$$

より　　$x=1,\ 3$

よって，右の図より，x の値が $1<x<3$ の範囲にあると，グラフは x 軸の下側にある。このとき $y<0$ であるから，2 次不等式 $x^2-4x+3<0$ を成り立たせる x の値の範囲は

$$1<x<3$$

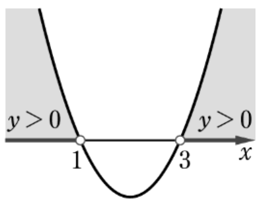
であることがわかる。



同様に右の図から，2 次不等式 $x^2-4x+3>0$ を成り立たせる x の値の範囲は

$$x<1,\ 3<x$$

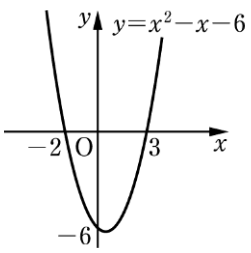
であることがわかる。



問 7　右の $y=x^2-x-6$ のグラフを利用して，次の不等式を成り立たせる x の値の範囲を求めなさい。

(1)　$x^2-x-6<0$

(2)　$x^2-x-6>0$



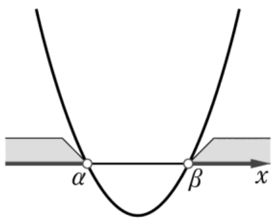
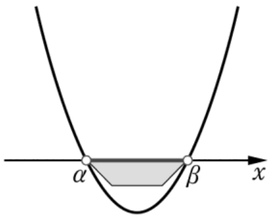
2 次不等式を成り立たせる x の値の範囲を，その 2 次不等式の**解**といい，解を求めることを不等式を**解く**という。

2 次不等式の解は，次のようにまとめられる。

2 次不等式の解

$ax^2+bx+c=0(a>0)$ の 2 つの解を

$\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とすると

$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$	$\boldsymbol{ax^2+bx+2}<0$
の解は	**の解は**
$\boldsymbol{x<\alpha},\quad \boldsymbol{\beta<x}$	$\boldsymbol{\alpha}<x<\beta$
	

◀$\alpha,\ \beta$ はギリシャ文字の小文字で，α はアルファ，β はベータと読む。

例題 4

次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2-6x+5\geqq 0$　　　(2)　$x^2+x-6<0$

解　(1)　2 次方程式 $x^2-6x+5=0$ を解くと

$$(x-1)(x-5)=0$$

より　　$x=1,\ 5$

したがって，2 次不等式 $x^2-6x+5\geqq 0$ の解は

$$\boldsymbol{x\leqq 1,\ 5\leqq x}$$

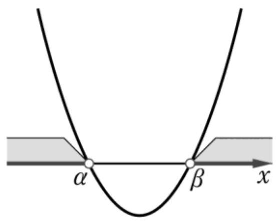
(2)　2 次方程式 $x^2+x-6=0$ を解くと

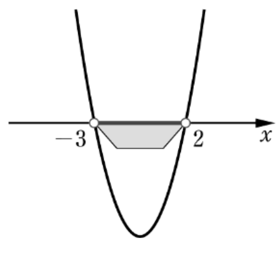
$$(x+3)(x-2)=0$$

より　　$x=-3,\ 2$

したがって，2 次不等式 $x^2+x-6<0$ の解は

$$\boldsymbol{-3}<x<\boldsymbol{2}$$





問 8　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2-7x+10>0$　　　(2)　$x^2+2x-3\leqq 0$

(3)　$x^2+9x+8\geqq 0$　　　(4)　$x^2-9x+18<0$

➜p.82 復習問題5(1), (2)

いろいろな 2 次不等式

例題 5

2 次不等式 $x^2-3x+1 \geqq 0$ を解きなさい。

解 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ を解の公式を用いて解くと

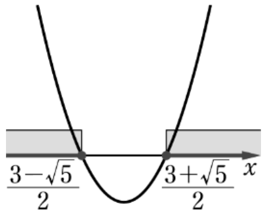
$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times1}}{2\times1}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって，2 次不等式 $x^2-3x+1 \geqq 0$ の解は

$$\boldsymbol{x \leqq \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leqq x}$$

◀ 2 次方程式
$ax^2+bx+c=0$
の解は
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



問 9 次の 2 次不等式を解きなさい。 ➜p.82 復習問題5(3)

(1) $x^2-5x+3<0$ (2) $2x^2-x-6 \geqq 0$

x^2 の係数が負の 2 次不等式は，両辺に -1 をかけて x^2 の係数を正にしてから解くとよい。

例題 6

2 次不等式 $-x^2+x+2>0$ を解きなさい。

解 $-x^2+x+2>0$ の両辺に -1 をかけると

$x^2-x-2<0$

2 次方程式 $x^2-x-2=0$ を解くと

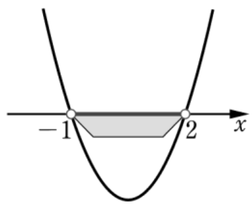
$(x+1)(x-2)=0$

より $x=-1,\ 2$

したがって，2 次不等式 $-x^2+x+2>0$ の解は

$\boldsymbol{-1<x<2}$

◀ 不等号の向きが変わる。



問 10 次の 2 次不等式を解きなさい。 ➜p.82 復習問題5(4), 6

(1) $-x^2-x+20 \geqq 0$ (2) $-x^2-6x+27<0$

グラフが x 軸と 1 点を共有するとき

●次の 2 次不等式を解いてみよう。

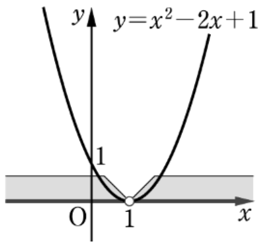
例 8　(1)　$x^2-2x+1>0$　　(2)　$x^2-2x+1<0$

2 次方程式 $x^2-2x+1=0$ を解くと

$(x-1)^2=0$

より　　$x=1$

よって，$y=x^2-2x+1$ のグラフは右の図のように x 軸に接している。



(1)　グラフから，$x<1$，$1<x$ の範囲で $y>0$ である。
　よって，$x^2-2x+1>0$ の解は，
　1 以外のすべての実数

(2)　グラフから，$x^2-2x+1<0$ の解はない。

◀解の公式を用いて解くこともできる。

◀$x^2-2x+1\geqq 0$ の解はすべての実数

◀$x^2-2x+1\leqq 0$ の解は $x=1$

問 11　次の 2 次不等式を解きなさい。

→p.82 復習問題 5 (5)

(1)　$x^2+6x+9>0$　　(2)　$x^2+8x+16<0$

グラフが x 軸と共有点をもたないとき

●次の 2 次不等式を解いてみよう。

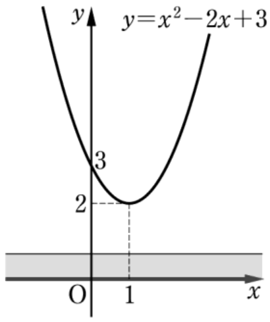
例 9　(1)　$x^2-2x+3>0$　　(2)　$x^2-2x+3<0$

2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times3}}{2\times1}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

根号の中が負となるから，解はない。

このとき，$y=x^2-2x+3$ のグラフはつねに x 軸の上側にあり，x のどんな値に対しても $y>0$ である。



(1)　グラフから，$x^2-2x+3>0$ の解は，
　すべての実数

(2)　グラフから，$x^2-2x+3<0$ の解はない。

◀$y=x^2-2x+3$
　$=(x-1)^2+2$

問 12　次の 2 次不等式を解きなさい。

→p.82 復習問題 5 (6)

(1)　$x^2-4x+5>0$　　(2)　$x^2-6x+10<0$

復習問題

□ $\boxed{1}$　次の 2 次関数の最大値または最小値を求めなさい。

(1)　$y = 2x^2 + 8x + 7$

(2)　$y = -x^2 - 2x + 4$

2次関数の最大値・最小値
p.73 例題 1

□ $\boxed{2}$　次の 2 次関数の最大値と最小値を求めなさい。

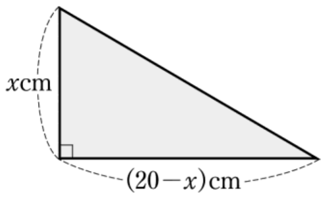
(1)　$y = (x-3)^2 + 5 \quad (2 \leqq x \leqq 5)$

(2)　$y = -2(x-1)^2 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(3)　$y = x^2 + 6x + 8 \quad (-2 \leqq x \leqq 0)$

かぎられた範囲での最大値・最小値
p.74 例題 2

□ $\boxed{3}$　直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形がある。この直角三角形の面積 $y$cm^2 の最大値を求めなさい。



かぎられた範囲での最大値・最小値
p.75 例題 3

□ $\boxed{4}$　次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めなさい。

(1)　$y = (x+2)(x-5)$　　(2)　$y = x^2 + x - 12$

(3)　$y = 3x^2 + 5x + 1$　　(4)　$y = 9x^2 - 6x + 1$

(5)　$y = 2x^2 - 6x + 5$

2次関数のグラフと2次方程式
p.76 例 3
p.76 例 4
p.77 例 5
p.77 例 6

□ $\boxed{5}$　次の 2 次不等式を解きなさい。

(1)　$x^2 + 5x - 24 > 0$　　(2)　$x^2 + 7x + 10 \leqq 0$

(3)　$x^2 - 4x + 1 \leqq 0$　　(4)　$-x^2 + x + 6 > 0$

(5)　$16x^2 + 8x + 1 > 0$　　(6)　$x^2 + 4x + 8 < 0$

2次関数のグラフと2次不等式
p.79 例題 4
p.80 例題 5
p.80 例題 6
p.81 例 8
p.81 例 9

□ $\boxed{6}$　地上から真上に毎秒 30m の速さでボールを投げ上げるとき，投げ上げてから x 秒後のボールの高さ ym は

$$y = -5x^2 + 30x$$

で表される。ボールの高さが 25m 以上にあるのは，何秒後から何秒後までかを求めなさい。

2次関数のグラフと2次不等式
p.80 例題 6